Coordonator: Andrei Octavian **Dobre**

Silvia **Brabeceanu**, Nicolae **Breazu**, Delia Valentina **Bulgăr**, Georgiana **Canache**, Viorica **Ciocănaru**, Ioan **Lung**, Viorica **Lungana**, Blandina **Maniţiu**, Ştefan Florin **Marcu** , Corneliu **Mănescu-Avram**, Ovidiu-Marius **Mândrican**, Adrian **Muscalu**, Gabriel **Necula**, Nicolae **Nicolaescu**, Gabriela **Nistor**, Csaba **Oláh**, Enache **Paul**, Ileana **Rîcu**, Adrian **Stan**, Constantin **Telteu**, Iuliana **Traşcă**

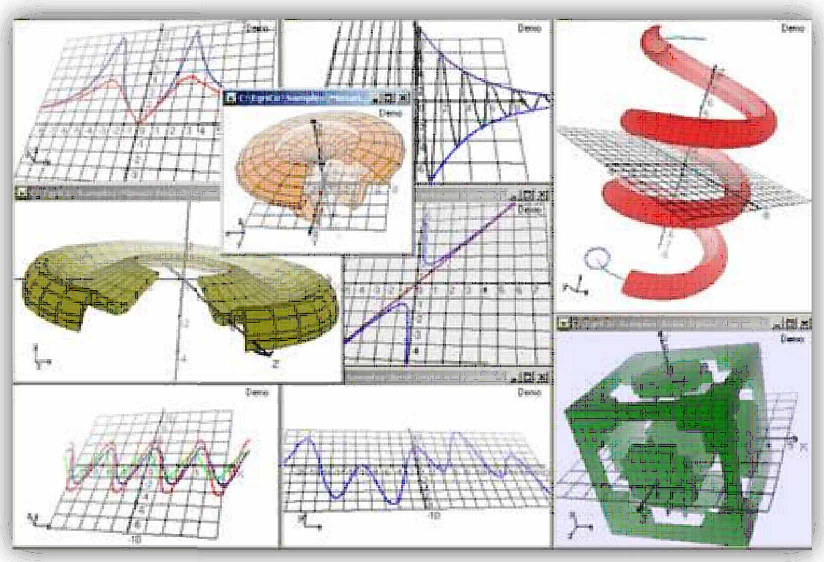
GHID DE PREGATIRE ONLINE

BACALAUREAT 2011, MATEMATICĂ M1

www.mateinfo.ro

Profil: **Real, Militar**

Specializare: **Matematică – Informatică**



Subiectele din această lucrare sunt realizate după modelul elaborat de M.E.C.I.

Ploieşti, 2011

ISBN 978-973-0-10295-6

Toate drepturile prezentei ediţii aparţin site-ului www.mateinfo.ro . Nicio parte a acestei ediţii nu poate fi reprodusă fară acordul scris al www.mateinfo.ro (prof. Andrei Octavian Dobre) .

Culegerea este oferita gratuit doar pe site-ul www.mateinfo.ro şi nu poate fi publicată pe un alt site fara acordul scris al www.mateinfo.ro (prof. Andrei Octavian Dobre).

Site: www.mateinfo.ro
E-mail: office@mateinfo.ro sau dobre.andrei@yahoo.com

Nume autori	Şcoala de provenienţă
Andrei Octavian **Dobre** (coordonator)	Grupul Şcolar de Transporturi Ploieşti
Silvia **Brabeceanu**	Colegiul Tehnic " Gheorghe Lazăr " Plopeni
Nicolae **Breazu**	Colegiul Spiru Haret, Ploieşti
Delia Valentina **Bulgăr**	Liceul Teoretic "Traian Vuia" Făget , jud. Timiş
Georgiana **Canache**	Grupul Şcolar Toma Socolescu Ploieşti
Viorica **Ciocănaru**	Grupul Şcolar Industrial Energetic, Craiova
Ioan **Lung**	Colegiul Naţional " Arany Janos" Salonta
Viorica **Lungana**	Colegiul Naţional "Alexandru Dimitrie Ghica", Alexandria, jud. Teleorman
Blandina **Maniţiu**	Colegiul Tehnic"Alexandru Domşa"Alba Iulia
Ştefan Florin **Marcu**	Grup Şcolar de Transporturi Auto-Calaraşi
Corneliu **Mănescu-Avram**	Grupul Şcolar de Transporturi Ploieşti
Ovidiu-Marius **Mândrican**	Grupul Şcolar C. Cantacuzino, Băicoi
Adrian **Muscalu**	Colegiul Agricol „Nicolae Cornăţeanu" Tulcea
Gabriel **Necula**	Colegiul Tehnic " Gheorghe Lazăr" Plopeni
Nicolae **Nicolaescu**	Colegiul Tehnic "Alexe Marin" Slatina Olt
Gabriela **Nistor**	Grupul Şcolar Administrativ şi de Servicii „Victor Slăvescu" Ploiesti
Csaba **Oláh**	Grup Şcolar "Liviu Rebreanu, Bălan, Jud.Harghita
Enache **Paul**	Colegiul Naţional Anastasescu , Rosiori de Vede , jud. Teleorman
Ileana **Ricu**	Grup Şcolar Agricol "Roşiorii de Vede" Teleorman
Adrian **Stan**	Grup Şcolar Costin Neniţescu Buzău
Constantin **Telteu**	Colegiul Naţional de Arte „Regina Maria", Constanţa
Iuliana **Traşcă**	Şcoala cu cls. I-VIII „Gh. Popescu" Mărgineni-Slobozia

Fiecare autor răspunde de corectitudinea şi originalitatea variantelor propuse.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 1

Prof. Silvia Brabeceanu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi $\sqrt[3]{64}+\log_2\sqrt{64}$.

(5p) 2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^{x-1}$. Să se calculeze $f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$

(5p) 3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x^2-6x}=3x$.

(5p) 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{8,9,10,\cdots 40\}$ acesta să fie divizibil cu 4.

(5p) 5. Se consideră vectorii $\vec{u}=3\vec{i}-5\vec{j}$ şi $\vec{v}=-4\vec{i}-2\vec{j}$. Determinaţi coordonatele vectorului $\vec{w}=2\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

(5p) 6. Într-un triunghi ABC se cunosc $AB=12,\ BC=8,\ AC=6$. Să se calculeze $\cos B$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix}2x-1 & -x+1\\ 2x-1 & -x+1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}),\ x\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Să se calculeze $A(-1)+A(1)$.

(5p) b) Notăm matricea $A(-1)\times A(1)=B\in M_2(\mathbb{R})$. Să se determine $B^n, n\geq 1$.

(5p) c) Să se calculeze suma $\sum_{k=1}^{n}A(k)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=4xy-2x-2y+\frac{3}{2},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Să se arate că $x*y=(2x-1)(2y-1)+\frac{1}{2},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) b) Să se verifice dacă „ $*$ ” este o lege de compoziţie asociativă pe $\mathbb{R}$.

(5p) c) Să se demonstreze că $\underbrace{x*x*x*\ldots*x}_{n\ ori}=2^{n-2}(2x-1)^n+\frac{1}{2},\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : D \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^3}{(ax+b)^2},\ a,b \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Să se determine a şi b, numere reale, astfel încât dreapta $y = \frac{1}{4}x + 1$ să fie asimptotă la graficul funcţiei.

(5p) b) Pentru a şi b găsiţi la a). să se stabilească domeniul maxim de definiţie al funcţiei şi apoi să se studieze monotonia funcţiei.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}\cdot f(x)\right)^{f(x)}$.

2. Se consideră funcţia $f : [1,2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x-1}{x+2}$.

(5p) a) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)\,dx$.

(5p) b) Să se determine $a > 0$ astfel încât $\int_a^{a+1} f(x)\,dx = 1 - 3\ln\frac{5}{4}$.

(5p) c) Să se arate că $0 \le \int_1^2 f(x)\,dx \le \frac{1}{4}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 2

Prof. Silvia Brabeceanu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se afle partea reală a numărului complex $z = \left(1 - i\sqrt{5}\right)^4$.

(5p) 2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât suma pătratelor soluţiilor ecuaţiei $x^2 + (m-2)x - (m+3) = 0$ să fie 25.

(5p) 3. Ştiind că doi termeni ai unei progresii geometrice sunt $a_1 = 3$ şi $a_4 = 192$, să se calculeze S_8.

(5p) 4. Să se rezolve ecuaţia $\log_{x-2}\left(x^2 - 3x - 4\right) = 2$.

www.mateinfo.ro

(5p) 5. Să se arate că triunghiul cu vârfurile $A(10,-4)$, $B(-2,0)$ şi $C(2,12)$ este triunghi isoscel.

(5p) 6. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(2,2)$, $B(4,-3)$, $C(m-1,2m)$ să fie coliniare.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2-x & 2 \\ 4-x & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1-x \end{vmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Să se calculeze valoarea determinantului pentru $x=-1$.

(5p) b) Să se demonstreze că $D(x)=(x-7)(x^2-3)$.

(5p) c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $D(3^x)=0$.

2. Se consideră polinomul $f=aX^4+bX^3+cX+(a-1)X-1\in\mathbb{R}[X]$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Ştiind că polinomul f se divide cu $(X-1)^3$, să se calculeze suma $S=a+b+c$.

(5p) b) Pentru $a=2,\ b=-5,\ c=3$ să se descompună în produs de factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ polinomul f.

(5p) c) Pentru $a=2,\ b=-5,\ c=3$ să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$, unde x_1,x_2,x_3,x_4 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţiile $f,g:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=arctg(x),\ g(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

(5p) a) Să se arate că $f(x)>g(x)\ \forall x\in(0,\infty)$.

(5p) b) Să se găsească punctele de extrem local ale funcţiei $g:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

(5p) c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=arctg(x)$ în punctul de tangenţă $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\pi}{6}\right)$.

2. Se consideră funcţia $f_n:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=(2-x^3)^n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $I_n=\int_{-1}^{1}f_n(x)dx$.

(5p) a) Să se calculeze I_1.

(5p) b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia subgraficului funcţiei f_n în jurul axei Ox pentru $n=1$.

(5p) c) Să se determine o relaţie de recurenţă pentru $I_n=\int_{-1}^{1}(2-x^3)^n dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 3

Prof. Silvia Brabeceanu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi $C_{10}^{3}-C_{10}^{7}$.

(5p) 2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(m+3)x+2m+7$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $A(m-4,m+3)$ să fie situat pe graficul funcţiei.

(5p) 3. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+5}=\sqrt[3]{2x+7}$.

(5p) 4. Să se rezolve ecuaţia $4\left(4^{x}+4^{-x}\right)-6\left(2^{x}+2^{-x}\right)-10=0$.

(5p) 5. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}=(m+5)\vec{i}+(2m+1)\vec{j}$ şi $\vec{v}=(2m-3)\vec{i}+(m-3)\vec{j}$ să aibă acelaşi modul.

(5p) 6. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-3)$, $B(-5,4)$ şi $C(1,1)$. Să se scrie ecuaţia perpendicularei din B pe AC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie dat sistemul $S:\begin{cases}5x+y-3z=0\\ x+y-z=0\\ 3x+y-2z=0\end{cases},\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^{3}$

(5p) a) Să se afle determinantul şi rangul matricei asociată sistemului.
(5p) b) Să se rezolve sistemul.
(5p) c) Să se găsească o soluţie (x_{0},y_{0},z_{0}) a sistemului pentru care $x_{0}+2y_{0}+3z_{0}=9$.

2. Pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie „$*$” şi „$\circ$” astfel $x*y=x+y+2$ şi $x\circ y=2xy+4x+4y+6$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Se dau mulţimile $A=\left\{x\in H \mid x^{2}*3x=0\right\}$ şi $B=\left\{x\in H \mid x\circ x=0\right\}$. Să se calculeze $A\setminus B$.

(5p) b) Să se demonstreze că $(x*y)\circ z=(x\circ z)*(y\circ z),\quad \forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

(5p) c) Fie $a=x*x$ şi $b=x\circ x$. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care media aritmetică a numerelor a şi b este negativă.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\dfrac{4}{(x+1)^2}$.

(5p) a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(5p) b) Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate ale funcţiei f.

(5p) c) Să se calculeze asimptotele la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţiile $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$ şi $g:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=f'(x)$.

(5p) a) Să se determine o primitivă G a funcţiei g pentru care $G(1)=\sqrt{3}$.

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\int_1^x g(t)\,dt$.

(5p) c) Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=2$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 4

Prof. Silvia Brabeceanu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi $\dfrac{(1+3i)^3+(1-3i)^3}{(3-i)^2-(3+i)^2}$.

(5p) 2. Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $\log_3(x^2-1)<\log_3(4x+4)$.

(5p) 3. Determinaţi mulţimea $A=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ 2x+3\geq 0\quad \dfrac{x-2}{x(x-3)}<\ \right\}$.

(5p) 4. Să se determine termenul ce conţine pe x^2 din dezvoltarea $\left(yx^{\frac{-1}{3}}+xy^{\frac{-1}{3}}\right)^{30}$ $x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) 5. Fie $\vec{r_A}=3\vec{i}-5\vec{j}$, $\vec{r_B}=-4\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{r_C}=2\vec{i}+7\vec{j}$ vectorii de poziţie ai vârfurilor triunghiului ABC. Să se determine vectorul de poziţie al centrului de greutate a triunghiului ABC.

(5p) 6. Punctele $A(3,4)$, $B(7,4)$, $C(11,-3)$, $D(-1,-3)$ sunt vârfurile unui trapez isoscel. Să se calculeze aria trapezului $ABCD$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $S:\begin{cases}3x+y-2z=0\\ x+y-az=0\\ x+3y-2z=0\end{cases}$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, a\in\mathbb{R}$.

Notăm cu A matricea sistemului.

(5p) a) Să se determine rangul matricei A în funcţie de a.

(5p) b) Să se rezolve sistemul pentru $a=1$.

(5p) c) Să se găsească o soluţie (x_0, y_0, z_0) a sistemului cu proprietatea $x_0^3+y_0^2-z_0=0$.

2. Pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=-xy+5x+5y-20,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Să se arate că $x*y=(x-5)(5-y)+5,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) b) Să se demonstreze că mulţimea $(-\infty,5)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziţie.

(5p) c) Se dă expresia $E(x)=(x+8)*(x-7)-63$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Să se demonstreze că $E(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x-2\ln(x+1)$.

(5p) a) Să se calculeze derivatele de ordinul întâi şi doi ale funcţiei f.

(5p) b) Fie funcţia $g:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\ln\dfrac{x}{(x+1)^2}$. Se notează cu $g^{(n)}(x)$ derivata de ordinul n şi cu $x_n,\ n\in\mathbb{N}^*$ rădăcina derivatei de ordinul n. Să se calculeze $x_n,\ n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{x_n}$.

2. Se consideră integralele $I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{x^2+9}dx,\ n\in\mathbb{N}$.

(5p) a) Să se calculeze $3I_0-2I_1$.

(5p) b) Să se demonstreze că pentru $\forall n\in\mathbb{N}$ este adevărată relaţia $9I_n+I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}$.

(5p) c) Să se arate că $I_n\le\dfrac{1}{n+1},\ n\in\mathbb{N}^*$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Prof. Nicolae Breazu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Fie $(b_n)_n$ o progresie geometrică . Ştiind că $b_3 \cdot b_{17} = 100$, să se calculeze $b_5 \cdot b_{15}$.

(5p) 2. Rezolvaţi ecuaţia $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{2x+19}$.

(5p) 3. Dacă $f:(0;\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x + \frac{1}{x}$, demonstraţi că $f \circ f(x) \geq 2$, $(\forall)x \in (0;\infty)$.

(5p) 4. O carte ilustrată are 300 pagini. Dintre acestea, 280 pagini au text, iar 200 au desene.
Câte pagini au şi text şi desen?

(5p) 5. Să se scrie ecuaţia înălţimii dusă din B în triunghiul ABC, dacă A(2;-3); B(10;9) şi C(0;-1).

(5p) 6. Demonstraţi că $\sin x = \dfrac{2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}}$, $(\forall)x \neq 2k$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

(5p) a) Calculaţi detA şi explicaţi de ce matricea A este inversabilă;

(5p) b) Demonstraţi că $A^n + A^{-n} = 2I_3$, $(\forall)n \geq 1$;

(5p) c) Calculaţi $2\left(A + A^{-1}\right)^{2010}$.

2. În grupul $(S_6;\circ)$ se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ şi

$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(5p) a) Determinaţi paritatea sau imparitatea permutărilor σ şi ε;

(5p) b) În grupul $(S_6;\circ)$, stabiliţi care dintre ordinele acestor două permutări este mai mare;

(5p) c) Rezolvaţi ecuaţia $\sigma \circ x = x \circ \pi$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1;-2;-3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

(5p) a) Să se determine A, B, $C\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x+3}$;

(5p) b) Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=f(1)+f(2)+...+f(n)$ este convergent şi să se găsească $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

(5p) c) Să se arate că graficul funcţiei este simetric faţă de un punct al planului şi să se determine coordonatele acestui punct.

2. Se dă funcţia $f:[0;2011]\to\mathbb{R},\ f(x)=\{2x\}$

(5p) a) Să se explice de ce f nu admite primitive dar este funcţie integrabilă pe $[0;2011]$;

(5p) b) Să se calculeze $\int_0^{2011}\{2x\}\,dx$;

(5p) c) Arătaţi că funcţia $F:\left[0;\dfrac{1}{4}\right]\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^x f(t)dt$ este funcţie strict crescătoare pe intervalul $\left[0;\dfrac{1}{4}\right]$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 6

Prof. Nicolae Breazu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze $\left[\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\right]+\left[\dfrac{1}{1+\sqrt[4]{x}}\right]+...+\left[\dfrac{1}{1+\sqrt[2010]{x}}\right]$, pentru $x>0$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a;

(5p) 2. Rezolvaţi ecuaţia $x^{2\lg^3 x-\frac{3}{2}\lg x}=\sqrt{10}$;

(5p) 3. Arătaţi că funcţia $f:(-2;2)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3\cdot\ln\dfrac{2-x}{2+x}$ este funcţie pară;

(5p) 4. Să se demonstreze că $C_n^k = C_{n-2}^{k-2} + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^k$;

(5p) 5. În patrulaterul convex ABCD, M este mijlocul laturii AB, N mijlocul laturii CD iar P, Q, R mijloace ale segmentelor $[AD],[MN]$, respectiv $[BC]$. Arătaţi că P, Q, R sunt puncte coliniare.

(5p) 6. Rezolvaţi ecuaţia $\sin^2 x - \cos^2 x - \cos x = 0$ pentru $x \in [0;2\ )$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & p^2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & p^2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & q \end{pmatrix}$.

(5p) a) Să se afle $p \in \mathbb{R}$ astfel încât detA să fie minim;

(5p) b) Să se afle p şi q astfel încât rangA= rangB;

(5p) c) Determinaţi p astfel încât matricea A să fie inversabilă şi calculaţi A^{-1}.

2. Fie polinoamele $f = 2x^5 - 4x^3 + ax^2 + bx + c$, cu $a,b,c \in \mathbb{C}$ şi $g = x^3 - x^2 + x - 1$.

(5p) a) Determinaţi a,b,c astfel încât f să se dividă cu polinomul g;

(5p) b) Pentru a=4, b= -6, c=4, să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$;

(5p) c) Calculaţi $S = \sum_{i=1}^{5} x_i^{2010} + \left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^{2010}$ ştiind că x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sunt rădăcinile determinate la punctul b).

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:(1;\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + \ln(x-1)$.

(5p) a) Demonstraţi că f este strict crescătoare pe intervalul $(1;\infty)$;

(5p) b) Stabiliţi intervalele de convexitate, de concavitate şi punctele de inflexiune ale funcţiei f;

(5p) c) Arătaţi că f este bijectivă şi calculaţi derivata funcţiei f^{-1} în $y_0 = 4$.

3. Fie funcţia $f:[0;\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{\cos^2 x + 1}$ şi şirul $(a_n)_{n \ge 1}$, $a_n = \frac{\pi^2}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

(5p) a) Să se calculeze $\int_0^\pi f(x) \sin x dx$;

(5p) b) Să se determine volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei Ox;

(5p) c) Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n \ge 1}$ este convergent şi găsiţi $\lim_{n \to \infty} a_n$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 7

Prof. Nicolae Breazu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se ordoneze crescător numerele $e, \sqrt[3]{2}, \pi, \log_3 2$, unde e este baza logaritmului natural;

(5p) 2. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{C}$ ecuaţia $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$;

(5p) 3. Să se determine inversa funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}-x+3, \text{ pentru } x\in(-2;\infty)\\ x^2+1, \text{ pentru } x\in(-\infty;-2]\end{cases}$;

(5p) 4. Calculaţi $2^{2011} - C_{2011}^{1}\cdot 2^{2010} + C_{2011}^{2}\cdot 2^{2009} - \ldots - 1$;

(5p) 5. Arătaţi că în orice triunghi ABC are loc relaţia $b\cos C - c\cos B = \dfrac{b^2-c^2}{a}$;

(5p) 6. Câte soluţii are ecuaţia $\arcsin(\sin x) = 2$? Justificaţi.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se dă sistemul $\begin{cases} x+2y-3z=0\\ 2x+y+mz=0\\ x+y+2z=0\end{cases}$.

(5p) a) Calculaţi determinantul sistemului;
(5p) b) Determinaţi m astfel încât sistemul să admită soluţie unică;
(5p) c) Arătaţi că pentru m=9 expresia $E=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2-5y^2+z^2}$ este constantă.

2. Se dă mulţimea $G=\left\{X(a,b)=\begin{pmatrix} a & b & b\\ b & a & b\\ b & a & a\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R},\ \det(X(a,b))=1\right\}$.

(5p) a) Arătaţi că G este parte stabilă a lui $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor;
(5p) b) Explicaţi de ce $I_3 \in G$ dar $O_3 \notin G$;
(5p) c) Arătaţi că $(G;\bullet)$ este grup.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{|1-x|}$.

(5p) a) Să se studieze derivabilitatea funcţiei f în $x_0=1$;

(5p) b) Determinaţi punctele de extrem şi intervalele de monotonie ale funcţiei f;

(5p) c) Să se rezolve ecuaţia $f(x)=m$, unde $m\in\mathbb{R}$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+4x+5}$ şi $a\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Calculaţi $\int_0^1 f(x)dx$;

(5p) b) Să se determine valorile lui a, astfel încât aria subgraficului funcţiei f pe intervalul $[a-1;a]$ să fie maximă;

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{s(a)}{\ln a}$, unde s(a) reprezintă aria suprafeţei cuprinse între graficul funcţiei şi axa Ox, pe intervalul $[a-1;a]$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 8

Prof. Nicolae Breazu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se arate că numărul $\sqrt{9-\sqrt{80}}-\sqrt{9+\sqrt{80}}$ este întreg;

(5p) 2. Rezolvaţi ecuaţia $x^x-x^{-x}=3\left(1+x^{-x}\right)$ în mulţimea numerelor întregi;

(5p) 3. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x-1|+|x+1|$ nu este nici injectivă, nici surjectivă;

(5p) 4. Într-o urnă sunt 30 bile albe şi 20 bile negre. Se extrag simultan 5 bile. Care este probabilitatea de a extrage 3 bile albe şi 2 bile negre?

(5p) 5. Să se calculeze $\sin\dfrac{13}{12}$;

(5p) 6. Două înălţimi ale unui triunghi sunt egale cu 6 şi cu 10. Arătaţi că a treia înălţime este mai mică decât 15.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră şirul de determinanţi: $\{\Delta_n\}_{n\geq 1}$ definit astfel:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & x\end{vmatrix};\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & x & 1\\ 1 & 1 & x\end{vmatrix};\ \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & x & 1 & 1\\ 1 & 1 & x & 1\\ 1 & 1 & 1 & x\end{vmatrix};....;\ \Delta_n=\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 1 & ... & 1\\ 1 & x & ... & 1\\ .. & .. & ... & ..\\ 1 & 1 & ... & x\end{vmatrix}}_{n+1 \text{ coloane}},$$

unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

(5p) a) Calculaţi Δ_2 şi Δ_3;

(5p) b) Demonstraţi că dacă $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, fixat, şirul $\{\Delta_n\}_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică. Găsiţi raţia acestei progresii;

(5p) c) Dacă $p\in\mathbb{N}$, număr prim, iar $x\in\mathbb{N}$ astfel încât x-1 şi p sunt prime între ele, arătaţi că

în şirul $\{\Delta_1-1,\Delta_2-1,...,\Delta_n-1,...\}$ există cel puţin un termen divizibil cu p.

2. Polinomul $f=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n\in\mathbb{R}[X]$ are printre rădăcini şi numerele complexe $z_k=\cos\frac{2k}{5}+i\sin\frac{}{5},\ k\in\{0,1,2,3,4\}$. Polinomul $g\in\mathbb{R}[X]$ are rădăcinile $w_k=z_k-1,\quad k\in\{0,1,2,3,4\}$.

(5p) a) Calculaţi $a_0+a_1+...+a_n$;

(5p) b) Determinaţi polinomul g;

(5p) c) Care este gradul minim pe care îl poate avea f, astfel încât f şi g să aibă divizori comuni de grad cel puţin 1?

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se dau şirul $a_n=\frac{1}{e+1}+\frac{1}{e^2+1}+...+\frac{1}{e^n+1}$, $n\geq 1$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(e^x+1)$.

(5p) a) Să se arate că şirul $(a_n)_n$ este monoton;

(5p) b) Să se aplice teorema lui Lagrange funcţiei f pe un interval de forma $[k,k+1]$, unde $k\geq 0$;

(5p) c) Să se arate că şirul $(a_n)_n$ este convergent şi să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\in(0;\ln 2]$.

2. Fie $f:[0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(t)=\ln(t^2+1)$ şi $F:[0;\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

(5p) a) Arătaţi că $F(x)>0$ pentru orice $x>0$;

(5p) b) Să se demonstreze că derivata funcţiei F este strict crescătoare pe $[0;\infty)$;

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}\int_0^x\ln(t^2+1)dt$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 9

Prof. Delia Valentina Bulgăr

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se ordoneze crescător numerele: $3!, \sqrt[3]{200}, \log_3 243$.

(5p) 2. Să se arate că $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\geq\frac{9}{a+b}, \forall a>0, b>0$.

(5p) 3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\lg(x^2-6x+5)-\lg(3-x)=\lg 3$.

(5p) 4. Câte submulţimi ale mulţimii A={1,2,3,4,5,6,7,8} au suma elementelor egală cu 8?

(5p) 5. Se consideră punctele A(m+1,n), B(2m,n+2), C(2n+1,m). Să se determine m şi n ştiind că centrul de greutate al triunghiului ABC este originea sistemului de coordonate XOY.

(5p) 6.Ştiind că $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ şi $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, să se calculeze $ctg\alpha$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $X(a)=\begin{pmatrix}1+5a & 10a\\ -2a & 1-4a\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}), a\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(ab+a+b), \forall a,b\in\mathbb{R}$

(5p) b) Să se determine valoarea $a\in\mathbb{R}$ pentru care X(a) nu este inversabilă.

(5p) c) Să se calculeze $(X(a))^n, n\geq 1$

2. Se consideră polinomul $f=(X^2+X+1)^{2011}+(X+1)^{2010}-1\in\mathbb{C}[X]$

(5p) a) Să se calculeze f(0) şi f(-1).

(5p) b) Să se determine restul împărţirii polinomului f la polinomul $g=X^2+X$.

(5p) c) Să se arate că polinomul $h=X^2+X+1$ divide polinomul f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}$

(5p) a) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(5p) b) Să se determine asimptotele graficului funcţiei f.

(5p) c) Să se arate că funcţia f este mărginită..

2. Se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n(x)\dfrac{x}{e^{2^n\cdot x}},n\in\mathbb{N}$ şi $I_n=\int_0^{\frac{1}{2^n}} f_n(x)dx$.

(5p) a) Să se calculeze I_0.

(5p) b) Să se verifice relaţiile $f_{n+1}(x)=\dfrac{1}{2}f_n(2x),\forall x\in\mathbb{R}$ şi $I_{n+1}=\dfrac{1}{4}I_n,n\in\mathbb{N}$

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, unde $S_n=I_0+I_1+I_2+...+I_n,n\in\mathbb{N}$

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 10

Prof. Delia Valentina Bulgăr

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze modulul numărului complex $z=(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}})^6$.

(5p) 2. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1=33$. Ştiind că suma primilor 10 termeni ai progresiei este 420, să se afle raţia progresie aritmetice.

(5p) 3. Să se determine $n\in\mathbb{N},n\geq 4$ astfel încât $C_{n-2}^2=21$.

(5p) 4. . Să se rezolve în intervalul $(0,2\pi)$ ecuaţia $\sin 2x=\dfrac{1}{2}$.

(5p) 5. Triunghiul ABC are vârfurile A(2,3), B(4,2) şi centrul de greutate G(3,-1). Să se determine coordonatele punctului C.

(5p) 6. Să se arate că $tg15^\circ\cdot tg35^\circ\cdot tg55^\circ\cdot tg75^\circ=1$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie în $M_3(\mathbb{R})$ matricele: $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

Se consideră matricea $M_x=\dfrac{x}{3}\cdot A+\dfrac{1}{3x^2}\cdot B,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(5p) a) Să se calculeze A^2 şi B^2.

(5p) b) Să se arate că $M_x\cdot M_y=M_{xy},\forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(5p) c) Să se calculeze $(M_x)^n,n\geq 1$.

2. Fie $a,b,c \in \mathbb{R}$ şi $H = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 + az^2 + bz + c = 0\}$.

(5p) a) Dacă a=b=c+1=0 să se determine mulţimea H.

(5p) b) Dacă a=b=c+1=0 să se arate că (H,·) este grup.

(5p) c) Pentru a=b=c+1=0 să se arate că $(H,\cdot) \simeq (\mathbb{Z}_3,+)$, unde $(\mathbb{Z}_3,+)$ este grupul aditiv al claselor de resturi modulo n.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţiile $f,g:[0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$ şi $g(x) = 2x^{n+1} - (n+1)x^2 + n - 1, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

(5p) a) Să se verifice că $f'(x) = nx^{n-2}g(x), x \geq 0.$

(5p) b) Să se arate că $g(x) \geq 0, \forall x \geq 0.$

(5p) c) Să se arate că $x^n - \frac{1}{x^n} \geq n(x - \frac{1}{x}), \forall x \geq 1, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

2. Se consideră şirurile $(I_n)_{n\geq 1}$ şi $(J_n)_{n\geq 1}$ definite astfel: $I_n = \int_1^e x^n \ln x dx$ şi $J_n = \int_1^e x^n (\ln x)^2 dx$.

(5p) a) Să se calculeze I_n .

(5p) b) Să se stabilească o relaţie între I_n şi J_n .

(5p) c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n - J_n}{e^{n+1}}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 11

Prof. Delia Valentina Bulgăr

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Se consideră $a = \log_7 35 + \log_7 9 - \log_7 45$. Să se arate că $a \in \mathbb{N}$.

(5p) 2. Să se determine $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ pentru care funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (m-2)x^2 + 2mx + m$ admite un maxim egal cu -1.

(5p) 3. Să se determine termenul din mijloc al dezvoltării $(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^{20}, x > 0, x \in \mathbb{R}$.

(5p) 4. Care este numărul de diagonale ale unui poligon convex cu n laturi?

www.mateinfo.ro

(5p) 5. Fie A,B două puncte distincte, iar punctul M mijlocul segmentului [AB]. Să se arate că pentru orice punct O există egalitatea $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$.

(5p) 6. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris într-un triunghi care are lungimile laturilor de 5, 7 şi 8.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 5x+3y+z=0 \\ x+3y+5z=0 \end{cases}$ şi matricea $O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se notează cu A matricea sistemului.

(5p) a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(5p) b) Să se rezolve sistemul.

(5p) c) Să se găsească o matrice $B\in M_3(\mathbb{R}), B\neq O_3$ astfel încât $A\cdot B=O_3$

2. Se consideră mulţimea de numere reale $M=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}, a^2-2b^2=1\}$.

(5p) a) Să se arate că M este parte stabilă în raport cu înmulţirea numerelor reale.

(5p) b) Să se arate că dacă $z\in M$ atunci $z\neq 0$ şi $\frac{1}{z}\in M$.

(5p) c) Să se găsească un element $z\in M$ astfel încât $0<z<\frac{1}{10}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}-1$.

(5p) a) Să se rezolve inecuaţia f(x)<x.

(5p) b) Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei f.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to -1}(-f(x))^{\frac{1}{x^2-1}}$.

2. Se consideră $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx, n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) a) Să se arate că $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}, \forall n\geq 2$.

(5p) b) Să se arate că $I_{2n}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{\pi}{2}$ şi $I_{2n+1}=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 12

Prof. Delia Valentina Bulgăr

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze partea întreagă a numărului $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$.

(5p) 2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x^2-x+1}$. Să se arate că $0\le f(x)\le\frac{4}{3},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

(5p) 3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\cdot 49^x=35^x+25^x$.

(5p) 4. Care este probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, produsul cifrelor sale să fie impar?

(5p) 5. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}=(a+3)\vec{i}+a\vec{j}$ şi $\vec{v}=4\vec{i}-5\vec{j}$ sunt perpendiculari.

(5p) 6. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC, ştiind că AB=3, AC=4 şi $m(\sphericalangle BAC)=60^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $\sigma,\tau\in S_5, \sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&4&1&3\end{pmatrix}, \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$.

(5p) a) Să se demonstreze că $\sigma\tau\neq\tau\sigma$.

(5p) b) Să se determine mulţimea $H=\{\sigma^n \mid n\in\mathbb{N}^*\}$

(5p) c) Să se arate că mulţimea $H=\{\sigma^n \mid n\in\mathbb{N}^*\}$ este un subgrup al grupului $(S_5,\cdot)$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ şi polinomul $f=X^3+aX+\hat{3}\in\mathbb{Z}_5[X]$, cu $a\in\mathbb{Z}_5$.

(5p) a) Pentru $a=\hat{1}$ să se determine rădăcinile polinomului f.

(5p) b) Să se determine $a\in\mathbb{Z}_5$ pentru care polinomul f admite două rădăcini diferite în $\mathbb{Z}_5$.

(5p) c) Notând cu $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{Z}_5$ rădăcinile polinomului f, să se calculeze $S=x_1^3+x_2^3+x_3^3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-ax+b}},\ a,b\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Pentru a=b=1, să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1.

(5p) b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-ax+b}\,(f(x)-1)=\frac{1}{2}$.

(5p) c) Pentru a=1, să se determine $b \in \mathbb{R}^*$ astfel încât funcţia f să admită un extrem de valoare $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 0}$ definit prin $I_n = \int\limits_{e^{\frac{n+1}{2}}}^{e^{\frac{n+2}{2}}} \frac{2\ln x - 1}{x}dx$ şi suma $S_n = I_0 + I_1 + ... + I_n, n \in \mathbb{N}$

(5p) a) Să se calculeze I_0.

(5p) b) Să se arate că $(I_n)_{n\geq 0}$ este o progresie aritmetică , precizând raţia.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4S_n}{n^2}\right)^{n+1}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 13

Prof. Canache Georgiana

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine numărul natural x din egalitatea 2 + 7 + ...+ x =245.

(5p) 2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia : $\frac{x-7}{x+1}+\frac{2x+1}{x-4}=3$.

(5p) 3. Aflaţi valoarea minimă a funcţiei f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f(x)=5x^2 -3x+1 .

(5p) 4. Să se determine numărul funcţiilor f:{a,b,c,d} $\to$ {1,2,3,4} cu proprietatea că f(a)=f(b).

(5p) 5. Se consideră triunghiul ABC cu vârfurile A(2, -1) , B(0,3) şi C(-4, -2). Să se calculeze cos A.

(5p) 6.Calculaţi E= $\frac{tg\alpha + 4ctg\alpha}{ctg\alpha - 3tg\alpha}$, dacă $\cos\alpha = \frac{1}{3}, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(5p) a) Calculaţi A^2-3A^t

(5p) b) Calculaţi inversa matricei A.

(5p) c) Determinaţi A^n

2. Se consideră $(\mathbb{Z},*,\circ)$ inel comutativ ,unde $x*y=x+y-4$ si $x\circ y=xy-4x-4y+20$,$(\forall)x,y\in\mathbb{R}$

(5p) a) Calculaţi $(e_1*e_2)+(e_1\circ e_2)$,unde e_1 este elemental neutru al primei legi ,iar e_2 este elementul neutru al celei de a doua legi.

(5p) b) Să se determine a,b $\in\mathbb{Z}$ astfel încât inelele $(\mathbb{Z},*,\circ)$ si $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ să existe un izomorfism de forma f : $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, f(x)=ax+b

(5p) c) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $\underbrace{x\circ x\circ.............\circ x}_{de\,2011\,ori}=2^{2011}+4$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia f : (-4,4)-> $\mathbb{R}$ f(x)= $\ln\frac{4+x}{4-x}$

(5p) a) Găsiţi asimptotele funcţiei f.

(5p) b) Să se determine punctele de extrem ale graficului funcţiei f.

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot f(\frac{1}{x})$

2. Se consideră funcţia f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ f(x)=x^3+6x^2-x-30

(5p) a) Calculaţi $\int_3^4\frac{f(x)}{x-2}dx$

(5p) b) Calculaţi $\int_{-1}^0\frac{x^2+2x+3}{x^3+6x^2-x-30}dx$

(5p) c) Calculaţi $\int_0^1\frac{x^2}{x^6-4}dx$

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 14

Prof. Canache Georgiana

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Ordonaţi descrescător numerele $\sqrt{5}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{6}$

(5p) 2. Se dă ecuaţia $x^2-(3m+1)x+m^2-m=0$, $m\in\mathbb{R}$. Calculaţi expresia $E(m)=x_1^2+x_2^2-x_1-x_2$, unde $x_1$si x_2 sunt rădacinile ecuaţiei.

(5p) 3. Să se determine inversa funcţiei $f:(3,\infty)\to(0,\infty)$ $f(x)=1+\log_2(x-3)$

(5p) 4. Câte numere de 2 cifre se pot forma cu elemente ale mulţimii {1,2,3,4,6} ?

(5p) 5. Aflaţi $m\in\mathbb{R}$ astfel încât distanţa dintre punctele $A(m+1,5)$ şi $B(3,m-3)$ să fie de $5\sqrt{2}$.

(5p) 6. Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC ştiind că $m(\sphericalangle B)=\frac{\pi}{4}$ şi AC=8.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie mulţimea G= $\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ a & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$

(5p) a) Calulaţi $M(1,2)\cdot M(2,3)$

(5p) b) Să se arate că $I_3\in G$

(5p) c) Calculaţi inversa matricei M(a,b)

2. Se consideră $a\in\mathbb{Z}_4$ şi polinomul $f=x^3+\hat{3}x^2+x+a\in\mathbb{Z}_4[x]$

(5p) a) Calculaţi $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})+f(\hat{3})$,pentru $a=\hat{2}$

(5p) b) Pentru $a=\hat{3}$, să se determine rădăcinile din $\mathbb{Z}_4$ ale polinomului f.

(5p) c) Aflaţi $a\in\mathbb{Z}_4$ pentru care polinomul este ireductibil în $\mathbb{Z}_4[x]$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie functia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=4x^2-3x+2\operatorname{arctg} x$

(5p) a) Studiaţi monotonía funcţiei f pe $\mathbb{R}$.

(5p) b) Verificaţi dacă f este funcţie bijetivă.

(5p) c) Calculaţi $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$

2. Se dă funcţia f : [-2,2] -> ℝ $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

(5p) a) Calculaţi $\int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}dx$

(5p) b) Aflaţi volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei ox

(5p) c) Calculaţi $\lim_{x\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx$

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 15

Prof. Canache Georgiana

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Arătaţi că numărul $(1-3i\sqrt{2})^2+(1-3i\sqrt{2})^2$ este număr întreg .

(5p) 2. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=8 \end{cases}$

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale $\sqrt[3]{x^3+6x^2+7x-5}=x$

(5p) 4. Aflaţi m $\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}=(m+2)\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\vec{v}=(m-5)\vec{i}+3\vec{j}$ să fie coliniari.

(5p) 5. Aflaţi numărul termenilor raţionali ai dezvoltării $\left(2+\sqrt[3]{5}\right)^{11}$

(5p) 6. Se consideră punctele A(5,-2) şi B(1,3) . Să se scrie ecuaţia mediatoarei segmentului AB.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie dreptele d_1: 2x-y=5 , d_2: x+4y=-2 şi d_3: x+y=m , unde m $\in\mathbb{R}$

(5p) a) Aflaţi m $\in\mathbb{R}$ astfel încât dreptele sa fie concurente.

(5p) b) Aflaţi m $\in\mathbb{R}$ astfel încât coordonatele triunghiului format de cele 3 drepte au toate coordonatele întregi.

(5p) c) Să se calculeze valorile lui m $\in\mathbb{R}$ pentru care triunghiul determinat de cele 3 drepte pentru m=-2.

2.Se consideră ecuaţia $x^3+mx^2+5x+n=0$ m,n $\in\mathbb{R}$ şi x_1,x_2,x_3 soluţiile complexe ale acesteia.

(5p) a) Pentru m=2 si n=0 aflaţi x_1,x_2,x_3

(5p) b) Aflaţi m şi n ştiind că x_1= 2+i.

(5p) c) Calculaţi $x_1^3+x_2^3+x_3^3$, unde m,n $\in \mathbb{R}$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se dă funcţia f: $\mathbb{R}/\{-2,0\} \to \mathbb{R}$ $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2\cdot(x+2)^2}$

(5p) a) Determinaţi asimptotele graficului funcţiei f .

(5p) b) Stabiliţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}(f(1)+f(2)+.......+f(n))^{n^2}=$

2. Se consideră funcţiile f : (-2 , ∞) $\to \mathbb{R}$ $f(x)=\dfrac{3x}{(x+2)(x^2+2)}$ şi F: (-2 , ∞)-> $\mathbb{R}$

F(x)=a$\cdot$ln(x+2)+b$\cdot$ln(x^2+2)+c$\cdot$arctg$\dfrac{x}{2}$, a, b, c $\in \mathbb{R}$

(5p) a) Aflaţi a,b,c $\in \mathbb{R}$ astfel încât F o primitivă a lui f .

(5p) b) Calculaţi $\int_0^1 f(x)dx$

(5p) c) Stabiliţi monotonia funcţiei F ,în cazul în care F este o primitivă a lui f.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 16

Prof. Canache Georgiana

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Arătaţi că numărul $\dfrac{13}{2-3i}+\dfrac{13}{2+3i}$ este număr natural.

(5p) 2. Să se determine m$\in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia f: $\mathbb{R} -> \mathbb{R}$ f(x)=(3m^2-15)x+7 să fie funcţie strict crescătoare.

(5p) 3. Să se determine valorile lui n pentru care $4\cdot C_n^1+2\cdot C_n^2=10$

(5p) 4. Care este valoarea sumei $1\cdot2+2\cdot3+...........+n\cdot(n+1)$?

www.mateinfo.ro

(5p) 5. Aflaţi coordonatele simetriului punctului A(-2,1) faţă de mijlocul segmentului [BC] , unde B(1,-5) şi C(-3,-3).

(5p) 6. Aflaţi m $\in \mathbb{R}$ astfel încât punctele A(3,-2) , B(2,5) şi C(3m,m-1) să fie coliniare.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie m $\in \mathbb{R}$ şi $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & m & -1 \\ 2m+3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(5p) a) Calculaţi determinantul matricei A.

(5p) b) Să se afle m $\in \mathbb{R}$ astfel încât matrice A sa fie inversabilă .

(5p) c) Aflaţi m $\in \mathbb{R}$ astfel încât $A^{-1} = -A^{*}$

2. Se consideră mulţimea G $\subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, $G=\{\begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} | a,b \in \mathbb{Q}, a^2-5b^2=1\}$

(5p) a) Arătaţi că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

(5p) b) Aflaţi un element A $\in G$ astfel încât b $\neq 0$

(5p) c) Să se arate că mulţimea G conţine o infinitate de elemente.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-\frac{5}{4}\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x+7}{4x+5}$

(5p) a) Determinaţi asimptotele funcţiei f.

(5p) b) Să se determine limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, a_n=f(1)f(2)... f(n).

(5p) c) Să se determine puntele de inflexiune ale graficului funcţiei g: $\mathbb{R} -> \mathbb{R}$, g(x)=f(e^x).

2. Fie funcţiile g,G : $(-\infty, \frac{4}{5}) \to \mathbb{R}$ unde g(x)=x$\sqrt{4-5x}$ şi G(x)= $(ax^2+bx+c)\sqrt{4-5x}$ şi a,b,c $\in \mathbb{R}$

(5p) a) Aflaţi a,b şi c astfel încât G să fie o primitivă a lui g.

(5p) b) Studiaţi convexitatea/ concavitatea funcţiei G penrtu a,b şi c aflate la punctul a.

(5p) c) Calculaţi $\int_{-3}^{-2} G(x)g(x)dx$

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 17

Prof. Viorica Ciocănaru

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi modulul numărului complex z = $(1+i)(1-i\sqrt{3})$.
(5p) 2. Rezolvaţi ecuaţia $x^3 + 4x^2 - 2x - 8 = 0$.
(5p) 3. Exprimaţi în funcţie de a = $\log_{12} 27$, $\log_6 16$.
(5p) 4. Determinaţi b_{21} în progresia geometrică în care $b_3 = 2$ şi $b_5 = C_4^2$.
(5p) 5. Scrieţi ecuaţia medianei dusă prin vârful A(2, 5) al triunghiului ABC unde B(-3, 2) şi C(5, -4).
(5p) 6. Calculaţi $\frac{\cos\alpha + \cos 7\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$ pentru $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea A = $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}$ unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3 + ax + b = 0$, $a,b \in \mathbf{R}$. Se notează cu $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$, $\forall\ k \in \mathbf{N}^*$ şi D = det A.

(5p) a) Calculaţi S_2, S_3, S_4 în funcţie de a şi b.
(5p) b) Arătaţi că $S_{k+3} + a S_{k+1} + b S_k = 0$, $\forall\ k \in \mathbf{N}$.
(5p) c) Arătaţi că rădăcinile x_1, x_2, x_3 sunt reale dacă şi numai dacă $D^2 \geq 0$.

2. Fie G = (-1, 1) şi legea de compoziţie "$\circ$" definită pe G, $x \circ y = \frac{x+y}{xy+1}$, $\forall\ x, y \in G$.

(5p) a) Arătaţi că legea este comutativă şi asociativă.
(5p) b) Determinaţi elemental neutru, *e*.
(5p) c) Determinaţi mulţimea elementelor simetrizabile.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ şi funcţia g: $\mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

(5p) a) Calculaţi f'(x) şi determinaţi asimptotele G_f.
(5p) b) Calculaţi $g^{(n)}(x)$.
(5p) c) Arătaţi că $(f\,g)^{(n)}(x)(x^2+1) + 2n\,(f\,g)^{(n-1)}(x)\,x + n\,(n-1)\,(f\,g)^{(n-2)}(x) = 0$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 0}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+2}dx$, $n \in \mathbf{N}$.

(5p) a) Determinaţi I_0 şi I_1 şi stabiliţi o legătură între I_0 şi I_1.
(5p) b) Calculaţi $I_n + 2I_{n-1}$, $\forall\ n \in \mathbf{N}^*$.
(5p) c) Studiaţi monotonia şi mărginirea şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 18

Prof. Viorica Ciocănaru

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi $|z|$ şi $\bar{z}$ pentru $z = (2+i)^4$.
(5p) 2. Calculaţi probabilitatea ca un element din mulţimea $\{A_3^1, C_5^4, P_3, C_5^2, A_4^2\}$ să verifice relaţia
$2^n < 10n + 1$.
(5p) 3. Rezolvaţi inecuaţia $\log_{0,25}\left(\log_7 \frac{x^2-5x}{x+4}\right) > 0$.
(5p) 4. Determinaţi suma vectorilor $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$ şi produsul lor scalar.
(5p) 5. Triunghiul ABC are vârfurile A(-2, 6), B(-5, 2), C(3, - 4). Scrieţi ecuaţia înălţimii din A şi aria triunghiului.
(5p) 6. Arătaţi că dacă într-un triunghi ABC are loc relaţia $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$, atunci triunghiul este dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ şi $B = pA + I_4$, unde $p \in \mathbf{R}$.

(5p) a) Verificaţi că $2B - B^2 = I_4$.
(5p) b) Arătaţi că B este inversabilă $\forall\ p \in \mathbf{R}$ şi calculaţi inversa ei.
(5p) c) Arătaţi că $B^n = I_4 + npA$, $\forall\ n \in \mathbf{N}^*$ şi $\forall\ p \in \mathbf{R}$.

2. Pe $\mathbf{Z}$ se defineşte legea de compoziţie "$\perp$" astfel: $x \perp y = x + ay - a$, $\forall\ x, y \in \mathbf{Z}$.

(5p) a) Determinaţi $a \in$ **Z** astfel încât legea “$\perp$” să fie asociativă.
(5p) b) Determinaţi a şi $e \in$ **Z** astfel încât x $\perp$ e = e $\perp$ x = x, $\forall$ x$\in$ **Z** şi calculaţi $a \perp a$.
(5p) c) Arătaţi că (**Z**, $\perp$) este grup abelian.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia f: **R** $\to$**R**, f(x) = arc tg x – 2x.
(5p) a) Calculaţi f (1), f’(1).
(5p) b) Studiaţi monotonia funcţiei şi curbura ei.
(5p) c) Determinaţi asimptota la graficul funcţiei către + ∞.

2. Se consideră funcţia f: [0, 1]$\to$**R**, f(x) = $\frac{1}{x^2+5x+6}$ şi se defineşte şirul $(I_n)_{n\geq 0}$ prin

$I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$, n$\in$ **N**.

(5p) a) Determinaţi I_0 şi I_1.
(5p) b) Calculaţi $I_{n+2} + 5\, I_{n+1} + 6\, I_n$, $\forall$ n$\in$ **N**.
(5p) c). Determinaţi o primitivă a funcţiei f care trece prin M(1, $\frac{1}{2}$ ln $\frac{3}{4}$).

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 19

Prof. Viorica Ciocănaru

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinaţi n $\in$ **N** astfel încât să aibă loc relaţia $A_{n+4}^2 > C_{n+4}^3$.
(5p) 2. Ordonaţi descrescător numerele $\log_6 36$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt[4]{48}$.
(5p) 3. Calculaţi probabilitatea ca alegând un element α din mulţimea $\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi\}$, $\cos\alpha \in$ **Q**?
(5p) 4. Să se găsească termenii dezvoltării $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^8$astfel încât puterea lui x > 0 să fie număr natural.
(5p) 5. Rezolvaţi ecuaţia $z^5 = 1$ unde z $\in$ **C** cu ajutorul formei trigonometrice a unui număr complex.

(5p) 6. Aflaţi perimetrul şi aria triunghiului ABC cu vârfurile A(-2, -6), B(-1, 3), C(3, 6).

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul $\begin{cases} t_1 x + t_2 y + t_3 z = m \\ t_2 x + t_3 y + t_1 z = n \\ t_3 x + t_1 y + t_2 z = p \end{cases}$ unde t_1, t_2, t_3 sunt rădăcinile complexe ale ecuaţiei $t^3 + m t^2 + n t + p = 0$.

(5p) a) Aflaţi m, n, p dacă $t_1 = 1$, $t_2 = -1$, $t_3 = 2$.

(5p) b) Rezolvaţi sistemul dacă m = n = p = 1.

(5p) c) Pentru $m \neq 0$, ecuaţia $t^3 + m t^2 + n t + p = 0$ admite rădăcină triplă nenulă dacă şi numai dacă sistemul este incompatibil.

2. Fie inelele comutative ($\mathbf{Z}$, $*$, $\bullet$) şi ($\mathbf{Z}$, $\perp$, $\top$), unde $x * y = x + y - 4$, $x \perp y = x + y - 7$, $x \bullet y = xy - 4(x + y) + 20$, $x \top y = xy - 7(x + y) + 56$, $\forall$ x, y $\in$ $\mathbf{Z}$.

(5p) a) Aflaţi elementele neutre ale celor două inele.

(5p) b) Determinaţi elementele simetrizabile ale celor două inele.

(5p) c) Arătaţi că funcţia f: $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, f(x) = x + 3 stabileşte un izomorfism între inelele ($\mathbf{Z}$, $*$, $\bullet$) şi ($\mathbf{Z}$, $\perp$, $\top$).

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia f: $\mathbf{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x + 5}{x^2 - 1}$.

(5p) a) Determinaţi rădăcinile ecuaţiei f(x) = 0.

(5p) b) Determinaţi ecuaţiile asimptotelor la G_f.

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{f(x)}{x} \right)^{\frac{x^3+1}{2x}}$.

2. Se consideră funcţia f: $R \setminus \{-5, 0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x(x+5)}$.

(5p) a) Să se calculeze $\int_1^n f(x)\,dx$, $n \geq 2$, $n \in$ **N.**

(5p) b) Dacă se notează integrala de la a) cu I_n, să se determine $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

(5p) c) Fără a calcula efectiv integrala, să se arate că $\dfrac{1}{3} \leq \int_4^7 x(x-3) f(x)\,dx \leq 1$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 20

Prof. Ciocănaru Viorica

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinaţi modulul şi conjugatul numărului complex $\frac{2+3i}{3-2i}$.
(5p) 2. Găsiţi coeficientul lui x^4 în dezvoltarea $(x- 2x^2 + 1)^5$.
(5p) 3. Determinaţi suma vectorilor $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ şi cosinusul unghiului format de $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ ştiind că
$\vec{v}_n = \frac{2n+1}{n^2+n+1}\vec{i} + \frac{n^2-1}{n^2+n+1}\vec{j}$, $\forall$ $n\in$ **N.**
(5p) 4. Aflaţi partea întreagă a numărului $\log_6 2011$.
(5p) 5. Calculaţi $bc\cos^2 A/2 + ac\cos^2 B/2 + ab\cos^2 C/2$.
(5p) 6. Determinaţi raportul S_a / S_g unde S_a este suma primilor 101 termeni ai unei progresii aritmetice
şi S_g este suma primilor 80 termeni ai unei progresii geometrice, ambele progresii având primul
termen 5 şi raţia 0,2.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea M = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(5p) a) Calculaţi M^2, M^3, Tr M.
(5p) b) Arătaţi că M^n se scrie sub forma $M^n = \begin{pmatrix} 1 & x_n & y_n \\ 0 & 1 & x_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n\in$ **N**, calculaţi x_n, y_n.
(5p) c) Calculaţi M_{13}, M_{23}, M_{21} (complemenţii algebrici) şi M^{2011}.

2. Se consideră sistemul $\hat{2}x+\hat{3}y+\hat{3}z=\hat{2}$, $\hat{6}x+\hat{4}y+\hat{2}z=\hat{6}$, $\hat{3}x+\hat{2}y+\hat{4}z=\hat{3}$.
(5p) a) Calculaţi determinantul matricei sistemului în inelul $\mathbf{Z_{12}}$ şi în inelul $\mathbf{Z_7}$.
(5p) b) Determinaţi elementele inversabile în inelul $\mathbf{Z_{12}}$ în raport cu înmulţirea şi calculaţi probabilitatea ca alegând un element din $\mathbf{Z_{12}}$, acesta să fie inversabil.
(5p) c) Rezolvaţi sistemul în inelul $\mathbf{Z_{12}}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţiile f, g: **R** $\to$**R,** f(x) = $\sum_{k=1}^{n} p_k \cos kx$ şi g(x) = $\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{k} \sin kx$, n$\in$ **N**\ {0, 1},

unde $p_k \in$ **R**, k$\in$ {1, 2, 3, ...}.

(5p) a) Calculaţi g'(x), g"(x), f(0) şi g(0) .

(5p) b) Arătaţi că dacă f(x) $\geq$ 0, $\forall$ x$\in$ **R**, atunci g(x) este nulă $\forall$ x$\in$ **R**.

(5p) c) Calculaţi g (kπ), $\forall$ k$\in$ **Z** şi $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x}$.

2. Se consideră funcţiile f: (1, ∞)$\to$**R**, f(x) = $\frac{1}{x(1+\ln x)}$, g: **R** $\to$**R**, g(x) = $e^x(2e^x - 3)$ şi

h: (0, ∞)$\to$**R**, h(x) = $\frac{1}{x}$(2 ln x – 3). Determinaţi:

(5p) a) primitiva F a funcţiei f cu proprietatea $F(e^{e-1}) = 2$.

(5p) b) t $\in$ **R** astfel încât $\int_0^t g(x)\,dx = 0$.

(5p) c) t > 0 astfel încât $\int_{e^2}^t h(x)\,dx = 0$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 21

Prof. Andrei Octavian Dobre

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Soluţia ecuaţiei (x+1)+(x+4)+(x+7)+...+(x+28)=155

(5p) 2. Să se simplifice expresia $\frac{2n!+(2n)!}{(n+1)(n+2)+...(2n-2)(2n-1)2n+2}$

(5p) 3. Rezolvaţi ecuaţia $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=5$

(5p) 4. Dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2012x+1$, are inversa $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, să se calculeze g(2012)

(5p) 5. Fie punctele A(0,2), B(4,6), C(8,10) . Daca punctul A' este simetricul lui A faţă de BC, aflaţi lungimea segmentului AA'.

(5p) 6. În triunghiul ABC avem BC=4, AC=2 si AB = 6. Dacă M este mijlocul segmentului [BC] aflaţi $m(\sphericalangle BAM)$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases}$

(5p) a) Aflaţi detA
(5p) b) Daca a=b si $a \neq c$ aflati rangul matricei A
(5p) c) Daca a=b=d si $a \neq c$ rezolvaţi sistemul

2. Pe multimea G = (0,1) se defineste legea de compozitie asociativă
$x*y=\dfrac{xy}{2xy-(x+y-1)}$

(5p) a) Aratati ca (G,*) este monoid
(5p) b) Calculati $\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*...*\frac{1}{2012}$
(5p) c) Calculati $\underbrace{x*x*...*x}_{de-n-ori}$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+x^2+6}{x^{2n}+x^2+4}, x\in\mathbb{N}$
(5p) a) Aflaţi $f(x)$ pentru $|x|<1$
(5p) b) Studiaţi continuitatea funcţiei in $x_0=1$ si $x_0=-1$
(5p) c) Studiaţi convexitatea şi concavitatea funcţiei

2. Fie $I_n=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$, $n\in\mathbb{N}^*$
(5p) a) Calculaţi I_2
(5p) b) Arătaţi că $I_n=\dfrac{2n}{2n+1}\cdot I_{n-1}$
(5p) c) Calculaţi suma $S_n=C_n^0-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{5}C_n^2-\frac{1}{7}C_n^3+...+(-1)^n\cdot\dfrac{1}{2n+1}\cdot C_n^n$

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 22

Prof. Andrei Octavian Dobre

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Fie dezvoltarea $(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4})^n$. Dacă diferenţa dintre coeficientul termenului al treilea al dezvoltarii şi coeficientul termenului al doilea al dezvoltarii este 44 atunci aflaţi termenul din această dezvoltare care nu îl conţine pe x

(5p) 2. Aflaţi $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z^2+\overline{z^2}+z-1-i=0$

(5p) 3. Rezolvati ecuatia $[x^2+x+1]=x^2-x-1$

(5p) 4. Fie ecuaţia $2x^2-2mx+7-4m=0$. Să se arate că pentru soluţiile ecuaţiei verifică egalitatea $(x_1-2)^2+(x_2-2)^2=1+m$

(5p) 5. Fie AB si CD doua coarde perpendiculare ale unui cerc cu centrul O. Dacă $AB \cap CD=\{P\}$, să se arate că: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PO}$

(5p) 6. Dacă în triunghiul ABC ştim b=2, c=6 şi lungimea bisectoarei din A este de 4 cm, aflaţi $\cos\frac{A}{2}$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. $\begin{cases} bx+ay=c \\ cx+az=b \\ cy+bz=a \end{cases}$

(5p) a) Arataţi că determinantul matricei asociate este un număr divizibil cu 2

(5p) b) Aflaţi rangul matricei asociate sistemului.

(5p) c) Arataţi că sistemul are solutie unică dacă şi numai dacă $abc \neq 0$. În acest caz rezolvaţi sistemul.

2. Fie $A_k=\{\begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix} / a,b \in Z, k \in \mathbb{Z},\ fixat\}$

(5p) a) Arataţi că $(A_k,+,\cdot)$ este inel

(5p) b) Afaţi k astfel încât inelul A_k să aibă divizori ai lui 0

(5p) c) Demonstraţi că $A_k \simeq A_p$ dacă şi numai dacă k=p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1-x^{2011}$

(5p) a) Arataţi că $f\,'$este strict descrescatoare pe $[0;\infty)$

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(f\,'(\frac{1}{n})+f\,'(\frac{2}{n})+...+f\,'(\frac{n}{n}))$

(5p) c) Utilizând teorema lui Lagrange să se arate ca pentru orice $x\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$ avem

$(x-\frac{k}{n})\cdot f\,'(\frac{k-1}{n})\le f(x)-f(\frac{k}{n})\le(x-\frac{k}{n})\cdot f\,'(\frac{k}{n})$, $\forall n\ge 2$ si $k\in\{1,2,..,n\}$

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $I_0=\int_0^1 e^{-x^2}dx$ şi $I_n=\int_0^1 e^{-x^2}dx, n\ge 1$

(5p) a) Să se calculeze I_0

(5p) b) Arataţi că $I_n-nI_{n-1}=-\frac{1}{e},\forall n\in\mathbb{N}^*$

(5p) c) Arataţi că $I_n=\frac{n!}{e}(e-(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!})),\forall n\in\mathbb{N}^*$

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 23

Prof. Ioan Lung

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinaţi partea reală a numărului complex $z=\left(\frac{1+i}{2}\right)^4$.

(5p) 2. Fie funcţia $f:[-2,10]\to B, f(x)=x^2+2x+3.$ Determinaţi mulţimea B astfel încât funcţia f să fie surjectivă.

(5p) 3. Calculaţi $5^{\log_5 3}+\log_2(3+\sqrt{7})+\log_2(3-\sqrt{7})$.

(5p) 4. Rezolvaţi ecuaţia $C_{19}^n=C_{19}^5$.

(5p) 5. Fie punctele $A(-1,1)$, $B(3,5)$ şi $C(4,9)$. Determinaţi punctual D astfel încât ABCD să fie un parallelogram.

(5p) 6. Dacă $tg\frac{x}{2}=\sqrt{2}$, calculaţi cos2x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(5p) a) Calculaţi A^3.
(5p) b) Determinaţi numerele reale p,q astfel încât $A^3=pA^2+qA$.
(5p) c) Determinaţi matricea $B=A+A^2+...+A^n, n\in N^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^{2000}+X^{1000}-X^3+X^2-X-2-(1-\sqrt{2})i$.

(5p) a) Arătaţi că $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ este rădăcină a lui f.
(5p) b) Arătaţi că $X^2-\sqrt{2}X+1$ divide polinomul f.
(5p) c) Determinaţi restul împărţirii polinomului f la $(X-1)^2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se dă funcţia $f:R\to R, f(x)=x-arctgx$.

(5p) a) Studiaţi monotonia funcţiei f .
(5p) b) Determinaţi punctele de inflexiune ale funcţiei f .
(5p) c) Determinaţi asimptotele funcţiei f .

2. Se dă funcţia $f:R\to R, f(x)=\int_0^{x^2}(t-3)e^t dt$.

(5p) a) Calculaţi f(1).
(5p) b) Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f .
(5p) c) Calculaţi $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 24

Prof. Ioan Lung

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinaţi partea imaginară a numărului complex $z=\dfrac{2+i}{3-2i}$.

(5p) 2. Determinaţi funcţia $f:R\to R, f(x)=ax+b$ ştiind că $f^{-1}(8)=2$ şi $f^{-1}(-4)=-2$.

(5p) 3. Fie funcţia $f:A\to B, f(x)=-x^2+4x+1$. Determinaţi o pereche de mulţimi (A,B) astfel încât funcţia f să fie bijectivă.

(5p) 4. Fie A o mulţime având n elemente. Determinaţi numărul natural n astfel încât mulţimea A să conţină 255 de submulţimi nevide.

(5p) 5. Considerăm punctele $A(-3,-3), B(m,m+1), C(2,-5)$. Determinaţi numărul real m astfel încât aria triunghiului ABC să fie $\dfrac{33}{2}$.

(5p) 6. Calculaţi arcsin(sin2).

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie mulţimea $M=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1+x & -x\\ x & 1-x\end{pmatrix}\in M_2(R)\right\}$.

(5p) a) Calculaţi detA(2011).

(5p) b) Arătaţi că mulţimea M este stabilă în raport cu înmulţirea matricelor.

(5p) c) Arătaţi că A(2011) este inversabilă şi determinaţi matricea $A^{-n}(2011)$.

2. Fie permutările de gradul 5: $\sigma=\begin{pmatrix}12345\\45132\end{pmatrix}, \tau=\begin{pmatrix}12345\\25431\end{pmatrix}, \varphi=\begin{pmatrix}12345\\53421\end{pmatrix}$.

(5p) a) Determinaţi semnul permutării σ.

(5p) b) Determinaţi permutarea φ^{-1}.

(5p) c) Rezolvaţi ecuaţia $\sigma\cdot x\cdot\tau=\varphi$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:D\to R, f(x)=\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}$.

(5p) a) Determinaţi domeniul maxim de definiţie al funcţiei f.

(5p) b) Determinaţi domeniul de derivabilitate al funcţiei f.

(5p) c) Aplicaţi teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul $[11,18]$ şi determinaţi punctul c corespunzător.

2. Se consideră funcţiile $f_n : R \to R,\ f_0(x) = x$ şi $f_{n+1}(x) = \cos f_n(x),\ n \geq 0$.

(5p) a) Calculaţi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_2(x)\sin x dx$.

(5p) b) Arătaţi că funcţiile f_n sunt mărginite, $n \in N^*$.

(5p) c) Determinaţi volumul corpului de rotaţie determinat de funcţia $g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to R, g(x) = f_1(x)$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 25

Prof. Ioan Lung

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinaţi rădăcina pătrată a numărului $z = 1 + 4\sqrt{3}i$.

(5p) 2. Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 7x + 4y \end{cases}$

(5p) 3. Studiaţi injectivitatea funcţiei $f : R \to R,\ f(x) = 2x^2 - 3x + 2$.

(5p) 4. Determinaţi termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{a^2} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{20}$.

(5p) 5. Considerăm punctele $A(-3,-3)$ şi $B(1,3)$. Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului $[AB]$.

(5p) 6. Calculaţi tg(75°).

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, a,b,c $\in \mathbb{C}$

(5p) a) Calculaţi determinantul Δ.
(5p) b) Calculând determinantul Δ în două moduri, arătaţi că
$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$
(5p) c) Rezolvaţi pe R ecuaţia $x^3+y^3+8=6xy$ ştiind că $x+y+2\neq 0$.

2. Fie $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$ şi legea de compoziţie $x\circ y=x^{\ln\sqrt{y}}$.
(5p) a) Arătaţi că legea „$\circ$" este asociativă şi comutativă.

(5p) b) Arătaţi că $(G,\circ)$ este grup abelian.
(5p) c) Determinaţi numărul $e\circ e\circ\ldots\circ e$, unde e apare de n ori.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\frac{7}{1^3\cdot 2^3}+\frac{19}{2^3\cdot 3^3}+\ldots+\frac{3n^2+3n+1}{n^3\cdot(n+1)^3}$.
(5p) a) Determinaţi termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$.
(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{n^3}$.
(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin na_n-\sin na_{n+1}\right)$.

2. Se consideră funcţia $f:R\to R,\ f(x)=\min\left(x,\frac{2}{1+x^2}\right)$.
(5p) a) Explicitaţi funcţia f şi arătaţi că admite primitive.
(5p) b) Determinaţi primitivele funcţiei f.
(5p) c) Calculaţi aria suprafeţei mărginită de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele verticale $x=-1, x=2$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta26

Prof. Ioan Lung

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi $(\cos\pi - i)(\cos 2\pi - i^2)(\cos 3\pi - i^3)...(\cos 2011\pi - i^{2011})$.

(5p) 2. Să se determine valorile parametrului real m astfel încât între soluţiile x_1, x_2 ale ecuaţiei $(m-1)x^2 + (5m-7)x + 2 = 0$ să existe relaţia $x_1 + x_2 = 3$.

(5p) 3. Rezolvaţi pe mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2 x + 15\log_8 \sqrt[5]{x} = \frac{1}{2}$.

(5p) 4. Considerăm o mulţime A cu 10 elemente. Care este probabilitatea ca alegând o submulţime a lui A, aceasta să conţină două elemente?

(5p) 5. Considerăm punctele $A(-4,-2), B(2,0), C(-5,1)$. Arătaţi că dreptele AB şi AC sunt perpendiculare.

(5p) 6. Rezolvaţi pe mulţimea $[0,\pi]$ ecuaţia $2\sin 3x - 1 = 0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x + y + 2mz = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + my + z = 2, m \in R \end{cases}$

(5p) a) Determinaţi parametrul m astfel încât sistemul să admită o singură soluţie.

(5p) b) Determinaţi parametrul m astfel încât sistemul să fie incompatibil.

(5p) c) Determinaţi parametrul m astfel încât sistemul să admită o singură soluţie (x_0, y_0, z_0) cu $y_0 > 0$.

2. Pe mulţimea $G = (7,\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = xy - 7x - 7y + 56$.

(5p) a) Arătaţi că $(G,\circ)$ este grup abelian.

(5p) b) Rezolvaţi pe R ecuaţia $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{2011 ori} = 7$.

(5p) c) Fie funcţia $f : G \to (0,\infty)$, $f(x) = ax + b$. Determinaţi numerele reale a şi b astfel încât funcţia f să fie un izomorfism de la grupul $(G,\circ)$ la grupul $(R_+^*,\cdot)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Considerăm funcţia $f : R \to R,\ f(x) = x\,arctg\,x - \ln\left(1+x^2\right)$.

(5p) a) Calculaţi $f'(x)$.

(5p) b) Arătaţi că funcţia f' este strict crescătoare.

(5p) c) Demonstraţi că $f(x) > 0, (\forall)\, x \in R_+^*$.

2. Se consideră funcţia $f : \left(-\frac{1}{3}, \infty\right) \to R,\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$.

(5p) a) Determinaţi primitivele funcţiei f.

(5p) b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

(5p) c) Fie F o primitivă a funcţiei f astfel încât $F(0) = \frac{5}{3}$. Rezolvaţi ecuaţia $F(x) \cdot f(x) = 1$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 27

Prof. Viorica Lungana

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{37}$ este $0,a_1a_2a_3...a_n...$. Să se determine a_{2011}.

(5p) 2. Să se determine rădăcinile reale ale ecuaţiei : $x^2 - 4\cdot|x| + 3 = 0$.

(5p) 3. Să se arate că numărul de submulţimi ale unei mulţimi cu n elemente este 2^n.

(5p) 4. Un copac cu înălţimea de 10 m creşte în fiecare lună cu 4% din înălţimea sa. Ce înălţime va avea copacul după două luni?

(5p) 5. Fie $a,b,c \in (0,\infty)$ cu $a,b,c \neq 1$. Arătaţi că: $a^{\lg\frac{b}{c}} \cdot b^{\lg\frac{c}{a}} \cdot c^{\lg\frac{a}{b}} = 1$.

(5p) 6. În triunghiul ABC se dau $BC = 6$, $A = \frac{\pi}{2}$ şi $C = \frac{\pi}{6}$. Calculaţi: $\vec{AC}\cdot\vec{BC}$, $\vec{AC}\cdot\vec{AB}$, $\vec{BA}\cdot\vec{BC}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele: $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $B=I_3+A$.

(5p) a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(5p) b) Dacă $X=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ şi $Y=\begin{pmatrix}3&2&1\end{pmatrix}$, să se calculeze matricea $S=A-XY$.

(5p) c) Să se arate că matricea B este inversabilă şi inversa sa este matricea $B^{-1}=I_3-\frac{1}{11}A$.

2. Fie $(I,*)$ grup abelian, unde $I=(1,\infty)\subseteq\mathbf{R}$ şi legea de compoziţie este definită prin $x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$, $(\forall)x,y\in I$.

(5p) a) Să se determine elementul neutru şi mulţimea elementelor simetrizabile.

(5p) b) Să se arate că între grupurile $(R_+^*,\cdot)$ şi $(I,*)$ există un izomorfism $f:(0,\infty)\to(1,\infty)$ de forma $f(x)=\sqrt{x+m}$, unde $m\in\mathbf{R}$, se va determina.

(5p) c) Fie $x\in I$. Să se calculeze $\underbrace{x*x*x*...*x}_{de\ 100\ ori}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie un şir $f(n)$ astfel ca pentru orice $n\in\mathbf{N}$ să avem: $f(n+1)-f(n)=3f(n)$ şi $f(0)=-\frac{1}{2}$.

(5p) a) Să se calculeze $f(1), f(2), f(3), f(4)$.

(5p) b) Exprimaţi termenul general $f(n)$ în funcţie de n.

(5p) c) Să se calculeze $S_n=f(0)+f(1)+f(2)+...+f(n)$ şi să se arate că

$$S_n=\frac{f(n+1)-f(0)}{3}$$

2. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcţie care admite ca primitivă funcţia F cu proprietatea

$$F(x)+f(x)=\sin x,(\forall)x\in\mathbf{R}.$$

(5p) a) Calculaţi $\int e^x\sin x dx$.

(5p) b) Calculaţi derivata funcţiei $F(x)\cdot e^x$.

(5p) c) Dacă $f(0)=0$, atunci determinaţi funcţia f.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 28

Prof. Viorica Lungana

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine valorile parametrului real *m* pentru care ecuaţia $x^2 - mx + 1 = 0$ are rădăcini complexe.

(5p) 2. Să se rezolve ecuaţia $\left|\frac{x+1}{3}\right| - \left|\frac{x+3}{2}\right| = 0$.

(5p) 3. Să se calculeze $[a]$, pentru $a = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real *a*.

(5p) 4. Să se calculeze suma $S = a + 2a^2 + 3a^3 + ... + na^n$, $a \in \mathbf{R}$.

(5p) 5. O trupă de actori are în componenţa sa 4 bărbaţi, 3 femei şi 3 copii. În câte moduri se poate face distribuţia într-o piesă de teatru care are 2 roluri de bărbaţi, 2 roluri de femei şi un rol de copil?

(5p) 6. Calculaţi $3tgt + 4ctgt$, ştiind că $3\cos 2t + 4\sin 2t + 5 = 0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi submulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \middle| z, w \in C \right\}$.

(5p) a) Să se verifice că $I_2 \in G$ şi $O_2 \in G$.

(5p) b) Să se calculeze *z* şi *w* dacă $\begin{vmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{vmatrix} = 0$.

(5p) c) Să se arate că dacă $P, Q \in G$, atunci $P \cdot Q \in G$.

2. Pentru orice $n \in \mathbf{Z}$, considerăm funcţia $f_n : (2,\infty) \to (2,\infty)$, $f_n(x) = 2 + (x-2)^{2^n}$. Să se arate că:

(5p) a) $f_m \circ f_n = f_{m+n}; (\forall) m, n \in \mathbf{Z}$.

(5p) b) Mulţimea $G = \{f_n | n \in Z\}$ împreună cu operaţia de compunere a funcţiilor este grup comutativ.

(5p) c) Grupul $(G,\circ)$ este izomorf cu grupul aditiv al numerelor întregi $(Z,+)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ şi şirul $(a_n)_{n\ge1}$ definit prin $a_n=f(1)+f(2)+...+f(n)$

(5p) a) Să se verifice egalitatea $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2},(\forall)x\in(0,\infty)$.

(5p) b) Să se arate că $a_n=\dfrac{n^2+2n}{(n+1)^2},(\forall)n\in\mathbf{N}^*$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{\frac{1}{nf(n)}}$.

2. Fie funcţia $f:[-1,1]\to\left[-\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right],\ f(x)=\dfrac{2\pi}{3}x-\arccos x$.

(5p) a) Să se arate că f este funcţie bijectivă.

(5p) b) Calculaţi: $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

(5p) c) Calculaţi: $\displaystyle\int_{-\pi}^{0}f^{-1}(x)dx$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 29

Prof. Viorica Lungana

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. *a*) Să se arate că $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2},(\forall)x\in\mathbf{N}.$

b) Să se calculeze suma $S=\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+...+\dfrac{1}{2010\cdot2011}$.

(5p) 2. Câte laturi are un poligon convex cu măsurile în grade ale unghiurilor în progresie aritmetică de raţie 20°, dacă cel mai mic unghi are 68°?

(5p) 3. Să se dea un exemplu de două numere iraţionale cu proprietatea că suma şi produsul lor sunt numere raţionale strict pozitive.

(5p) 4. Să se rezolve ecuaţia $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2x+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{2x+1}=4$.

(5p) 5. Folosind metoda inducţiei matematice, demonstraţi inegalitatea:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}\le 2-\frac{1}{n},(\forall)n\ge 1.$$

(5p) 6. Să se rezolve ecuaţia: $\sin x+\sin 2x=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În M $_3$(**C**) se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(5p) a) Calculaţi matricele: A^2 şi A^3.

(5p) b) Să se arate că pentru orice $z\in$ **C**, determinantul matricei I_3+zA este egal cu 1.

(5p) c) Calculaţi: $(I_3+A)(I_3-A+A^2)$. Ce puteţi spune de inversa matricei I_3+A?

2. Fie $f,g\in \mathbf{Z}_5[X]$, $f=X^5+X^4+\hat{1}$, $g=X^5+X^3+X^2+\hat{3}X+\hat{2}$.

(5p) a) Să se afle cel mai mare divizor comun al celor două polinoame.

(5p) b) Să se afle cel mai mic multiplu comun al polinoamelor *f* şi *g*.

(5p) c) Să se rezolve ecuaţia $f(x)=g(x)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ dată de legea $f(x)=\dfrac{2|x-1|}{x^2-x+1}$.

(5p) a) Să se studieze continuitatea funcţiei f pe **R**.

(5p) b) Să se studieze derivabilitatea funcţiei f în punctul $x=1$.

(5p) c) Cercetaţi câte puncte de extrem are funcţia f.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\ge 0}$, $I_n=\int_1^e (\ln x)^n\,dx$.

(5p) a) Calculaţi I_0 şi I_1.

(5p) b) Găsiţi o formulă de recurenţă pentru şirul $(I_n)_{n\ge 0}$.

(5p) c) Studiaţi convergenţa şirului şi, în cazul în care este convergent, calculaţi limita sa.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 30

Prof. Viorica Lungana

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine funcţia de gradul al doilea $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=ax^2+bx+c$, astfel încât graficul ei să conţină punctele $A(-1,2); B(3,1); C(1,-4)$.

(5p) 2. Să se determine parametrul real *m* astfel încât
$$x^2+y^2-4x+6y+m\geq 0,(\forall)x,y\in\mathbf{R}.$$

(5p) 3. Fie $f:\mathbf{R}-\{2\}\to\mathbf{R}-\{1\},\ f(x)=\frac{x}{x-2}$. Să se arate că funcţia *f* este bijectivă şi să se calculeze $f^{-1}(x)$.

(5p) 4. Să se determine coeficientul lui x^8 în dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2x}\right)^{25}$.

(5p) 5. Să se calculeze imaginea funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2+1}$.

(5p) 6. Dintr-un far înalt de 100 m (faţă de nivelul mării) se văd pe mare două nave pe aceeaşi linie cu baza farului, una sub un unghí de 45° şi cealaltă sub un unghi de 30°. Aflaţi distanţa dintre cele două nave.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}2mx+y+z=0\\ x+my-z=-1\\ x+2my+z=1\end{cases}$, unde $m\in\mathbf{R}$.

(5p) a) Să se rezolve sistemul pentru $m=1$.

(5p) b) Să se determine parametrul real *m*, astfel încât sistemul să fie compatibil determinat.

(5p) c) Să se determine parametrul real *m*, astfel încât sistemul să fie incompatibil.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+bX+c; a,b,c\in\mathbf{R}$.

(5p) a) Pentru $c=501$ să se demonstreze că $f(1)+f(-1)+f(i)+f(-i)=2008$, unde $i^2=-1$.

(5p) b) Pentru $a=-2$, $b=2$, $c=-1$ să se determine rădăcinile polinomului *f*.

(5p) c) Să se demonstreze că nu există valori reale ale coeficienţilor a,b,c astfel ca f să se dividă cu $g = X^3 - X$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia reală $f : E \to \mathbf{R},\ f(x) = \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} - \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$.

(5p) a) Determinaţi domeniul de definiţie şi arătaţi că funcţia f se poate scrie

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă} \quad x \in [1,5) \\ 2\sqrt{x-1}-5, & \text{dacă} \quad x \in [5,10) \\ 1 & \text{dacă} \quad x \in [10,\infty) \end{cases}$$

(5p) b) Studiaţi continuitatea funcţiei f în punctele $x_1 = 5$ şi $x_2 = 10$ şi calculaţi derivata funcţiei.

(5p) c) Cercetaţi dacă funcţia f este derivabilă în punctele $x_1 = 5$ şi $x_2 = 10$. Stabiliţi domeniul de derivabilitate al funcţiei. Ce fel de puncte sunt $x_1 = 5$ şi $x_2 = 10$ pentru graficul funcţiei f?

2.

(5p) a) Demonstraţi inegalitatea $\ln(1+x) \le x, (\forall) x \ge 0$.

(5p) b) Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^{2n} + x^n}{a}\right) dx = 0$, unde $a \succ 0$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n \int_0^1 \frac{2x^{2n} + x^n}{x^{2n} + x^n + a} dx$, unde $a \succ 0$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 31

Prof. Blandina Maniţiu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1 Să se determine partea imaginară a numărului complex $z = \frac{1-i}{1+i}$.

(5p) 2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x)=x +2.Să se rezolve ecuaţia $f\ (f(x)) = f^2(x)$.

(5p) 3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2 \cdot 9^x - 9^{1-x} = 7$.

www.mateinfo.ro

(5p) 4. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x! < 6 \\ y! < 25 \end{cases}$, unde x,y$\in \mathbb{N}$.

(5p) 5. Să se determine parametrul real m,ştiind că dreptele distincte $d_1: mx+3y=2$ şi $d_2: 12x-2y+3=0$ sunt perpendiculare pe aceeaşi dreaptă d.

(5p) 6. Comparaţi elementele cos2 şi cos3.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră mulţimea M=$\left\{ A_{p,q} / A_{p,q} = \begin{pmatrix} 1 & p & q \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p,q \in \mathbb{R} \right\} \subset M_3(\mathbb{R})$.

(5p) a) Să se arate că oricare ar fi m,n,p,q $\in \mathbb{R}$ avem: $A_{m,n} \cdot A_{p,q} \in M$.

(5p) b) Să se arate că orice matrice din M este inversabilă şi să se afle inversa ei.

(5p) c) Să se afle în funcţie de p şi q rangul matricei $A_{p,q} - A_{p,q}^{-1}$.

2. Se consideră polinomul f= $X^5 - 2X^4 + 5X^3 - 6X^2 - 16 \in \mathbb{C}[X]$.

(5p) a) Să se afle rădăcinile întregi ale polinomului f.

(5p) b) Aflaţi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$.

(5p) c) Aflaţi rădăcinile reale ale polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie f:$(0,\infty) \to \mathbb{R}$,f(x)=$\sqrt{x}\ln x$.

(5p) a) Aflaţi asimptotele funcţiei f.

(5p) b) Studiaţi monotonia funcţiei f pentru x>0.

(5p) c) Demonstraţi că f(x)>0 pentru x>1.

2. Fie f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x)=$\dfrac{1}{2-\sin x}$.

(5p) a)Studiaţi mărginirea funcţiei f pentru x$\in \mathbb{R}$.

(5p) b) Calculaţi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx.$

(5p) c) Demonstraţi că orice primitivă F(x) a funcţiei f(x) este strict crescătoare şi calculaţi $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^{2011}} \int_0^x f(t)dt.$

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 32

Prof. Blandina Maniţiu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine partea întreagă a numărului $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

(5p) 2. Studiaţi paritatea funcţiei f: $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x+2}{x-2}$.

(5p) 3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $10^x+2\cdot10^{-x}=3$ ·

(5p) 4. Calculaţi $C_8^0+C_8^2+...C_8^8$.

(5p) 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,1), B(-2,2)$ şi $C(5,-3)$ .Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin C şi este perpendiculară pe AB.

(5p) 6. Calculaţi $\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

(5p) a) Calculaţi rang A.

(5p) b) Aflaţi A^{-1}.

(5p) c) Dacă B=A – $2A^{-1}$să se afle B ^{2011}.

2. Fie G=$(2,\infty)$ şi $x*y=xy-2x-2y+6,\forall x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Demonstraţi că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $*$.

(5p) b) Aflaţi mulţimea elementelor simetrizabile în raport cu legea $*$.

(5p) c) Cât este suma şi produsul soluţiilor ecuaţiei $x*x=11$?

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=arctg(x+2)-arctgx.$

(5p) a) Aflaţi ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei f.

(5p) b) Studiaţi monotonia funcţiei .

(5p) c) Arătaţi că $0<f(x)\le\frac{\pi}{2},\forall x\in\mathbb{R}$.

www.mateinfo.ro

2. Se consideră funcţia f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} xe^x, x \le 1 \\ \dfrac{a}{x^2+2x}, x > 1 \end{cases}$.

(5p) a) Să se afle valoarea parametrului real a pentru care f este continuă în $x_0 = 1$.

(5p) b) Pentru a=3e demonstraţi că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

(5p) c) Calculaţi $\int_0^2 f(x)dx$, pentru a=3e.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 33

Prof. Blandina Maniţiu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Aflaţi inversa funcţiei f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 4$.

(5p) 2. Aflaţi modulul numărului complex $z = \dfrac{1+2i}{1-2i}$.

(5p) 3. Aflaţi o relaţie independentă de m ,între rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 2(m+1)x + 2m - 1 = 0, m \in \mathbb{R}$.

(5p) 4. Calculaţi suma $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + ... + n\cdot n!, n \in \mathbb{N}^*$.

(5p) 5. Aflaţi aria triunghiului ABC ştiind că $AB = 4, AC = 6$ şi $m(\sphericalangle A) = 15^0$.

(5p) 6. Fie A(1,-2),B(-3,0) şi C(1,2).Scrieţi ecuaţia înălţimii din A ,a triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x^2+2x & 4x & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Să se rezolve ecuaţia $S = 0$ unde S este suma tuturor elementelor matricei.

(5p) b) Calculaţi $A(x)\cdot A(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(5p) c) Aflaţi $A^n(2011), n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X] = X^4 - 4X^2 + 16$ şi numărul $\alpha = \sqrt{3} + i \in \mathbb{C}$.

(5p) a) Calculaţi f(α).

(5p) b) Aflaţi toate rădăcinile polinomului f.

(5p) c) Descompuneţi polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}$, D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei f.

(5p) a) Să se afle D şi să se determine asimptotele verticale la graficului funcţiei f.

(5p) b) Studiaţi derivabilitatea funcţiei şi calculaţi $f'(x)$.

(5p) c) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f ,în punctul de abscisă $x = 3$.

2. Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f_n(x) = 2x^n \cdot e^{-|x|}, n \in \mathbb{N}$,şi $I_n = \int_{-1}^{1} f_n(x)dx$.

(5p) a) Studiaţi paritatea funcţiei $f_n(x)$.

(5p) b) Calculţi I_0.

(5p) c) Să se determine $\int_{-1}^{1}(f_0(x) + f_{2011}(x))dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 34

Prof. Maniţiu Blandina

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $3^{\log_3 2} x^2 - 5\log_2 2^x + 2 = 0$.

(5p) 2. Dacă $\dfrac{x - y\sqrt{3}}{x + y\sqrt{3}} = 2$, aflaţi $\dfrac{x}{y}$,x,y$\in \mathbb{R}$, $y \neq 0, x + y\sqrt{3} \neq 0$.

(5p) 3. Aflaţi mulţimea $\{x \in \mathbb{R} | \log_2 x + \log_8 x = 8\}$.

(5p) 4. Determinţi valorile parametrului real m, astfel încât ecuaţia $x^2 - (m+2)x + 4 = 0$ să nu admită solţii reale.

(5p) 5. Fie dreptele de ecuaţii $d_1 : 2x + y - 1 = 0, d_2 : -x + 3y + 4 = 0$

www.mateinfo.ro

şi $d_3: 3x - y + m = 0$. Determinaţi m real astfel încât dreptele să fie concurente.

(5p) 6. Să se rezolve în $[0, 2\pi]$ ecuaţia $\cos 2x + \sin 2x = 1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ (m+1)x + y + z = 2 \\ x + y + (m-1)z = m \end{cases}$

şi A matricea sistemului

(5p) a) Să se calculeze determinantul matricei A, şi să se afle valorile lui m pentru care matricea are rang maxim

(5p) b) Să se determine valoarea lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.

(5p) c) Pentru m $= 2$ să se rezolve sistemul.

2. Fie polinomul f$= X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

(5p) a) Aflaţi media aritmetică şi media geometrică a rădăcinlor x_1, x_2, x_3, x_4.

(5p) b) Calculaţi $x_1^{11} + x_2^{201} + x_3^{2001} + x_4^{2011}$.

(5p) c) Aflaţi câtul şi restul împărţirii lui f la $X^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}X + 1$ şi descompuneţi f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţiile f,g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,f(x)$= \frac{|x|}{x^2+1}$ şi g(x)$= e^{f(x)}$.

(5p) a) Determinaţi asimptotele graficului funcţiei g(x).

(5p) b) Calculaţi $f'(x)$ şi studiaţi derivabilitatea funcţiei în x=0.

(5p) c) Aflaţi punctele de extrem local ale funcţiei f(x).

2. Se consideră f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

. $f(x) = \begin{cases} 2e^{x-1}, x \geq 1 \\ x+1, x < 1 \end{cases}$.

(5p) a) Să se arate că funcţia f(x) admite primitive pe R şi calculaţi primitivele ei.

(5p) b) Calculaţi aria suprafeţei plane determinată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele x=0; x=2.

(5p) c) Calculaţi $\int_{-2}^{3} exf(x)dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 35

Prof. Ştefan Florin Marcu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi : $(3-i)^4 \bullet (3+i)^4$.

(5p) 2. Arătaţi că : $\lg\frac{1}{2}+\lg\frac{2}{3}+....+\lg\frac{2010}{2011}+\lg 2011=0$.

(5p) 3. Aflaţi numărul soluţiilor întregi ale inecuaţiei : $x^2-2011 \bullet x+2010<0$.

(5p) 4. Să se afle $n \in N^*, n \geq 2$, pentru care : $C_n^1+2 \bullet C_n^2=9$.

(5p) 5. În sistemul de coordonate XOY , se consideră punctele : A(m,4) , B(2,3) , C(3,4) . Aflaţi valorile lui $m \in R$, pentru care triunghiul ABC este dreptunghic , cu m(Â)= 90°.

(5p) 6. Calculaţi perimetrul triunghiului ABC , ştiind că AB=3 , AC=4 şi m($\hat{BAC}$)= 60° .

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A \in M_2(R)$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(5p) a) Arătaţi că : $A^2 = 5 \bullet A$.

(5p) b) Calculaţi suma : $A+A^2+....+A^{2011}$.

(5p) c) Arătaţi că , dacă $X \in M_2(R)$ verifică relaţia $X^2=A$, atunci $X=\frac{1}{\sqrt{5}} \bullet A$ sau $X=-\frac{1}{\sqrt{5}} \bullet A$.

2. Pe R , definim legea de compoziţie "$\circ$" astfel :

$x \circ y = x \bullet y - a \bullet (x+y) + a^2 + a$, $(\forall) x, y \in R$, unde $a \in R$ fixat arbitrar .

(5p) a) Arătaţi că (a; $+\infty$) este o parte stabilă a lui R , în raport cu legea "$\circ$".

(5p) b) Dacă $f: R \to R$, $f(x)=x+a$, arătaţi că : $f(x \bullet y)=f(x) \circ f(y)$, $(\forall) x, y \in R$.

www.mateinfo.ro

(5p) c) Dacă a=2011 , rezolvaţi în R , ecuaţia : $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{2011-ori} = x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f : R \to R$, $f(x) = 2^x + 3^x$, x∈R .

(5p) a) Calculaţi : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2^x + 3^x - 5}{x - 1}$.

(5p) b) Arătaţi că f este o funcţie convexă .

(5p) c) Rezolvaţi în R , ecuaţia : $2^x + 3^x = 5$.

2. Fie şirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_n^{n+1} \dfrac{3x - 1}{x} dx$.

(5p) a) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n \geq 1}$, este strict descrescător .

(5p) b) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este mărginit .

(5p) c) Calculaţi : $\lim\limits_{n \to \infty} n \bullet (3 - I_n)$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 36

Prof. Ştefan Florin Marcu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Arătaţi că : $\dfrac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} + \dfrac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} \in R$.

(5p) 2. Calculaţi $x_1^3 + x_2^3$, unde x_1, x_2 $\in R$, sunt soluţiile ecuaţiei : $x^2 - 4x + 1 = 0$.

(5p) 3. Se consideră o progresie aritmetică $\left(a_n\right)_{n \geq 1}$ cu $a_1 = 1$ şi r=3 . Aflaţi al c âte-lea termen al
progresiei este numărul 2011 .

(5p) 4. Aflaţi c âte numere de trei cifre se pot forma cu cifrele 1,2,3 .

(5p) 5. În sistemul de coordonate XOY , se consideră punctele A(4,0) şi B(0,3) . Aflaţi ecuaţia
perpendicularei duse din O pe AB .

(5p) 6. Dacă sinx= $\dfrac{1}{3}$, calculaţi cos 2x .

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie A $\in M_2(R)$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, unde numerele a,b,c,d $\in R$ sunt patru numere în progresie aritmetică .

(5p) a) Arătaţi că det A $\le$ 0 .
(5p) b) Arătaţi că ($\exists$) două matrici U,V $\in M_2(R)$ şi r$\in$R , astfel încât : A=a$\bullet$U+r$\bullet$V .
(5p) c) Arătaţi că , matricele U şi V , verifică relaţiile : $U^{2011} = 2\bullet U^{2010}$ şi $V^{2011} = 3\bullet V^{2010} + 2\bullet V^{2009}$.

2. Se consideră corpul (Z_5 ,+,$\bullet$) şi $M = \{x^4 \mid x \in Z_5\}$.

(5p) a) Arătaţi că M={ $\hat{0}$, $\hat{1}$ } .
(5p) b) Arătaţi că , ($\exists$) a,b $\in Z_5$, cu a$\ne$b , astfel încât : a^{2011}=b şi b^{2011}=a .
(5p) c) Rezolvaţi în Z_5 , ecuaţia : $x^{2011} = x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia : f: (0, $+\infty$)$\to R^*$, f(x)= $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.
(5p) a) Aflaţi ecuaţia asimptotei orizontale la graficul funcţiei f .
(5p) b) Demonstraţi că : $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}, (\forall) x \in (0;+\infty)$.
(5p) c) Arătaţi că : $\sqrt{2010} > \frac{\sqrt{2009}+\sqrt{2011}}{2}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\ge1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{3x+2}dx$.
(5p) a) Calculaţi I_1 .
(5p) b) Demonstraţi relaţia : $3\bullet I_{n+1} + 2\bullet I_n = \frac{1}{n+1}, (\forall) n \in N^*$.
(5p) c) Arătaţi că : $\lim\limits_{n\to\infty} n\bullet I_n = \frac{1}{5}$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 37

Prof. Marcu Ştefan Florin

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se rezolve în R ecuaţia : $\sqrt{5-x}=x-5$.

(5p) 2. Să se calculeze partea întreagă a numărului : $a=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}$.

(5p) 3. Aflaţi c âte numere de trei cifre distincte , se pot forma cu cifrele 2,4,6,8 .

(5p) 4. Să se arate că , dreapta de ecuaţie y=2x-1 nu intersectează parabola de ecuaţie y= x^2 +x+1 .

(5p) 5. Fie vectorii : $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$; $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$; $\vec{v}=7\vec{i}-\vec{j}$. Să se determine x,y$\in$R , astfel încât :

$$\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b} .$$

(5p) 6. Calculaţi : $\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{3\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii : $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 4x+5y+6z=0 \\ 7x+8y+az=0 \end{cases}$, a$\in$R .

(5p) a) Aflaţi a$\in$R , **astfel** **î**ncât det A=0 .

(5p) b) Pentru a=9 , rezolvaţi sistemul de ecuaţii .

(5p) c) Dacă $(x_0, y_0, z_0)\in R\times R\times R$, este o soluţie oarecare a sistemului de ecuaţii , calculaţi :

$$x_0^{2011}+\frac{y_0^{2011}}{2^{2010}}+z_0^{2011} .$$

2. Se consideră polinomul : f= $X^{2011}+X+a\in R[X]$, unde a$\in$R .

(5p) a) Arătaţi că f(1)-f(-1)=4 ,($\forall$) a $\in R$.

(5p) b) Aflaţi a$\in$R , astfel încât f să fie divizibil cu X-1 .

(5p) c) Dacă a $\neq$ -2 , şi notăm cu $x_1, x_2, ..., x_{2011}$ rădăcinile polinomului f , arătaţi că :

$$\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}+\ldots+\frac{1}{1-x_{2011}}=\frac{2012}{a+2}\ .$$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\dfrac{x^{2011}}{x^{2010}+1}$.

(5p) a) Calculaţi : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$.

(5p) b) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f .

(5p) c) Arătaţi că funcţia f este strict crescătoare pe R .

2. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x^2}$.

(5p) a) Aflaţi a , b$\in$R , astfel încât $F:R\to R$, $F(x)=a\bullet arctgx+b\bullet\ln(x^2+1)$, să fie o primitivă a funcţiei f .

(5p) b) Calculaţi : $\int_0^1 f(x)dx$.

(5p) c) Calculaţi : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1^2}+\dfrac{n+2}{n^2+2^2}+\ldots+\dfrac{n+n}{n^2+n^2}\right)$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 38

Prof. Ştefan Florin Marcu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi suma : $i+i^2+i^3+\ldots i^{2011}$.

(5p) 2. Rezolvaţi în R , ecuaţia : $9^x-5\bullet 3^x+4=0$.

(5p) 3. Să se arate că funcţia : $f:R^*\to R$, $f(x)=x^{2011}-\dfrac{1}{x^{2011}}$, este impară .

(5p) 4. Aflaţi câte numere de patru cifre distincte , se pot forma cu cifrele 1,3,5,7,9 .

(5p) 5. În sistemul de coordonate XOY , se consideră punctele A(-1,3) şi B(1,-1) . Aflaţi ecuaţia mediatoarei segmentului AB .

(5p) 6. Calculaţi $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea : $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in M_3(R)$.

(5p) a) Calculaţi rangul matricei A .

(5p) b) Arătaţi că : $A^n=\begin{pmatrix}1 & a_n & b_n\\ 0 & 1 & c_n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $(\forall)n\in N^*$, unde $(a_n)_{n\in N^*}$, $(b_n)_{n\in N^*}$, $(c_n)_{n\in N^*}$ sunt şiruri de numere reale .

(5p) c) Arătaţi că : $a_n=c_n=n$ şi $b_n=\dfrac{n\bullet(n+1)}{2}$, $(\forall)n\in N^*$.

2. Se consideră polinomul : $f=X^3+X^2+a\in Z_3[X]$, unde $a\in Z_3$.

(5p) a) Arătaţi că suma $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})$, nu depinde de valorile lui a .

(5p) b) Dacă a=$\hat{1}$, aflaţi rădăcinile din Z_3 , ale lui f .

(5p) c) Determinaţi , valorile lui $a\in Z_3$, pentru care polinomul f , este ireductibil în $Z_3[X]$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:[0;+\infty)\to R,\ f(x)=\dfrac{1}{(x+2010)(x+2011)}$.

(5p) a) Arătaţi că f este strict descrescătoare pe $[0;+\infty)$.
(5p) b) Aflaţi valoarea maximă a funcţiei f .
(5p) c) Calculaţi : $\lim\limits_{n\to\infty}[f(1)+f(2)+...+f(n)]$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in N}$, definit prin : $I_0=\int_0^1 e^{-x}dx$ şi $I_n=\int_0^1 e^{-x}\bullet x^n dx$, $(\forall)n\in N^*$.

(5p) a) Calculaţi I_0 .

(5p) b) Demonstraţi că : $I_n=-\dfrac{1}{e}+n\bullet I_{n-1}$, $(\forall)n\in N^*$.

(5p) c) Arătaţi că : $I_n=\dfrac{n!}{e}\bullet[e-(1+\dfrac{1}{1!}+...+\dfrac{1}{n!})]$, $(\forall)n\in N^*$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 39

Prof. Corneliu Mănescu-Avram

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

(5p) 2. Să se determine numerele reale a astfel ca soluţiile ecuaţiei $x^2 + ax + a - 1 = 0$ ă aibă modulul
cel mult egal cu 1.

(5p) 3. Dacă S_n este suma prinilor n termeni ai unei progresii aritmetice şi $S_n = m$, $S_m = n$, $m, n \in \mathbb{N}^*$,
$m \neq n$, să se determine S_{m+n}.

(5p) 4.Care dintre polinoamele $(1 + X^2 - X^3)^{1000}$ şi $(1 - X^2 + X^3)^{1000}$ are coeficientul lui X^{20} mai mare?

(5p) 5. Într-un triunghi ABC medianele care trec prin vârfurile B şi C sunt perpendiculare. Care este valoarea raportului $\dfrac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$?

(5p) 6. Dacă tg $x = 2 - \sqrt{3}$, ce valoare are sin $2x$?

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu elemente numere reale.

(5p) a) Arătaţi că $A^3 = I_3$.

(5p) b) Câte elemente are mulţimea $G = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$?

(5p) c) Verificaţi că $A^2 + A + I_3 \neq O_3$ şi explicaţi rezultatul.

2. Se consideră $a \in \mathbb{Z}_{17}$ şi polinomul $f = X^{16} + aX + \widehat{15} \in \mathbb{Z}_{17}[X]$.

(5p) a) Să se demonstreze că pentru orice $b \in \mathbb{Z}_{17}$, $b \neq \hat{0}$, este adevărată egalitatea $b^{16} = \hat{1}$.

(5p) b) Să se arate că $X^{16} + \widehat{15} = (X^8 - \hat{6})(X^8 + \hat{6})$ în $\mathbb{Z}_{17}[X]$.

(5p) c) Să se demonstreze că pentru orice $a \in \mathbb{Z}_{17}$, polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_{17}[X]$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit astfel : $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{4}+\frac{1}{13}$, … , iar

a_{n+1} se construieşte din a_n prin înlocuirea fiecărui termen $\frac{1}{a}$ prin suma $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a^2+a+1}$.

(5p) a) Să se arate că dacă $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, atunci

$$f(x)=f(x+1)+f(x^2+x+1),$$ pentru orice $x > 0$.

(5p) b) Dacă $s_0(x)=\frac{1}{x}$, $s_{n+1}(x)=s_n(x+1)+s_n(x^2+x+1)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, unde $x > 0$, atunci

$$f(x)\le s_n(x)\le\frac{f(x)}{(x+n)f(x+n)},$$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. Se consideră funcţiile $f, F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$, $F(x) = \frac{1}{7}x^7-\frac{2}{3}x^6+x^5-\frac{4}{3}x^3+4x-$

$-4\operatorname{arctg} x$.

(5p) a) Să se arate că F este o primitivă a lui f.

(5p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$ şi $\int_0^1 x^4(1-x)^4dx$.

(5p) c) Să se deducă inegalităţile $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 40

Prof. Corneliu Mănescu-Avram

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine partea întreagă a numărului $10\log_2 3$.

(5p) 2. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $x^4 + 4x - 1 = 0$.

(5p) 3. Care este imaginea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3}+1}$.

(5p) 4. Calculaţi $C_{15}^5 - C_{14}^6$.

(5p) 5. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi dreptele $d_1 : y = ax$, $d_2 : y = -x + b$, care se intersectează în primul cadran. Care

este mulţimea valorilor lui a ?

(5p) 6. Două triunghiuri au lungimile laturilor egale cu 39, 41, 50, respectiv 41, 50, 73. Care dintre cele

două triunghiuri are raza cercului înscris de lungime mai mare ?

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $O_2, I_2, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$, $O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$ şi

mulţimea $F = \{C^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cap \{O_2\}$.

(5p) a) Câte elemente are mulţimea F ?
(5p) b) Arătaţi că dacă $A, B \in F$, atunci $A + B \in F$.
(5p) c) Demonstraţi că F este un corp comutativ.

2. Se consideră mulţimea $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, funcţia $f : \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \to \mathbb{Z}$, $f(a +$

$b\sqrt{5}) =$

$= a^2 - 5b^2$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ şi mulţimea $A = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \mid f(x) = -1\}$.

(5p) a) Să se verifice dacă $38 + 17\sqrt{5} \in A$.

(5p) b) Să se arate că pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, $f(xy) = f(x)f(y)$.

(5p) c) Să se arate că mulţimea A este infinită.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră şirul cu termenul general $a_n = \frac{1}{C_n^0} + \frac{1}{C_n^3} + \frac{1}{C_n^6} + \ldots$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde indicii superiori

sunt multipli de 3.

(5p) a) Să se calculeze primii 6 termeni ai şirului.

(5p) b) Să se demonstreze inegalităţile $2 \le a_{3n} \le 2 + \frac{n-1}{C_{3n}^3}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi să se găsească inegalităţi similare pentru $a_{3n+1}, a_{3n+2},\ n \in \mathbb{N}^*$.

(5p) c) Să se stabilească dacă şirul este convergent.

2. Se consideră funcţiile $f, F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x(1-x)^2}{(1+x)^3}$, $F(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 7x - 6}{(1+x)^2} -$ $- 5 \ln(1 + x)$.

(5p) a) Să se arate că F este o primitivă a lui f.

(5p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$ şi $\int_0^1 x(1-x)^2 dx$.

(5p) c) Să se deducă inegalităţile $\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{7}{10}$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 41

Prof. Corneliu mănescu-Avram

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se arate că numărul $\sqrt[5]{41+29\sqrt{2}} + \sqrt[5]{41-29\sqrt{2}}$ este natural.

(5p) 2. Dacă $a^2 - a + 1 = 0$, $a \in \mathbb{C}$, să se calculeze $a^{14} + \frac{1}{a^{14}}$.

(5p) 3. Care este cel mai mic nuăr natural n astfel încât $10!n$ să fie pătrat perfect?

(5p) 4. Să se rezolve ecuaţia $\mathrm{tg}^2 x = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}$.

(5p) 5. Dacă P este un punct interior pătratului $ABCD$ şi $PA = 12$, $PB = 20$, $PC = 65$, care este valoarea lui PD ?

(5p) 6. Raportul dintre lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic şi lungimea înălţimii este egal cu

4. Care sunt măsurile unghiurilor triunghiului ?

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră mulţimea $\_ \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ a matricelor $M = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix}$.

(5p) a) Să se arate că dacă $M \in \_$, atunci $M^* \in \_$, unde M^* este matricea adjunctă a matricei M.

(5p) b) Să se verifice egalitatea $(MN)^* = N^* M^*$.

(5p) c) Să se demonstreze că orice matrice nenulă $M \in \_$ este inversabilă şi că $M^{-1} \in \_$.

2. Se consideră inelul $(A, +, .)$, unde $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z}_{257} \right\}$.

(5p) a) Să se determine numărul elementelor mulţimii A.

(5p) b) Să se rezolve în mulţimea A ecuaţia $X^2 = I_2$.

(5p) c) Să se arate că $(A, +, .)$ nu este corp.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se dă şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$.

(5p) a) Să se demonstreze egalitatea : $S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(5p) b) Să se arate că dacă $a > a_{n+1}$, atunci $S_n + \frac{1}{a} < S_{n+1}$.

(5p) c) Să se arate că dacă $a \le a_{n+1} - 1$, atunci $S_n + \frac{1}{a} \ge 1$.

2.

(5p) a) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + tgx)\,dx$.

(5p) b) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$.

(5p) c) Să se deducă inegalitatea $\pi \ln 2 > 2$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 42

Prof. Corneliu Mănescu-Avram

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se ordoneze crescător numerele : $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[6]{19}$.
(5p) 2. Să se rezolve ecuaţia $x^3 - 7x + 6 = 0$.
(5p) 3. În câte puncte se intersectează diagonalele unui poligon convex cu n laturi, dacă nu există trei diagonale concurente?
(5p) 4. Să se rezolve ecuaţia $32\cos^6 x - \cos 6x = 1$.
(5p) 5. În interiorul pătratului $ABCD$ se construieşte triunghiul echilateral ABE. Ce măsură are unghiul $\angle CDE$?
(5p) 6. Să se demonstreze egalitatea $4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(5p) a) Să se calculeze A^2, A^3.
(5p) b) Să se verifice egalitatea $A^3 = 5A^2 - 6A + I_3$.
(5p) c) Să se demonstreze că tóate puterile matricei A au pe diagonala principală două elemente identice.

2. Se consideră polinomul $f = X^5 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

(5p) a) Să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.
(5p) b) Să se arate că polinomul f are o singură rădăcină reală a.
(5p) c) Să se exprime celelalte rădăcini ale lui f în funcţie de a.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră şirul cu termenul general $a_n = \dfrac{\sqrt{n}C_{2n}^{n}}{2^{2n}}$.

(5p) a) Să se demonstreze că şirul este monoton.
(5p) b) Să se demonstreze că şirul este mărginit.

(5p) c) Să se deducă pentru limita l a şirului inegalităţile $\frac{1}{2} < l < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\pi = \frac{p}{q}$ şi funcţiile $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^n (p - qx)^n}{n!}$,
$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - ... + (-1)^n f^{(2n)}(x)$, unde $f^{(i)}$ este derivata de ordin i a funcţiei f.

(5p) a) Să se arate că $f^{(i)}(0) \in \mathbb{Z}$, oricare ar fi $i \in \mathbb{N}$.

(5p) b) Să se demonstreze egalitatea $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = F(\pi) + F(0)$.

(5p) c) Folosind rezultatele precedente, să se demonstreze că π este un număr iraţional.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 43

Prof. Mândrican Ovidiu-Marius

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Câte numere naturale se pot forma cu cifrele $0, 1, 2, 3$ dacã în fiecare astfel de numãr , orice cifrã intrã cel mult odatã ?

(5p) 2. Sã se rezolve în R ecuatia: $1 + 2^x + 3^{x+1} = 90$.

(5p) 3. Sã se gãseascã un vector perpendicular pe vectorul $2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$.

(5p) 4. Se dã un triunghi dreptunghic neisoscel ABC , cu $m(\angle BAC) = 90^\circ$. Se duc: înãltimea $[AH]$, bisectoarea $[AA_1]$ si mediana $[AM]$,unde H, A_1 si $M \in (BC)$. Arãtati cã $\frac{MA_1}{HA_1} > 1$.

(5p) 5. Sã se rezolve în C ecuatia $z^2 = -i$.

(5p) 6. Sã se afle ecuatia planului care trece prin punctele $A(1, 2, 4)$; $B(4, 3, 1)$ si $C(2, 1, 3)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie A si I_2 douã matrici pãtratice de ordinul doi: $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ si $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

(5p) a) Sã se verifice cã matricea A^{-1} satisface egalitatea. $A^{-1}=\frac{1}{5}(4I_2-A)$.

(5p) b) Sã se arate cã A^n, cu $n\in N^*$, $n\geq 2$ se poate scrie: $A^n=a_nA+b_nI_2$; unde a_n, $b_n\in Z$.

(5p) c) Scriind matricea A^5 sub forma $A^5=a_5A+b_5I_2$ sã se calculeze coeficientii întregi a_5 si b_6.

2. Se considerã $G=(\{a,b,c,d\},*)$ un grup dat prin tabela urmãtoare, incomplet completatã:

$*$	a	b	c	d
a	d	c		
b	c			
c			c	
d	b			

(5p) a) Sã se afle elementul neutru al grupului.
(5p) b) Sã se afle simetricul elementului b.
(5p) c) Sã se demonstreze cã grupul G este abelian.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se considerã functia $f:(-1,+\infty)\to R$; $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\lambda}+\frac{\lambda}{\sqrt{x+1}}$; $\lambda>1$.

(5p) a) Sã se arate cã functia f are un minim care nu depinde de λ.
(5p) b) Sã se arate cã functia f are exact un punct de inflexiune.
(5p) c) Fie A punctul în care graficul functiei f intersecteazã axa Oy si B punctul în care tangenta în A la graficul functiei f intersecteazã axa Ox. Sã se demonstreze cã distanta de la originea axelor de coordonate la segmentul $[AB]$ este constantã.

2. Se considerã sirul definit prin $(I_n)_{n\in N^*}$, $I_n=\int_0^3(3x-x^2)^n dx$.

(5p) a) Sã se arate cã $0\leq I_n\leq 3\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^n$.

(5p) b) Utilizând metoda integrãrii prin pãrti, arãtati cã $I_n=\frac{9n}{2(2n+1)}I_{n-1};\forall n\in N^*,n\geq 2$.

(5p) c) Utilizând metoda inductiei matematice sã se arate cã

$$I_n = \frac{3^{2n+1}\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}\ ;\ \forall n \in N^*, n \geq 1 .$$

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 44

Prof. Mândrican Ovidiu-Marius

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Câte numere naturale mai mici sau egale cu 100 sunt divizibile cu 3 sau cu 4 si nu sunt divizibile cu 5 ?
(5p) 2. Sã se determine probabilitatea ca aruncând 2 zaruri, suma feţelor sã reprezinte un cub perfect.
(5p) 3. Sã se rezolve în R ecuatia $\sqrt{x+3} = 3 - x$.
(5p) 4. Într-un triunghi dreptunghic *ABC*, având $m(\angle BAC) = 90^\circ$ se cunosc: *AH* = 2 cm si *AM* = 4 cm, unde *AH* şi *AM* sunt înãlţimea şi mediana corespunzãtoare unghiului drept.
Sã se calculeze diferenţa mãsurilor unghiurilor ascuţite ale triunghiului.
(5p) 5. Sã se calculeze valoarea minimã a sumei $\sin x + \cos x$, $x \in R$.
(5p) 6. Sã se compare distanţa de la punctul *A*(2; 3) la dreapta d: $3x + 4y - 5 = 0$, cu lungimea segmentului determinat de intersectiile dreptei d cu axele de coordonate.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se considerã matricile : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(5p) a) Sã se calculeze $\det(A + A^t + B)$.
(5p) b) Sã se calculeze $A^n, n \in N^*$.
(5p) c) Sã se calculeze $B^n, n \in N^*$.

2. Se considerã $a \in R$ şi ecuaţia $x^4 + (a-2)x^3 + (a^2 - 2a + 4)x^2 - x + 1 = 0$.

(5p) a) Sã se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.
(5p) b) Sã se arate cã ecuaţia datã nu are toate rãdãcinile reale.
(5p) c) Sã se demonstreze cã ecuaţia datã nu admite pe -2 drept rãdãcinã triplã.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se considerã funcţia $f : D \to R$; $f(x) = \arcsin\left|3x^2 - 6x + 2\right|$.

(5p) a) Sã se precizeze domeniul de definiţie al funcţiei f.

(5p) b) Sã se precizeze domeniul ei de derivabilitate.

(5p) c) Sã se precizeze intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcţiei.

2. Se considerã funcţia $f : R \to R$, $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|x+2|e^{nx} + a|x-2|e^{-nx} + b}{e^{nx} + e^{-nx}}$.

(5p) a) Sã se determine constantele a şi b astfel încât funcţia f sã fie continuã pe R.

(5p) b) Sã se calculeze $\int_{-2}^{+2} [x] f(x)dx$; unde $[x]$reprezintã funcţia parte întreagã.

(5p) c) Sã se calculeze $\int_{-2}^{+2} (f \circ f)(x)dx$; unde $\circ$ reprezintã operaţia de compunere a funcţiilor.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 45

Prof. Adrian Muscalu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Dacă $a,b \in \mathbb{R}$ şi $a+b=1$,să se arate că $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$.

(5p) 2. Să se rezolve în numere reale ecuaţia : $\log_2(2+\lg(x+1))=0$.

(5p) 3. Să se calculeze C_n^7 , dacă $C_{20}^n = C_{20}^{n+2}$.

(5p) 4. Fie $f:\{-1,2\}\to R$, $f(x)=x^2-3$ şi $g:R\to R$, $g(x)=ax+b$ o prelungire a lui f . Să se calculeze $g(1)$.

(5p) 5. Fie ABCD un paralelogram şi punctele K şi L astfel încât $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Să se arate că vectorii $\overrightarrow{LK}$ şi $\overrightarrow{LB}$ sunt coliniari.

(5p) 6. Dacă $\sin x+\cos x=-\frac{11}{12}$,să se calculeze $\sin 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $M=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ şi mulţimea $H=\left\{x\in M_3(R)\middle| X^2=X+2I_3\right\}$.

(5p) a) Să se arate că $M\in H$.

(5p) b) Dacă $A\in H$, să se arate că A este inversabilă şi $A-2A^{-1}=2I_3$.

(5p) c) Dacă $B\in H$, să se arate că $B^n=\frac{2^n}{3}(B+I_3)+\frac{(-1)^n}{3}(2I_3-B)$.

2. Se consideră mulţimea $M=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}\middle| a,b\in Z_7\right\}$ şi matricile $A=\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{1}\\\hat{1}&\hat{2}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\hat{4}&\hat{3}\\\hat{3}&\hat{4}\end{pmatrix}$.

(5p) a) Să se arate că A este inversabilă şi să se afle inversa ei.

(5p) b) Care este probabilitatea ca alegând un element din M ,acesta să fie matrice inversabilă?

(5p) c) Să se rezolve în $M_2(\mathbb{Z}_7)$ ecuaţia $X^6=B$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=x^3+x$ şi şirul $(x_n)_{n\ge1}$, $x_1>0$, $x_{n+1}^3+x_{n+1}=x_n$.

(5p) a) Să se arate că funcţia este bijectivă.

(5p) b) Să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

(5p) c) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\ge1}$ este convergent şi să se afle limita sa.

2. Se consideră şirul $I_n=\int_0^1 x^n\sin\pi x\,dx$.

(5p) a) Să se calculeze I_1.

(5p) b) Să se arate că $I_{n+1}=\frac{1}{\pi}-\frac{n(n+1)}{\pi^2}I_{n-1}$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 46

Prof. Adrian Muscalu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Se consideră ecuaţia $x^2-2x-1=0$ cu rădăcinile x_1 şi x_2. Să se calculeze : $\frac{x_1-1}{x_2+1}+\frac{x_2-1}{x_1+1}$

(5p) 2. Să se calculeze partea întreagă a numărului: $\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{90}+\sqrt[3]{100}}$

(5p) 3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia : $x^2-x-\frac{1}{x^2-x}=\frac{3}{2}$

(5p) 4. Să se afle inversa funcţiei bijective $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ 3x-1, & x\geq 1 \end{cases}$

(5p) 5. Fie vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ cu $|\vec{a}|=3$ şi $|\vec{b}|=4$ şi unghiul dintre ei de 60^o. Să se afle x dacă vectorii $\vec{u}=x\vec{a}+\vec{b}$ şi $\vec{v}=\vec{a}+2\vec{b}$ sunt perpendiculari.

(5p) 6. Să se calculeze $8\sin 15^o\cdot\sin 45^o\cdot\sin 75^o$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A, X\in M_2(\mathbb{R})$, unde $A=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $AX=XA$.

(5p) a) Arătaţi că există o infinitate de matrici $X\in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea dată;

(5p) b) Să se rezolve în $M_2(R)$ ecuaţia $X^4=A$.

(5p) c) Să se calculeze $A^n, n\in N*$.

2. Se consideră legea de compoziţie pe Z, $x\perp y=xy-3x-3y+12$. Elementul $a\in Z$ se numeşte element absorbant faţă de legea $\perp$, dacă $x\perp a=a\perp x=a$ pentru orice $x\in Z$.

(5p) a) Să se arate că legea este asociativă, să se afle elementul neutru şi elementul absorbant.

(5p) b) Să se rezolve ecuaţia $\underbrace{x \perp x \perp x ... \perp x}_{100\ de\ x} = 4$.

(5p) c) Să se afle părţile stabile finite ale lui Z faţă de legea dată.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat prin $x_1 \in (0;1), x_{n+1} = x_n - x_n^3$.

(5p) a) Să se arate că $x_n \in (0,1)$ pentru orice $n \in N^*$.

(5p) b) Să se calculeze limita şirului .

(5p) c) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3\right) = x_1$.

2. Fie funcţia $f:[0;1] \to [1;3], f(x) = x^4 + x^2 + 1$.

(5p) a) Să se arate că f este inversabilă .

(5p) b) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x(2x^2+1)}{f(x)}dx$.

(5p) c) Să se arate că $\int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 g(x)dx$ =3, unde g este inversa lui f.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 47

Prof. Adrian Muscalu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se arate că dacă numerele ab, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică ,atunci numerele $b, c, 2b-a$ sunt în progresie geometrică.

(5p) 2. Să se rezolve sistemul : $\begin{cases} \frac{x+1}{y-1} + \frac{y+1}{x-1} = 6 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$

(5p) 3. Dacă $x = \log_{108} 3$, să se calculeze în funcţie de x numărul $y = \log_{48} 2$.

(5p) 4. Care este probabilitatea ca alegând o pereche de numere distincte din mulţimea $\{1, 2, 3, ..., 30\}$, produsul lor să fie număr impar?

(5p) 5. Un dreptunghi are două laturi pe dreptele de ecuaţii $a:3x+4y-3=0$,respectiv $b:4x-3y-4=0$ şi vârful $A(-1;4)$. Să se afle aria dreptunghiului.

(5p) 6. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC are loc relaţia :

$$\frac{bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C}{a\sin A+b\sin B+c\sin C}=R$$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră permutările $\sigma,\theta\in S_4$, $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$, $\theta=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$.

(5p) a) Să se calculeze $\sigma^{2011}\cdot\theta^{2011}$.

(5p) b) Să se rezolve ecuaţia $\sigma^{21}\cdot x\cdot\sigma^{43}=\theta$.

(5p) c) Să se arate că ecuaţia $x^{10}=\sigma$ nu are soluţii în S_4.

2. Fie şirul $(F_k)_{k\in N}$ definit astfel: $F_0=1, F_1=0, F_{k+2}=F_k+F_{k+1}$ şi mulţimea

$$M=\left\{\begin{pmatrix}F_k&0&F_{k+1}\\0&1&0\\F_{k+1}&0&F_{k+2}\end{pmatrix}\middle| k\in N\right\}$$

(5p) a) Să se arate că $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\in M$.

(5p) b) Să se arate că M este monoid comutativ în raport cu înmulţirea matricilor.

(5p) c) Să se arate că $F_{k+2}F_k-F_{k+1}^2=(-1)^k$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$.

(5p) a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$.

(5p) b) Să se arate că f este bijectivă.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)}{\ln x}$.

2. Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\sin 2x}{3+\cos^4 x}$, g(x)= $\int_0^x f(t)dt$.

(5p) a) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

(5p) b) Să se arate că g este periodică de perioadă principală π.

(5p) c) Să se calculeze $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 f(x)dx$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 48

Prof. Adrian Muscalu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe sistemul : $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x+y=6 \end{cases}$

(5p) 2. Câte elemente ale mulţimii $A=\{7,11,15,...,999\}$ se divid cu 5 ?

(5p) 3. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}\to\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$, $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$. Să se rezolve ecuaţia $\underbrace{fofo...of}_{de\ 50\ de\ ori}(x)=-2$

(5p) 4. Să se afle $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $x^2+y^2-4x+2y+m>0$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) 5. Fie triunghiul $ABC, A(3,1)$,iar $x+y-6=0, x+7y=0$ ecuaţiile dreptelor suport pentru două mediane ale triunghiului. Să se afle coordonatele mijlocului segmentului [BC].

(5p) 6. Să se afle perimetrul triunghiului ABC, ştiind că $AB=6, B=\frac{\pi}{4}, C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A\in M_2(Z)$, şi funcţia $f:M_2(Z)\to M_2(Z), f(X)=AX$.

(5p) a) Câte elemente are mulţimea $H=\{A^n \mid n\in N\}$.

(5p) b) Să se arate că funcţia f este bijectivă.

(5p) c) Să se rezolve în $M_2(C)$ ecuaţia $X^5=A$.

2. Se considera matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea

$$M=\{X(k)=I_2+kA \mid k\in R, k>-1\}.$$

(5p) a) Să se arate că M este grup abelian în raport cu înmulţirea matricilor.

(5p) b) Să se arate că funcţia $f:M\to\mathbb{R}_+^*, f(X(k))=k+1$ este un izomorfism de grupuri de la $(M,\cdot)$ la $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$.

(5p) c) Să se rezolve în M ecuaţia $X^{100}=I_2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\dfrac{(x+1)^4}{(x-1)^3}$.

(5p) a) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei.

(5p) b) Să se discute ecuaţia $f(x)=m$ după parametrul real m.

(5p) c) Să se arate că $f^{(n)}(2)\in Z$ pentru orice $n\in N$ şi $f^{(100)}(2)$ este divizibil cu 2^{100} dar nu este divizibil cu 2^{101}.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

(5p) a) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

(5p) b) Să se calculeze $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n f(x)dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 49

Prof. Gabriel Necula

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $x^2-0,2\cdot x+\dfrac{1}{20}=0$.

(5p) 2. Să se determine imaginea intervalului $[-1,3]$ prin funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+x^3-3$.

(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia $\cos x=1+\sin^2 x$.

(5p) 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din primele 150 de numere naturale,

www.mateinfo.ro

acesta să nu contină cifra 3.

(5p) 5. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{a} = (\alpha - 1)\vec{i} + (2\alpha + 1)\vec{j}$ şi $\vec{b} = 2\vec{i} + (\alpha + 2)\vec{j}$ să fie coliniari.

(5p) 6. Să se arate ca $\cos(p-q)\cdot\cos(p+q) = \cos^2 p - \sin^2 q$, pentru orice $p, q \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricele $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} pa_1 + a & pb_1 & pc_1 \\ pa_2 & pb_2 + b & pc_2 \\ pa_3 & pb_3 & pc_3 + c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 638 & 469 & 203 \\ 1274 & 939 & 406 \\ 1911 & 1407 & 610 \end{pmatrix}$.

(5p) a) Folosind proprietăţile determinanţilor să se arate că : $\det A = k\,p + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

(5p) b) Să se arate că matricea B este inversabilă şi să se determine inversa sa.

(5p) c) Să se calculeze $B^n, n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^{27} - 4X^{18} + mX^9 + 4X^3 + mX + n$, $m, n \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Să se determine restul imparţirii polinomul f la polinomul $X + 1$.

(5p) b) Să se determine m şi n astfel încât restul imparţirii polinomul f la polinomul $X^2 - 1$ să fie $X + 2$.

(5p) c) Să se determine m şi n astfel încât polinomul f să divizibil cu $(X-1)^2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ definit astfel :
$x_1 > 0$, $(2n+1)x_{n+1} = \ln(x_1 + 3x_2 + 5x_3 + ... + (2n-1)x_n)$, pentru orice $n \in \mathbf{N*}$.

(5p) a) Să se arate că $e^{5x_3} = e^{3x_2} + 3x_2$.

(5p) b) Fie $y_n = (2n-1)x_n$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $I_n = n\int_0^1 x^n \cos x\,dx, n \in \mathbb{N}^*$.

(5p) a) Să se calculeze I_1.

(5p) b) Să se arate că $I_n = -1 + \int_0^1 x^n (x\sin x - \cos x)\,dx$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 50

Prof. Gabriel Necula

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine partea reală numărului $\left(1-i\sqrt{3}\right)^4$.

(5p) 2. Fie x_1, x_2 rădacinile ecuaţiei $x^2-x+\sqrt{5}=0$ .Să se calculeze $\frac{2x_1+3x_2-1}{4x_1+3x_2+5}+\frac{4x_1+3x_2+5}{2x_1+3x_2-1}$.

(5p) 3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $4^x+9^y+\frac{5}{4}=2^{x+1}+3^y$.

(5p) 4. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt[5]{x^2}+\sqrt{y}\right)^{45}$. Să se determine termenul care îi conţine pe x şi pe y la aceeaşi putere.

(5p) 5. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(1,2)$, $B(2,1)$ şi $C(2m+1,m-1)$ să fie coliniare.

(5p) 6. Să se calculeze $\left(2\vec{i}-5\vec{j}\right)\left(-4\vec{i}-3\vec{j}\right)-\left(3\vec{i}-2\vec{j}\right)\left(\vec{i}+6\vec{j}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A\in M_2(\mathbf{R})$ astfel încât $\operatorname{tr}A\neq 0$ şi $\det A\neq 0$.

(5p) a) Să se calculeze AX + XA.

(5p) b) Să se arate că funcţia $f: M_2(\mathbf{R})\to M_2(\mathbf{R})$, $f(X)=AX+XA$ este bijectivă.

(5p) c) Să se determine toate matricele $X\in M_2(\mathbf{R})$ care verifică egalitatea :

$$A(AX+XA)+(AX+XA)A=A(AX^2+X^2A)+(AX^2+X^2A)A.$$

2. Fie legea de compoziţie "$\circ$", definită pe $G=(-1,1)$ prin $x\circ y=\frac{x+y}{1+xy}$, pentru orice $x,y\in G$ şi funcţia $f:G\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

(5p) a) Să se arate că legea de compoziţie "$\circ$" este asociativă.

(5p) b) Să se arate că funcţia f este un izomorfism între grupul $(G,\circ)$ şi grupul $(\mathbb{R},+)$.

(5p) c) Să se arate că $(G,\circ)$ nu este izomorf cu grupul $\left(\mathbb{R}^*,\cdot\right)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\left|x^2-1\right|}$.

(5p) a) Să se arate că graficul funcţiei f admite o asimptotă spre $-\infty$.

(5p) b) Să se calculeze derivatele laterale ale funcţiei f în $x=-1$ şi $x=1$.

(5p) c) Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei f .

2. Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ definit astfel $x_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^n}{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$.

(5p) a) Să se arate că $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$, pentru orice $x\in[0,1]$, pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$.

(5p) b) Să se arate că $x_n=\ln 2-(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx$, pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 51

Prof. Gabriel Necula

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze modulul numărului complex $1+i^3+i^6+i^9+...+i^{2010}$.

(5p) 2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8x+15$. Să se ordoneze crescător $f(2)$, $f(\pi)$ şi $f(e)$.

(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=2$.

(5p) 4. Să se determine numerele naturale n pentru care $C_n^2-C_n^1=2$.

(5p) 5. Să se determine ecuaţia dreptei care conţine punctul $A(2,3)$ şi este perpendiculară pe dreapta determinată de punctele $B(1,4), C(3,2)$.

(5p) 6. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC, ştiind că $AB=AC=4$ şi $m(\measuredangle CBA)=30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie a, b$\in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 < 4b$ şi $A \in M_2(\mathbb{R})$.

(5p) a) Să se calculeze $A^2 + aA + bI_2$.

(5p) b) Să se arate că dacă $\det(A^2 + aA + bI_2) = 0$ atunci trA = -a şi det A = b.

(5p) c) Să se arate că dacă $\det(A^2 + aA + bI_2) = 0$ atunci pentru orice p, q$\in \mathbb{R}$ $\det(A^2 + pA + qI_2) = (p-a)^2 b - (p-a)(q-b)a + (q-b)^2$.

2.

(5p) a) Să se afle numărul polinoamelor de grad mai mic sau egal cu trei din $\mathbb{Z}_2[X]$.

(5p) b) Să se descompună polinomul $f = X^5 + X^3 + 1$ în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_2$.

(5p) c) Să se determine polinoamele ireductibile peste $\mathbb{Z}_2$ de grad mai mic sau egal cu trei.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 2\ln x$.

(5p) a) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f .

(5p) b) Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f .

(5p) c) Să se determine numărul rădacinilor reale ale ecuaţiei $f(x) = m$, unde m este un număr real oarecare.

2. Fie $f, g, h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $g \in \int h(x)dx$, $h \in \int g(x)dx$ si g(0) = h'(0) = 2, g'(0) = h(0) = 1.

(5p) a) Să se determine funcţiile g, h.

(5p) b) Să se arate că dacă f admite primitive pe $\mathbb{R}$ atunci $f \cdot g$ şi $f \cdot h$ admit primitive pe $\mathbb{R}$.

(5p) c) Să se arate că dacă $f \cdot g$ şi $f \cdot h$ admit primitive pe $\mathbb{R}$ atunci f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 52

Prof. Gabriel Necula

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică.Dacă $2x_4+3x_{21}=13$, să se calculeze x_7+4x_{16}.

(5p) 2. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ şi $g(x)=2x^2-x+1$. Să se determine coordonatele punctelor de intersecţie a graficelor celor doua funcţii.

(5p) 3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $5^{2x}-126\cdot 5^{x-1}+5=0$.

(5p) 4. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuaţia $C_{3n+2}^{2n^2}\le 8$.

(5p) 5. Să se calculeze distanţa de la punctul $A(1,-3)$ la dreapta $d:2x-3x+5=0$.

(5p) 6. Fie $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin\alpha=-\frac{4}{9}$. Să se calculeze $\cos\alpha$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $a_0, a_1, a_2, a_3\in\mathbf{C}$ şi $\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

(5p) a) Să se calculeze $\varepsilon^2+\varepsilon+1$.

(5p) b) Să se arate că dacă pentru orice $A, B\in M_3(\mathbf{C})$
$\det(A+a_0B)+\det(A+a_1B)+\det(A+a_2B)=a_3(\det A+\det B)$ atunci
$a_0\in\{1,\varepsilon,\varepsilon^2\}$, $a_1=\varepsilon a_0$, $a_2=\varepsilon^2 a_0$ şi $a_3=3$.

(5p) c) Să se arate că dacă $a_0\in\{1,\varepsilon,\varepsilon^2\}$, $a_1=\varepsilon a_0$, $a_2=\varepsilon^2 a_0$ şi $a_3=3$ atunci
$\det(A+a_0B)+\det(A+a_1B)+\det(A+a_2B)=a_3(\det A+\det B)$, pentru orice $A, B\in M_3(\mathbf{C})$.

2. Fie legea de compoziţie "$\circ$", definită pe $\mathbb{R}$ prin $x\circ y=\ln\left(e^x+e^{x+y}+e^y\right)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Să se arate că legea de compoziţie "$\circ$" este asociativă.

(5p) b) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care are loc $x\circ x\circ x=\ln 7$.

(5p) c) Să se arate $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x\circ x}_{n\ ori}=\ln\left(\left(e^x+1\right)^n-1\right)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{3-x}$.

(5p) a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2}\cdot f(x)$.

(5p) b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei.

(5p) c) Să se arate că $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}>\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n\,dx, n\in\mathbb{N}$.

(5p) a) Să se determine I_0 şi I_1.

(5p) b) Să se arate că $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$, pentru orice $n\ge 2$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_n}{I_{n+1}}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 53

Prof. Nicolae Nicolaescu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze partea reală a numărului complex $z=(1+i)^{2011}$.

(5p) 2. Să se determine m $\in R$ astfel încât mx^2-3mx-1< 0, $\forall x\in R$.

(5p) 3. Fie funcţiile $f,g:R\to R$, f(x)=ax+b şi g(x)=2x-1.Determinaţi a,b $\in R$ astfel încât (fogof)(x)=(gofog)(x), $\forall x\in R$.

(5p) 4. Să se rezolve în R ecuaţia $\sqrt[3]{2x-1}=x$.

(5p) 5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele A(2,-3) şi B(8,-7).Scrieţi ecuaţia mediatoarei segmentului AB.

(5p) 6. Să se demonstreze că cos 40^0 + cos 70^0 + cos 110^0 + cos 140^0 =0.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.În mulţimea S_4 a permutărilor de 4 elemente, se consideră permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$

(5p) a) Să se calculeze σ^4.

(5p) b) Să se rezolve ecuaţia $\sigma^{2011}\cdot x=e$ cu $x\in S_4$.

(5p) c) Arătaţi că ecuaţia $x^6 = \sigma$ nu are soluţii în S_4.

2. Se consideră mulţimea $M = \left\{ A_{a,b} / A_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} a,b \in R \right\} \subset M_3(R)$.

(5p) a) Arătaţi că $A_{a,b} \cdot A_{c,d} = A_{a+c,b+d}$ $\forall a,b,c,d \in R$.

(5p) b) Să se calculeze $\left(A_{a,b}^n\right)^{-1}$.

(5p) c) Să se rezolve ecuaţia $A_{a,a}^5 \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ în $M_3(R)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f: R \to R$ $f(x) = \dfrac{x+m}{\sqrt{x^2 - x + 2}}, m \in R$.

(5p) a) Să se calculeze f'(x).
(5p) b) Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcţiei pentru m=1.
(5p) c) Să se determine ecuaţia asimptotei către -∞.

2. Se consideră funcţia $f: R \to R$ $f(x) = \sin x + \dfrac{x^2}{3} + 1$

(5p) a) Să se calculeze $\int_0^1 f(t)dt$.

(5p) b) Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^3} \int_0^x f(t)dt$.

(5p) c) Să se determine derivata funcţiei $g: R \to R$, $g(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 54

Prof. Nicolae Nicolaescu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze suma 2+7+12+…+102.

(5p) 2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $20^x = 16^x - 2 \cdot 25^x$.

(5p) 3. Să se calculeze $\left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{2011}{2}\right]$.

(5p) 4. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element al mulţimii A={1,2,3,4,5},acesta să verifice relaţia $(n!)^2 \geq n^3$.

(5p) 5. Fie dreptunghiul ABCD cu AB=10 şi BC=6 şi M mijlocul lui BC.Calculaţi $\left|\vec{AB} + \vec{BM}\right|$.

(5p) 6. Să se calculeze ctgx, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ştiind că $\sin x = \frac{1}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră sistemul $\begin{cases} (a+3)x + by + cz = b \\ ax + (b+3)y + cz = c \\ ax + by + (c+3)z = a \end{cases}$ unde $a, b, c \in R$.

(5p) a) Ce condiţie trebuie să îndeplinească a,b,c astfel încât sistemul să fie compatibil determinat?

(5p) b) Rezolvaţi sistemul pentru $a + b + c \neq -3$.

(5p) c) Fie A matricea sistemului.Arătaţi că $A + A^t \neq I_3, \forall a, b, c \in R$.

2. Se consideră polinomul $f \in R[X], f(x) = X^3 + aX^2 + 2bX + 1$.

(5p) a) Să se determine $a, b \in R$ ştiind că polinomul f admite rădăcina 1+i.

(5p) b) Pentru $a = -\frac{3}{2}$ şi $b = \frac{1}{2}$ aflaţi rădăcinile polinomului f.

(5p) c) Calculaţi $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ în funcţie de a şi b.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : (-2, \infty) \to R,\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$.

(5p) a) Să se arate că f este strict descrescătoare pe $(-2, \infty)$.

(5p) b) Să se determine ecuaţia tangentei dusă la graficul funcţiei f în punctul $A\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

www.mateinfo.ro

(5p) c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{\sqrt[3]{5n+1}}\right)^{\frac{1}{f(n)}}$.

2. Se consideră şirul $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x+4}dx,\ n\in N^*$.

(5p) a) Să se calculeze I_2.

(5p) b) Să se demonstreze că $I_{n+1}+4I_n=\frac{1}{n+1}, \forall n\geq 1$.

(5p) c) Să se arate că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 55

Prof. Nicolae Nicolaescu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze suma $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^6}$.

(5p) 2. Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $C_{n+1}^2=3(n-1)$.

(5p) 3. Fie $f:[-2,3]\to R$, f(x)=x^2-3x.Determinaţi imaginea funcţiei.

(5p) 4. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg^2(25x^2)-4\lg 5x+1=0$.

(5p) 5. Fie triunghiul ABC cu AB=8, AC=10, BC=12.Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.

(5p) 6. Fie patratul ABCD cu latura AB=4 cm.Să se calculeze produsul scalar $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Pe $G=(\sqrt{2001},\infty)$definim operaţia $x*y=\sqrt{(x^2-2011)(y^2-2011)+2011}$

(5p) a) Să se arate că operaţia “*” este lege de compoziţie internă pe mulţimea G.

(5p) b) Să se rezolve în G ecuaţia x*x=x.

(5p) c) Să se determine $a,b\in R$ astfel încât funcţia $f:(0,\infty)\to(\sqrt{2011},\infty),\ f(x)=\sqrt{ax+b}$ să fie izomorfism între grupurile $(R_+^*,\cdot)$ şi $(G,*)$.

2. Se consideră mulţimea $H=\{a+b\sqrt{11}\,/\,a,b\in Z, a^2-11b^2=1\}$

(5p) a) Să se arate că $10+3\sqrt{11}\in H$.

(5p) b) Să se arate că $\forall x, y \in H \Rightarrow x \cdot y \in H$.

(5p) c) Să se rezolve în H ecuaţia $x^2 = 45 + 4\sqrt{11}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : R \to R$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x - 2}$.

(5p) a) Să se calculeze f'(2).

(5p) b) Să se calculeze $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}$.

(5p) c) Se defineşte şirul $a_n = f(n+1) - f(n)$. Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} a_n$.

2. Se consideră funcţia $f : R \to R$, $f(x) = \frac{1+3x}{1+x^2}$.

(5p) a) Să se determine o primitivă a lui f care se anulează în punctul 0.

(5p) b) Să se calculeze $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$.

(5p) c) Să se calculeze $\int_0^4 \max(3x, x^2)dx$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 56

Prof. Nicolae Nicolaescu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x-3+(2x-1)^3 + (-x-2)^3=0$.

(5p) 2. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{(\sqrt{3}+i)^5}{(1+i)^2}$.

(5p) 3. Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-5x+7=0$.Calculaţi valoarea expresiei $E=\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$.

(5p) 4. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\frac{x}{x+2} \geq 1 - x$.

(5p) 5. Să se determine $m \in R$ astfel încât vectorii $\vec{u} = m\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} + (m^2 - 1)\vec{j}$ să fie perpendiculari.

(5p) 6. Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ cu $\sin x = \frac{2}{5}$ şi $y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ cu $\cos y = -\frac{1}{5}$ .Calculaţi sin(x+y).

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie $m \in R$ şi punctele $A(3,m), B(m-1,2), C(0,2m)$.

(5p) a) Să se determine m$\in R$ astfel încât punctele A,B,C să fie coliniare.

(5p) b) Să se determine m$\in R$ astfel încât aria triunghiului ABC să fie egală cu 3.

(5p) c) Să se determine m$\in R$ astfel încât $OB \perp AC$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(R)$ şi funcţia $f : M_2(R) \to M_2(R), f(X) = AX$.

(5p) a) Să se arate că $\det(A + xI_3) > 0, \forall x \in R.$

(5p) b) Să se calculeze A^{2001}.

(5p) c) Să se arate că funcţia f este bijectivă.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : R^* \to R$, $f(x) = \frac{\ln(m + x^2)}{x}, m > 0.$

(5p) a) Să se calculeze $f'(1)$.

(5p) b) Să se determine ecuaţia asimptotei către -∞.

(5p) c) Să se calculeze $\lim_{x \to \infty} (1 + f(x))^{\sqrt{x}}$.

2. Se consideră funcţiile $f_n : [1,2] \to R$, $f_n(x) = \frac{1}{(x^2 - x + 1)^n}, n \in N^*$..

(5p) a) Să se arate că $F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} arctgx \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ este o primitivă a lui f_1.

(5p) b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia graficului funcţiei $h : [1,2] \to R$ $h(x) = (x^3 + 1) \cdot f_1(x)$ în jurul axei Ox.

(5p) c) Să se calculeze $\int_1^2 f_2(x)dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 57

Prof. Gabriela Nistor

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[6]{5}$.

(5p) 2. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=(m-1)x^2 + 2(m+1)x + m-3$. Să se afle $m \in \mathbb{R}$, astfel încât valoarea maximă a funcţiei f să fie -1.

(5p) 3. Să se calculeze suma: $9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{n cifre}$.

(5p) 4. Să se determine termenul care nu depinde de x din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2012}$.

(5p) 5. Să se determine ecuaţia înălţimii din C în triunghiul ABC, ştiind că A(0,1), B(2,3) şi C(-2,-1).

(5p) 6. Ştiind că $x \in \mathbb{R}$ şi $\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 1 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ în mulţimea S_7 de 7 elemente.

(5p) a) Stabiliţi paritatea sau imparitatea permutărilor;

(5p) b) Rezolvaţi ecuaţia $\sigma x = \tau$;

(5p) c) Arătaţi că nu există permutările $x, y, z \in S_7$ cu proprietatea:

$xy = yz = zx = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 1 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

2. În mulţimea $M_2(\mathbb{Z})$ se consideră submulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & \hat{2}y \\ y & x \end{pmatrix} / x, y \in \mathbb{Z}_5 \right\} \Rightarrow$

(5p) a) Să se arate că dacă $x, y \in \mathbb{Z}_5$ şi $x^2 - \hat{2}y^2 = \hat{0}$, atunci $x = y = \hat{0}$;

(5p) b) Să se arate că dacă $A \in G$ şi $A \neq O_2$, atunci există $B \in G$, astfel încât $A \cdot B = I_2$

(5p) c) Să se arate că operaţiile de adunare şi înmulţire a matricelor determină pe mulţimea G o structură de corp comutativ.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia f: $[0,\infty) \to \Re$, definită prin $f(x) = \begin{cases} 1, unde\ x = 0 \\ x^x, unde\ x \succ 0 \end{cases}$

(5p) a) Să se arate că f este continuă;

(5p) b) Să se arate că f este derivabilă pe $(0,\infty)$ şi să se calculeze $f''(x)$ pentru $x > 0$;

(5p) c) Să se arate că f nu este derivabilă în $x = 0$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = xe^{-x}$

(5p) a) Să se determine a şi b dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = (ax+b)e^{-x}$ este o primitivă a lui f;

(5p) b) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\int_0^n f(x)dx$;

(5p) c) Să se calculeze $\int_0^n f''(x)dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 58

Prof. Gabriela Nistor

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se rezolve ecuaţia $(x+i)^n + (x-i)^n = 0$.

(5p) 2. Valoarea raportului $\dfrac{\ln 25}{\lg 25}$ este :

(5p) 3. Fie ca ecuaţia $x^2 - mx - 1 = 0$ cu rădăcinile x_1 şi x_2. Determinanţi valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care $x_1^3 + x_2^3 = 4$

(5p) 4.Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel încât parabolele asociate funcţiilor $f(x)=x^2 - 4x + 2$ şi $g(x) = (m-3)x^2 + 2mx$ să aibă acelaşi vârf.

(5p) 5. Se consideră punctele A(4,0); B(4,-4); C(0,3); D(-3,3). Să se determine coordonatele funcţiilor de intersecţie al lui BC şi AD.

(5p) 6. Fie un vector $\vec{u}$ de lungime 2 si un vector $\vec{v}$ de lungime 4, astfel ca unghiul dintre vectori este de $x = 60^{\circ}$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie sistemul $\begin{cases} x-2y+z-t=0 \\ 2x-y+3z-3t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ 2x+(\alpha-1)y+2z+\alpha z=0 \end{cases}$

(5p) a) Să se determine α astfel încât sistemul să aibă soluţii nenule;

(5p) b) Să se rezolve sistemul pentru $\alpha = 0$;

(5p) c) Să se arate că $t(x-y+z)+y(3x+4z)\leq 0$, unde x, y, z, t sunt soluţiile sistemului.

2. Fie $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}_3\right\}$

(5p) a) Să se afle numărul elementelor mulţimii *M;*

(5p) b) Să se arate că $(M,+,\cdot)$ este corp;

(5p) c) Dacă $A\in M$ să se calculeze A^8.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.

(5p) a) Să se arate că, pentru $x\succ 0$ avem $x-\frac{x^2}{2}\prec \ln(1+x)\prec x$;

(5p) b) Dacă $a_n=(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{n}{n^2})$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} x^x$.

2. Se consideră $I_0=\int_0^1 \frac{1}{x^2+6x+10}dx$ şi $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+6x+10}dx$. Să se arate că:

(5p) a) $I_{n+2}+6I_{n+1}+10I_n=\frac{1}{n+1}$;

(5p) b) Şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător;

(5p) c) $\frac{1}{17(n+1)}\leq I_n\leq \frac{1}{17(n-1)}, (\forall) n\geq 1$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 59

Prof. Gabriela Nistor

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Dacă $z+\frac{1}{z}=\sqrt{3}$, să se calculeze $z^n+\frac{1}{z^n}$.

(5p) 2. Să se rezolve ecuaţia $\log_{x^2}(x-4)-\log_x(x^2-4x)=-\frac{1}{2}$.

(5p) 3. Să se rezolve sistemul şi să se interpreteze geometric $\begin{cases} y=x+1 \\ y=x^2+x-3 \end{cases}$.

(5p) 4. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ a.î. funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+ax+b$ îşi atinge valoarea maximă 3 în punctul $x=-2$.

(5p) 5. Fie triunghiul ABC determinat de dreptele $(AB): x+2y-4=0$; $(BC): 3x+y-2=0$; $(AC): x-3y-4=0$. Să se calculeze aria ΔABC.

(5p) 6. Dacă $\sin x+\cos x=0,2$ şi $\cos x\prec 0$, să se calculeze $\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie determinanţii

$$d_1=|1|; d_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}; d_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}; \ldots; d_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

(5p) a) Să se calculeze d_1, d_2, d_3. $\mathbb{R}$

(5p) b) Fie suma $S_{k+1}=d_1-d_2+d_3-\ldots+(-1^k)d_{k+1}, k\geq 1$. Să se calculeze s_3-s_2, s_4-s_3 şi semnul expresiei $s_{k+1}-s_k$, $k\geq 2$.

(5p) c) Să se calculeze $d_n, n\geq 2$.

2. Fie polinomul $P(x)=X^9+(X+1)^6$ şi $Q(x)=X^2+X+1$, iar α şi β rădăcinile polinomului Q.

(5p) a) Pentru fiecare $j=\{0,1,2,_{...},9\}$ şi a_j coeficientul lui X^j din polinomul $P(X)$. Să se calculeze $S=\sum_{j=0}^{9} a_j$;

(5p) b) Să se calculeze $A=\alpha^2+\beta^2$ şi $B=\alpha^3+\beta^3$;

(5p) c) Să se afle valorile $P(\alpha)$ şi $P(\beta)$ şi să se arate că polinomul $P(x)-2$ se divide cu polinomul $Q(x)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţiile $f:D_1\to\mathbb{R}, g:D_2\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=x+\frac{1}{x}, g(x)=\frac{f(x)}{f`(x)}$.

(5p) a) Să se determine domeniul de definiţie şi domeniul de derivabilitate pentru funcţiile *f* şi *g*;

(5p) b) Să se demonstreze ă pentru orice $x\in\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$ are loc identitatea $g`(x)[f`(x)]^2=[f`(x)]^2-f(x)f"(x)$.

(5p) c) Să se determine limitele şirurilor definite prin $y_n=f(x_n^{`}), z_n=f(x_n^{"})$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{(e^x+1)(e^x+2)(e^x+3)}$

(5p) a) Să se calculeze: $\int\frac{dx}{e^x+a}, a\succ 0$;

(5p) b) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} S_n$, unde $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{2k-1}{2n})$;

(5p) c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{F(x)}{x}$, unde *F* este o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 60

Prof. Gabriela Nistor

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Fie $E=\left\{(a,b)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\,\middle|\,\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}\right\}$. Calculaţi: a^2+b^2.

(5p) 2. Dacă $a=\log_6 4*\log_8 12$ şi $b=\frac{\log_3 8}{\log_{12} 6}$. Să se calculeze b în funcţie de a.

(5p) 3. Să se calculeze valoarea expresiei $E = x^3 + y^3$, dacă x si y sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases}$$

(5p) 4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir astfel ca suma primilor n termeni este , pentru $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine a şi b astfel încât şirul să fie o progresie aritmetică şi să se determine raţia. $x^3 + y^3 = x^2 + xy + y^2 - 2xy = 3 - 2xy$

(5p) 5. Se consideră triunghiul ABC cu BC=2, AB=$\sqrt{2}$, AC=$1+\sqrt{3}$. Să se calculeze cosA.

(5p) 6. Să se simplifice expresia: $E = \frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{cosx}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie în $\mathbb{Z}_8$ sistemul: $\begin{cases} \hat{2} + y + \hat{4}z = \hat{2} \\ \hat{3}x + \hat{2}y + z = \hat{4} \\ \hat{6}x + \hat{4}y + \hat{5}z = \hat{1} \end{cases}$.

(5p) a) Să se arate că matricea asociată sistemului este inversabilă şi să se calculeze A^{-1};

(5p) b) Calculaţi $\alpha = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$, unde (x_0, y_0, z_0) este soluţia sistemului;

(5p) c) Rezolvaţi ecuaţia matricială $AX=B$, unde B=$\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$

2. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, şi H mulţimea tuturor matricelor obţinute din I_n prin schimbarea a două linii între ele .

(5p) a) Să se arate că $(\forall) A \in H$ este inversabilă şi $A^{-1} \in H$.

(5p) b) Să se arate că H nu este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor;

(5p) c) Să se descrie elementele grupului multiplicativ finit cu cel mai mic ordin care conţine pe H.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră numerele reale $a_0, a_1, ..., a_n$ care verifică relaţia

$$\frac{a_0}{1} + \frac{2a_1}{2} + \frac{2^2 a_2}{3} + ... + \frac{2^n a_n}{n+1} = 0, n \geq 1$$

(5p) a) Considerându-se funcţia $g : [1, e^2] \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{a_0 \ln x}{1} + \frac{a_1 \ln^2 x}{2} + ... + \frac{a_n \ln^{n+1} x}{n+1}$, să se calculeze $g(1) + g(e^2)$.

(5p) b) Să se calculeze $g`(x)$ şi să se verifice că funcţia g este o funcţie Rolle pe intervalul $[1, e^2]$;

(5p) c) Arătaţi că funcţia $f : [1, e^2] \to \mathbb{R}, f(x) = a_0 + a_1 \ln x + a_2 \ln^2 x + ... + a_n \ln^n x$ are cel puţin un 0 în intervalul $[1, e^2]$.

www.mateinfo.ro

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}_+$ şi $I_n = \int_0^1 x^n (e^x + a) e^{e^x + ax} dx$

(5p) a) Să se calculeze $I_1(a)$

(5p) b) Să se arate că şirul $\{I_n(a)\}_{n \ge 1}$ este convergent;

(5p) c) Să se demonstreze că $\lim_{x \to \infty} I_n(a) = 0$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 61

Prof. Oláh Csaba

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se demonstreze că $\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} + \sqrt{45 - 20\sqrt{5}} \in N$.

(5p) 2. Să se determine $m \in R$ astfel încât $x^2 - mx + m + 2 \ge 0, \forall x \in R$.

(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia: $\log_{81} x + \log_{27} x + \log_9 x + \log_3 x = 1$.

(5p) 4. Câte numere de patru cifre se pot alcătui din cifrele $0, 1, 2, 3, 4$, ca cifrele să nu se repete?

(5p) 5. Fie punctele $A(1;4), B(2;5)$ in sistemul ortogonal xOy. Să se afle coordonatele punctului C dacă se ştie că centrul de greutate al triunghiului ABC este $G(2;4)$.

(5p) 6. Să se demonstreze egalitatea următoare: $arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie determinantul ciclic de ordinul 3, $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}, a, b, c \in R$.

(5p) a) Să se demonstreze că $\Delta = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$;

(5p) b) Să se demonstreze că: $\Delta = 0 \Rightarrow a = b = c$ sau $a + b + c = 0$;

(5p) c) Să se rezolve ecuaţia următoare în R: $(3x+4)^3 + (2-x)^3 + (1-2x)^3 = 0$.

2. Fie polinomul $P \in R[X]$, $P = X^3 - 4X^2 + 3X + 2$.

www.mateinfo.ro

(5p) a) Să se verifice dacă $a=1-\sqrt{2}$ este rădăcina polinomului P;
(5p) b) Să se demonstreze că P are o rădăcină raţională;
(5p) c) Să se demonstreze că suma $S_k=a_1^k+a_2^k+a_3^k\in Z$, $k\in N$, unde a_1,a_2,a_3 sunt rădăcinile polinomului P.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie şirul $(a_n)_{n\ge1}$, $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n$. Să se demonstreze că:

(5p) a) $\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}, \forall n\in N^*$;
(5p) b) Şirul $(a_n)_{n\ge1}$ este descrescător;
(5p) c) Şirul $(a_n)_{n\ge1}$ este convergent.

2. Fie funcţia $f:D\to R$, $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^3-7x+6}$.

(5p) a) Să se demonstreze că $x_1=1$ şi $x_2=2$ sunt rădăcinile funcţiei $g(x)=x^3-7x+6$;
(5p) b) Să se calculeze integerala definită: $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$;
(5p) c) Să se determine funcţia h de gradul I, pentru care: $\int f(x)h(x)dx=\ln\frac{e^x}{x+3}+c$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 62

Prof. Oláh Csaba

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze $1+i+i^2+...+i^{2011}$.
(5p) 2. Să se afle maximul funcţiei $f:R\to R$, $f(x)=\left(1-\sqrt{2}\right)x^2+x-\left(1+\sqrt{2}\right)$.
(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia următoare în R: $\sqrt{1-\sqrt{1-x}}=0$.
(5p) 4. Care este probabilitatea ca alegând un număr natural între 1 şi 50, acesta să fie divizibil cu 2 sau cu 3 sau cu 5?

(5p) 5. Să se afle $m \in R^*$ astfel încât dreptele d_1, d_2 cu ecuaţiile $d_1 : my - (m-3)x + 2 = 0$, $d_2 : (m^2+1)y - mx + 1 = 0$ să fie perpendiculare.

(5p) 6. Să se afle aria triunghiului ABC dacă $AB = 4$, $AC = 5$ şi $\cos A = \frac{2}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A, B \in M_3(R)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(5p) a) Să se demonstreze că $A = B + I_3$ şi să se calculeze B^3;

(5p) b) Să se calculeze $A^n, n \in N^*$;

(5p) c) Să se calculeze $S = \sum_{k=1}^{n} A^k$.

2. Fie polinomul $P \in R[X]$, $P = X^4 + X^3 + 2X^2 - 4X - 24$.

(5p) a) Să se determine restul la împărţirea lui P cu $X^2 - 4$;

(5p) b) Să se calculeze $S = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{a_i}$, unde $a_i, i = \overline{1,4}$ sunt rădăcinile polinomului P;

(5p) c) Să se demonstreze că P nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţiile $f, g, h : R^* \to R$, $f(x) = arctg(x+1), g(x) = arctg\frac{1}{x}, h(x) = arctgx$.

(5p) a) Demonstraţi că $h'(x) - g'(x) = \frac{2}{1+x^2}$;

(5p) b) Să se calculeze $\left(arctg\frac{x^2+x-1}{2x+1}\right)'$ (folosind, eventual, formula $arctgx - arctgy = arctg\frac{x-y}{1+xy}$)

(5p) c) Să se demonstreze că $\left(arctg\frac{1-x^2}{2x}\right)' + \left(arctg\frac{x^2+x-1}{2x+1}\right)' = \left(arctg\frac{1}{x^2+x+1}\right)'$.

2. Fie funcţia $f : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to R$, $f(x) = ctgx$ şi integrala definită $I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} ctg^n x dx$, $n \in N$.

(5p) a) Să se demonstreze că $(ctgx)' + ctg^2 x + 1 = 0$;

(5p) b) Să se calculeze I_0 şi I_2 ;

(5p) c) Să se demonstreze că $I_{2n}+I_{2n-2}=\dfrac{3^{n-1}\sqrt{3}-1}{2n-1}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 63

Prof. Oláh Csaba

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze $\dfrac{\left(i^{10}-1\right)\cdot\left(i^{8}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(i^{2}-1\right)}{\left(i^{9}-1\right)\left(i^{7}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(i^{1}-1\right)}$.

(5p) 2. Să se rezolve ecuaţia următoare în R: $x^2+2x+\dfrac{1}{(x+1)^2}=1$.

(5p) 3. Să se rezolve sistemul pe $R\times R$: $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1\\ x^3+y^3=16\end{cases}$.

(5p) 4. Să se afle numărul termenilor raţionali ai dezvoltării $\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}\right)^{40}$.

(5p) 5. Fie punctul $A(-3;5)$ în sistemul ortogonal xOy, B simetricul lui A faţă de origine. Să se afle coordonatele punctului C din cadranul I astfel încât triunghiul ABC să fie isoscel şi dreptunghic în C.

(5p) 6. Să se demonstreze că $arctg\,\dfrac{1}{2}+arctg\,\dfrac{1}{5}+arctg\,\dfrac{1}{8}=\dfrac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul liniar $\begin{cases} x+y+z=m+1 \\ mx+y+mz=m+1 \\ x+my+2mz=m^2-m+1 \end{cases}$, $m \in R$ iar $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m \\ 1 & m & 2m \end{pmatrix}$ matricea sistemului.

(5p) a) Să se calculeze $\det A$;

(5p) b) Să se demonstreze că $m \neq 1$ sau $m \neq \frac{1}{2} \Rightarrow rangA \geq 2$;

(5p) c) Să se demonstreze că $m \in Z \setminus \left\{\frac{1}{2};1\right\} \Rightarrow x,y,z \in Z$.

2. Fie operaţia algebrică $x*y=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$, $x,y \in [-1;1]$.

(5p) a) Să se demonstreze că "$*$" este lege de compoziţie internă pe intervalul $I=[-1;1]$;

(5p) b) Să se demonstreze că "$*$" este asociativă pe intervalul $[-1;1]$;

(5p) c) Să se calculeze $\frac{4}{5}*\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}*\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:R_+ \to R$, $f(x)=x \cdot e^{\ln(x^2+1)}$.

(5p) a) Să se calculeze $f'(x)$;

(5p) b) Să se afle limita $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$;

(5p) c) Să se studieze monotonia funcţiei f pe domeniul maxim de definiţie.

2. Fie funcţia $f:R_+ \to R$, $f(x)=\frac{x^2+1}{x^3+3x+1}$.

(5p) a) Să se calculeze $F(x)=\int f(x)dx$;

(5p) b) Să se demonstreze că aria cuprinsă între axele Ox si Oy, dreapta $x=1$ şi graficul funcţiei f este $\frac{1}{3}\ln 5$;

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n^2+k^2}{n^3+3kn^2+k^3}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 64

Prof. Oláh Csaba

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze $\lg\left(5\sqrt{2}-7\right)+\lg\left(5\sqrt{2}+7\right)-\lg\frac{1}{1000}$.

(5p) 2. Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2+2\sqrt{2}x-1=0$ să se demonstreze că $\sqrt{2}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)+2x_1x_2\in Q$.

(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia următoare pe intervalul $(0;\pi)$: $\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$.

(5p) 4. În maxim câte puncte se pot intersecta un triunghi, un pătrat şi un cerc?

(5p) 5. Fie punctele $A(1;2), B(2;3)$ şi $C(3;n)$ în sistemul cartezian. Să se afle valoarea lui n astfel încât $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

(5p) 6. Să se demonstreze că in orice triunghi ABC este adevărată următoarea relaţie $\sin A\sin B\sin C=\frac{pr}{2R^2}$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A_k\in M_2(R)$, $A_k=\begin{pmatrix}\frac{1}{k(k+1)} & k\cdot k! \\ \frac{\sin 1}{\cos k\cos(k+1)} & 1\end{pmatrix}$, $k\in N^*$.

(5p) a) Să se calculeze A_1;

(5p) b) Să se demonstreze că $\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!=(n+1)!-1$;

(5p) c) Să se calculeze suma $S=\sum_{k=1}^{n}A_k$.

2. Fie operaţia algebrică $x*y=\frac{x+y}{1+xy}$, $x,y\in(-1;1)$.

(5p) a) Să se demonstreze că "$*$" este lege de compoziţie internă pe intervalul $I=(-1;1)$;

(5p) b) Să se demonstreze că $(I,*)$ este grup abelian (fără a verifica asociativitatea);

(5p) c) Să se demonstreze că există un izomorfism între $(R_+,\cdot)$ şi $(I,*)$, $f:R_+\to(-1;1)$, $f(x)=\dfrac{\alpha x-1}{x+1}$, $\alpha\in R$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $x\in R^*\setminus\{1\}$.

(5p) a) Să se calculeze $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$;

(5p) b) Să se demonstreze că $(1+x)\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+x^{2k}\right)=\dfrac{1-x^{4n}}{1-x}$;

(5p) c) Să se calculeze limita $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1-x^2\right)\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+x^{2k}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{4n}x^k}$.

2. Fie funcţiile $f:R^*\to R$, $f(x)=arctg\dfrac{1}{x}$, $g:D\to R$, $g(x)=e^{\ln(arctgx)}$. Să se calculeze următoarele primitive:

(5p) a) $\int f(x)dx$;

(5p) b) $\int g(x)dx$;

(5p) c) $\int arctg\dfrac{x^2-1}{2x}dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 65

Prof. Enache Paul

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se rezolve ecuaţia : $\log_2 x+\log_3 x=1$.

(5p) 2. Să se determine valorile parametrului real m , asfel încât ecuaţia $x^2+x+m=0$ să aibă soluţii reale şi distincte.

(5p) 3. Dacă $\text{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{7}{2}$, să se calculeze E=$\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$

(5p) 4. Se dă o mulţime cu 6 elemente. Să se calculeze probabilitatea ca alegând aleator o submulţime a sa , aceasta să aibă 3 elemente.

(5p) 5. În planul cartezian se consideră vectorii coliniari $\vec{u}=k\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\vec{v}=\vec{i}-3\vec{j}$. Să se afle k

www.mateinfo.ro

(5p) 6. Fie dreapta d de ecuaţie 8x-15y+m=0 şi punctul M(1,1). Să se determine mulţimea A={m$\in$ **R** / distanţa de la M la d este 1}.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se dă matricea A=$\begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$, cu m şi x numere reale.

(5p) a) Calcutati detA^{10}

(5p) b) Determinaţi m astfel încât matricea să fie inversabilă pentru orice număr real x.

(5p) c) Pentru x=2 şi m=2 calculaţi inversa matricei A.

2. Se consideră polinomul f=X^4+aX^3+2X^2+bX+c , cu coeficienţi reali

(5p) a) Să se determine a pentru care rădăcinile lui f verifică $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=5$.

(5p) b) Pentru a =3 , să se determine b şi c astfel încât f să admită rădăcina x_1=1+i.

(5p) c) Pentru valorile determinate să se rezolve ecuaţia $(f(x))^2$=0.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. .Se consideră funcţia f: D$\to$**R ,** f(x)=$\dfrac{x+1}{x^2+ax+b}$,a,b$\in$**R** , unde D este domeniul maxim de definiţie.

(5p) a) Să se calculeze f ’(x).

(5p) b) Să se determine a şi b astfel încât f să admită un punct de extrem în x=1 şi asimptota verticală x= -2.

(5p) c) Pentru a=7 şi b= 10 să se găsescă suma punctelor de extrem local ale lui f.

2. Se consideră funcţiile f_n : **R**$\to$ **R** , unde f_1(x)=1 şi f_{n+1}(x)= $\int_1^x f_n(t)dt$, ($\forall$) x$\in$**R** , ($\forall$) n$\in$ **N*.**

(5p) a) Să se determine f_2 şi f_3.

(5p) b) Să se calculeze f_n , unde n$\in$ **N*.**

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(3)$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 66

Prof. Enache Paul

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se rezolve ecuaţia $x^2-3|x|-4=0$.
(5p) 2. Se dă funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2x+3$. Să se rezolve ecuaţia $(f\circ f\circ f)(x)=x$.
(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia $\sin 2x-4\cos x=0$
(5p) 4. O clasă este formaţă din 13 băieţi şi 17 fete.Care este probabilitatea ca alegând o grupă de 5 elevi ce pleacă într-o excursie , aceasta să nu conţină niciun băiat.
(5p) 5. . În planul ortonormat xOy se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}+m\vec{j}$. Să se determine m astfel încât vectorii să fie perpendiculari.
(5p) 6. Să se determine numărul real b astfel încât dreptele de ecuaţii $x+2y-3=0$, $2x+y+6=0$ şi $5x+by-1=0$ să fie concurente.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. . Se consideră sistemul :

$$\begin{cases}3ax+(2a+1)y+(a+1)z=a\\(2a-1)x+(2a-1)y+(a-2)z=a+1, a\in R\\(4a-1)x+3ay+2az=1.\end{cases}$$

(5p) a) Calculaţi determinantul sistemului.
(5p) b) Determinaţi valorile lui a pentru care sistemul este compatibil determinat.
(5p) c) Pentru $a\in\{1,-1\}$ studiaţi natura sistemului şi în caz de compatibilitate determinaţi solutiile sistemului.

2. Se consideră polinoamele f,g cu coeficienţi reali , $f(X)=(X+1)^{302}+X+a$, $g(X)=X^2+3X+3$.

(5p) a) Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile lui g , să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.
(5p) b) Să se determine restul împărţirii polinomului $(X+1)^{300}$ la g.
(5p) c) Să se determine numărul real a astfel încât f să fie divizibil cu g.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. . Se consideră funcţia funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{x^{4n+2}}{3^{2n}+x^{4n}}}$.

(5p) a) Să se expliciteze funcţia f .
(5p) b) Studiaţi continuitatea funcţiei f .
(5p) c) Studiaţi derivabilitatea funcţiei f.

2. Se consideră funcţia f: $[1,3]\to \mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{|x-a|+1}$

(5p) a) Să se arate că funcţia f este integrabilă oricare ar fi numărul real a.
(5p) b) Să se calculeze $I(a)=\int_1^3 f(x)dx$, pentru $a\in \mathbf{R}$ **.**
(5p) c) Calculaţi $\int_0^2 I(a)da$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 67

Prof. Enache Paul

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se rezolve în R ecuaţia (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120.
(5p) 2. Determinaţi numărul de funcţii $f:R\to R$ care verifică $f^2(x)-f(x)+1=0$, pentru orice x număr real.
(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia : $\log_x(1-x)+\log_{1-x}x=\frac{5}{2}$.
(5p) 4. Să se afle numărul de funcţii strict crescătoare definite pe A={1,2,3,4,5} cu valori în B={1,2,3,4,5,6,7}.
(5p) 5. Să se arate că $8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}=\dfrac{\sin x}{\sin\frac{x}{8}}$, pentru orice $x\in(0,\frac{\pi}{2})$
(5p) 6. Dacă vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ verifică $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$, să se calculeze $|\vec{a}-\vec{b}|$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră $\sigma\in S_4$, $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$.

(5p) a) Să se calculeze m(σ).
(5p) b) Să se calculeze σ^{2011} .
(5p) c) Să se rezolve ecuaţia $\sigma^5 x = x\sigma$.

2. Se dau $f_n, g \in R[X]$, $n \in N^*$, unde $f_n = X^{3n} + ax + b$, $g = X^2 + X + 1$.
(5p) a) Să se determine a şi b astfel încât f_3 să admită rădăcina $x_1 = i$.
(5p) b) Să se calculeze $\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{x_k}$, unde $x_1, x_2, ..., x_6 \in C$ sunt rădăcinile lui f_2 , iar $b \neq 0$.
(5p) c) Să se determine numerele reale a şi b astfel încât f_n să fie divizibil cu g.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se dă funcţia $f: R \setminus \{0,-2\} \to R$, $f(x) = \frac{1}{x(x+2)}$.
(5p) a) Să se determine asimptotele lui f.
(5p) b) Să se determine intervalele de monotonie ale lui f.
(5p) c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n} f(k)\right)^n$.

2. Se consideră funcţia $f: R \to R$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$.
(5p) a) Să se arate că f admite primitive pe R.
(5p) b) Să se determine o primitivă a restricţiei lui f la intervalul $[1, +\infty)$.
(5p) c) Să se calculeze aria suprafeţei cuprinse între graficul funcţiei f , axa Ox şi dreptele de ecuaţii
$x = -2$ şi $x = 2$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 68

Prof. Enache Paul

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se rezolve ecuaţia $\left|\left||x-1|-1\right|-1\right| = \frac{1}{2}$.
(5p) 2. Aflaţi numărul real m pentru care graficul funcţiei $f: R \to R$, $f(x) = x^2 - 6x + m$ este tangent axei Ox.
(5p) 3.Găsiţi primul termen şi raţia unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_1 + a_2 + \ldots + a_{25} = 39$ şi

$2a_3$-a_7=-4.

(5p) 4. Care este probabilitatea ca alegând aleator o funcţie f:$\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$, aceasta să fie injectivă ?

(5p) 5.Determinaţi $\alpha\in R$ pentru care vectorii $\vec{a}(2\alpha-1,5)$ şi $\vec{b}(1,1+\alpha)$ sunt coliniari.

(5p) 6. Arătaţi că $\sin\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră sistemul $\begin{cases}x+y+mz=1\\x+my+z=1\\mx+y+z=1\end{cases}$, m număr real.

(5p) a) Calculaţi determinantul sistemului , notat D.
(5p) b) Determinaţi m astfel încât D=0.
(5p) c) Analizaţi natura sistemului pentru m=1 şi pentru m= -2 , iar în cazul în care este compatibil rezolvaţi-l.

2. Se consideră mulţimea G=$\left\{A(a)=\begin{pmatrix}2-a & a-1\\2(1-a) & 2a-1\end{pmatrix}/\, a\in R^*\right\}$

(5p) a) Arătaţi că dacă A(a) şi A(b)$\in$G ,atunci A(a)A(b)$\in$G.
(5p) b) Arătaţi că G este grup cu înmulţirea matricelor.
(5p) c) Arătaţi că grupul de la punctul b) este izomorf cu grupul R* înzestrat cu înmulţirea numerelor.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se dă funcţia f:R$\to$R , f(x)=$\begin{cases}ax+b, x\le 0\\ \frac{x-1}{x^2+1}, x>0\end{cases}$,unde a şi b sunt numere reale.

(5p) a) Să se determine a şi b astfel încât f să fie derivabilă pe R.
(5p) b) Pentru a=1 şi b= -1 , să se afle asimptotele orizontale şi verticale ale lui f.
(5p) c) Pentru a=1 şi b= -1 , să se determine punctele de extrem local ale lui f.

2. Se consideră funcţia f:[0,+∞)$\to$R , f(x)=$\begin{cases}x\left[\frac{1}{x}\right], x>0\\0, x=0\end{cases}$

(5p) a) Să se cerceteze dacă funcţia admite primitive pe intervalul $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

(5p) b) Să se arate că f este integrabilă pe intervalul $\left[\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}\right]$, unde n$\in$N* şi să se calculeze $\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx$.

(5p) c) Arătaţi că f admite primitive pe $[1,+\infty)$ şi determinaţi o primitivă a sa pe acest interval.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 69

Prof. Ileana Rîcu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p 1. Determinaţi numărul complex z ştiind că $2z+\overline{z}=9+i$

5p 2. Rezolvaţi ecuaţia: $\left[\dfrac{2x+1}{5}\right]=\dfrac{3x-1}{4}$

5p 3. Fiind dată ecuaţia $mx^2 - m(3x+10) - (x^2+3x+10)=0$, să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile să fie una inversa celeilalte.

5p 4. Să se determine numărul termenilor raţionali ai dezvoltării $\left(\sqrt[5]{4}+1\right)^{50}$

5p 5. Sa se scrie ecuaţia înălţimii dusă din A în ΔABC ştiind că A(0;9),B(2;-1) si C(5;-3)

5p 6. Rezolvati in $\mathbb{R}$ inecuatia: $\dfrac{1}{2}\ln(2x)\le\ln(3-x)-\ln\sqrt{x+1}$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se da matricea $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\ m&2&3\\ m^2&2^2&3^2\end{pmatrix}; m\in\mathbb{R}$

5p a) Să se rezolve ecuaţia det(M)=0.

5p b) Se consideră sistemul de ecuaţii liniare: $\begin{cases}x+y+z=0\\ mx+2y+3z=0\\ m^2x+2^2y+3^2z=0\end{cases}$;sa se determine mulţimea valorilor lui **m** pentru care sistemul admite numai soluţia banală.

5p c) Să se rezolve sistemul pentru m=2 .

2. Fie matricea $A_a=\begin{pmatrix}1&0&a\\ -a&1&-\dfrac{a^2}{2}\\ 0&0&1\end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}$ şi

mulţimea $G=\left\{A/A\in M_3(\mathbb{R}); A_a=\begin{pmatrix}1&0&a\\ -a&1&-\dfrac{a^2}{2}\\ 0&0&1\end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}\right\}$.

5p a) Demonstraţi egalitatea $A_a \cdot A_b = A_{a+b}, \forall a,b \in \mathbb{R}$

5p b) Demonstraţi că mulţimea (G,·) are structură de grup,unde „·" reprezintă operaţia de înmulţire a matricelor.

5p c) Arătaţi că $(G,\cdot) \simeq (\mathbb{R},+)$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}; f(x) = \dfrac{(x+a)^2}{bx-1}; a,b \in \mathbb{R}$

5p a)Să se determine **a** şi **b** astfel încât graficul funcţiei f să admită dreapta de ecuaţie y=x+3 asimptotă oblică.

5p b) Pentru a=b=1,să se demonstreze că $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}; x \neq 1$

5p c) Pentru a=b=1,să se demonstreze că f(x)≥8, $(\forall) x \in (1,\infty)$

2. Folosind eventual inegalitatea : $\ln(1+x) > \dfrac{x}{1+x}, \forall x > 0$, să se arate că:

5p a) $\displaystyle\int_1^2 (x+1)\ln(x+1)dx > \frac{3}{2}$

5p b) $\displaystyle e-1 < \int_0^1 (x+1)^{x+1}dx$

5p c)Să se calculeze aria determinată de graficele funcţiilor f,g :[1;2]→ $\mathbb{R}$,f(x)=ln(1+x) , $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ şi dreptele de ecuaţii x=1,x=2

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 70

Prof. Ileana Rîcu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p 1. Fie $z = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{i}$;calculaţi z^6.

5p 2. Să se rezolve ecuaţia: $\left\{x+\dfrac{1}{3}\right\} = \dfrac{1}{2}$

5p 3. Să se afle coordonatele centrului de greutate al ΔABC,unde A(2;3),B(-2;5),C(-3;2).

5p 4. Să se rezolve ecuaţia:3(1+cos$x$)=2sin^2x

www.mateinfo.ro

5p 5. Să se determine x ştiind că termenul al 3-lea al dezvoltării binomului $\left(x+x^{\lg x}\right)^5$ este egal cu 1000000.

5p 6. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele P(2,-1),A(1,2),B(4,1).Să se determine lungimea vectorului $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie matricea $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\alpha\in\mathbb{R}$

5p a) Determinaţi rangul matricei A.

5p b) Stabiliţi dacă matricea A este inversabilă şi,în caz afirmativ,calculaţi inversa sa.

5p c) Calculaţi A^n , $n\in\mathbb{N}^*$

2. Pe $\mathbb{R}$ considerăm legea de compoziţie „$\circ$” definită prin $x\circ y=x+y+\sqrt{5},\forall x\in\mathbb{R}$

5p a) Determinaţi elementul neutru pe care îl admite legea de compoziţie

5p b) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^x\circ 4^x=6+\sqrt{5}$

5p c) Se consideră numărul $a=\sqrt{5}\circ\left(-2\sqrt{5}\right)\circ\left(3\sqrt{5}\right)\circ\left(-4\sqrt{5}\right)\circ.....\circ\left(-20\sqrt{5}\right)$.Să se arate că $20<a<21$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(2+\cos x)e^{1-x}$

5p a) Arătaţi că f(x) >0. $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p b) Arătaţi că $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p c) Stabiliţi monotonia funcţiei date

2. Fie şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n=\int_0^1(1-x)^n e^x dx$

5p a) Arătaţi că funcţia $F:[0;1]\to\mathbb{R},F(x)=(2-x)e^x$ este o primitivă a funcţiei $f:[0;1]\to\mathbb{R}, f(x)=(1-x)e^x$

5p b) Arătaţi că $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$

5p c) Deduceţi că $I_n\le\frac{e}{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 71

Prof. Ileana Rîcu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi suma $S=\sum_{k=2}^{n}\log_2\left(1-\frac{1}{k}\right)$

(5p) 2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$ .Să se determine imaginea funcţiei date.

(5p) 3.Calculaţi suma: $C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+....+C_{n+1}^{n+1}$

(5p) 4.Să se afle exponentul puterii binomului $\left(\sqrt[3]{a^2}+a^{-1}\right)^n$ ştiind că coeficienţii binomiali ai termenilor al 4-lea şi al 6-lea sunt egali între ei.

(5p) 5. Trapezul isoscel *ABCD* are bazele [*AB*] şi [*CD*] şi lungimea înălţimii egală cu 6. Să se calculeze $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|$

(5p) 6. Fie $D=\left\{x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)/\frac{2}{\pi}<tgx<\frac{\pi}{2}\right\}$.Demonstraţi că este adevărată relaţia $tg(ctgx)>ctg(tgx)\ \forall x\in D$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $\omega=\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$ si $A=\begin{pmatrix}1 & \omega\\ \omega^2 & 1\end{pmatrix}$

(5p) a)Calculaţi rang(A).

(5p) b) Arătaţi că $A^n=2^{n-1}\cdot A,\forall n\in\mathbb{N}^*$

(5p) c) Determinaţi numărul $a_n\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2+A^3+A^4+....+A^n=a_n\cdot A$, $n\in\mathbb{N},n\geq 2$

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_{12},+,\cdot)$ şi matricea $A=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0} & \hat{5}\\ \hat{x} & \hat{1} & \hat{2}\\ \hat{4} & \hat{3} & \hat{1}\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{Z}_{12})$

(5p) a) Calculaţi suma elementelor inversabile din $\mathbb{Z}_{12}$

(5p) b) Determinaţi mulţimea valorilor lui $x \in \mathbb{Z}_{12}$ pentru care matricea A este inversabilă.

(5p) c)Pentru $x = \hat{0}$, rezolvaţi în $M_3(\mathbb{Z}_{12})$ ecuaţia $YA = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.Fie funcţia $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$,definită prin $f(x) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1, x > 0 \end{cases}$

(5p) a) Studiaţi continuitatea funcţiei date pe domeniul de definiţie.

(5p) b) Studiaţi derivabilitatea funcţiei date în $x_0=0$ şi arătaţi că $f'(x) = 2x(1 - \ln x)$ pentru $\forall x > 0$

(5p) c) Scrieţi ecuaţia tangentei la curba reprezentativă a funcţiei f în punctul de abscisă x=1

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $I_n = n\int_0^1 x^n \cos x dx$

(5p) a)Calculaţi I_1

(5p) b) Dacă $g:[0;1] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă ,calculaţi $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x^n g(x)dx$

(5p) c)Arătaţi că $I_n = \cos 1 + \int_0^1 x^n (x \sin x - \cos x)dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 72

Prof. Ileana Rîcu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Se dau numerele a= -3 şi b=12.Să se insereze între *a* şi *b* cinci numere care împreună cu *a* şi *b* să formeze o progresie aritmetică.

(5p) 2. În planul complex se consideră punctele A,B,C,D ale căror afixe sunt z_A=1+i ; z_B= - 2+2i ;

z_C = -3-i ;z_D= -2i.Calculaţi $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_D}$ şi stabiliţi natura patrulaterului ABCD.

(5p) 3. Rezolvaţi sistemul: $\begin{cases} 2^x - 3^{2y} = 15 \\ \sqrt{2^x} - 3^y = 3 \end{cases}$

(5p) 4.Se dă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-x+a}{x^2+x+1}, a\in\mathbb{R}$ .Să se determine a astfel încât $\operatorname{Im} f \in \left[\frac{1}{3};3\right]$.

(5p) 5. Fie vectorii $\vec{v_1} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{v_2} = 4\vec{i} - \vec{j}$ .Să se determine lungimile diagonalelor paralelogramului construit pe vectorii $\vec{v_1}$ şi $\vec{v_2}$.

(5p) 6. Demonstraţi următoarea egalitate trigonometrică: $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} - \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = 2tg2\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{4}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a & \frac{1}{2}-a \\ \frac{1}{2}-a & \frac{1}{2} & a \\ a & \frac{1}{2}-a & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

(5p) a) Determinaţi rangul matricei A.

(5p) b)Care sunt valorile lui $a\in\mathbb{R}$ pentru care matricea este inversabilă?

(5p) c) Pentru a=0,calculati A^{-1}

2.Fie $f \in \mathbb{R}[X], f = (X^2 + X + 1)^n = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$

(5p) a) Să se afle $a_1 + a_3 + ... + a_{2n-1}$

(5p) b) Să se afle restul împărţirii lui f la $(X+2)^2$.

(5p) c) Să se rezolve în C acuaţia f(x)=f(-x).

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{ax-1}{x+2}, a\in\mathbb{R}$

(5p) a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât tangenta în (0;f(0)) să formeze cu semiaxa Ox un unghi de 30°.

(5p) b)Pentru ce valori ale lui a funcţia este strict crescătoare?

(5p) c)Pentru a=2,determinaţi asimptotele funcţiei obţinute.

www.mateinfo.ro

2. Se consideră şirul $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tgx)^n dx, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

(5p) a)Să se demonstreze că $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi să se calculeze apoi I_2.

(5p) b)Să se arate că $I_n \geq 0$,să se stabilească monotonia şi să se precizeze dacă şirul este convergent.

(5p) c)Demonstraţi că $I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi calculaţi limita şirului $(I_n)_{n\geq 2}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 73

Prof. Ileana Rîcu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Suma a trei numere în progresie aritmetică este 9.Adăugându-le numerele 1,1,respectiv3, obţinem trei numere în progresie geometrică.Să se afle numerele iniţiale.

(5p) 2.Fie A mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\left[\frac{x+2011}{7}\right] = \frac{x+11}{2}$.Calculaţi suma $S = \sum_{x\in A} |x|$

(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia: $\log_5\left(\log_2\left(x^2+4x\right)\right) = 1$

(5p) 4.În ΔABC avem $m(\sphericalangle A) = 45^\circ$,AB=a, $AC = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$ .Calculaţi tgB.

(5p) 5. Se consideră punctele A(-5;8), B(-2;a) şi C(b;1).Să se determine a,b$\in\mathbb{R}$ ştiind că $\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} + 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

(5p) 6.Fie ΔABC şi punctele M,N,P astfel încât $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PC} = \frac{2}{9}\overrightarrow{PB}$.

Arătaţi că punctele M,N,P sunt coliniare.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5p) a) Să se scrie matricea A sub forma : A = I_3 + B, unde B$\in M_3$ (Z) , astfel încât: $B^3 = O_3$.

www.mateinfo.ro

(5p) b) Să se demonstreze că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(5p) c) Să se calculeze suma: $S_n = \sum_{k=1}^{n} A^k . \forall n \in \mathbb{N}^*$

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{Z}_4[X]$, de forma $f = X^3 + \hat{3}X$.

(5p) a)Determinaţi rădăcinile polinomului f.

(5p) b) Descompuneţi polinomul f peste $\mathbb{Z}_4$

(5p) c)Calculaţi $S_1 + S_1 - S_1 \cdot S_2$,unde $S_1 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ şi $S_2 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$,iar $x_1; x_2, x_3$ sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{ax^2}{x+1}; a > 0$.

(5p) a)Să se determine a>0 ştiind că funcţia admite asimptotă oblică care este paralelă cu prima bisectoare.

(5p) b) Să se determine a>0 ştiind că distanţa dintre punctele de extrem ale funcţiei este 10.

(5p) c)Pentru a=1 să se determine punctele în care tangenta la grafic este paralelă cu a doua bisectoare.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 16 - x^2$.

(5p) a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţiei să i se poată aplica teorema lui Rolle pe intervalul [a;a+5] .

(5p) b) Să se calculeze $\lim_{x \nearrow 4} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt$.

(5p) c) Să se afle aria porţiunii plane cuprinsă între graficul funcţiei şi axa Ox.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 74

Prof. Ileana Rîcu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Fie $A=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,/\,x^2+y^2+6xy=68\ \ si\ \ 2x^2+2y^2-3xy=16\right\}$.Calculaţi suma $S=\sum\limits_{(x;y)\in A}\left(|x|+|y|\right)$

(5p) 2. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât următoarele numere: $\left[\frac{3x+1}{5}\right]$;4x-1; $\frac{x}{5}$ să fie în progresie aritmetică, unde [α] reprezintă partea întreagă a lui α $\in\mathbf{R}$.

(5p) 3. Să se calculeze *f* ((1,4]) pentru funcţia de gradul al doilea definită prin $f(x)=x^2-4x+3$

(5p) 4. Să se calculeze expresia:E $E=C_n^0-C_n^2+C_n^4-C_n^6+.....+(-1)^k C_n^{2k}$

(5p) 5. Corzile [*AB*] şi [*CD*] ale cercului *C* (*O*, *r*) sunt perpendiculare şi se intersectează în punctul P. Determinaţi valoarea parametrului *m* pentru care are loc relaţia:
$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}+m\overrightarrow{PO}=5\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$

(5p) 6. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(-2, 0) şi B(0,1). Fie A’ mijlocul segmentului [OA] şi B’ simetricul lui B faţă de origine. Să se determine punctul de intersecţie al dreptei (A’B’) cu prima bisectoare a axelor de coordonate.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $a\in\mathbb{R}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\-1&1&1\\2&4&1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$

(5p) a) Calculaţi $\det(A-aI_3)$.

(5p) b) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea $A-aI_3$ să aibă rang minim.

(5p) c) Determinaţi matricele $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in M_{3\times1}(\mathbb{R})$ cu proprietatea AX=2X.

2. Fie G=(-1;1) şi legea $\circ: G\times G\to G, x\circ y=\frac{x+y}{1+xy}$

(5p) a)Arătaţi că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ faţă de ,,$\circ$”.

(5p) b) Studiaţi existenţa elementului neutru faţă de legea ,,$\circ$”.

(5p) c)Rezolvaţi în G ecuaţia $\left(\frac{1}{2}\right)^x \circ \left(\frac{1}{4}\right)^x = 1$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x-1$

(5p) a) Să se determine extremele funcţiei f.

(5p) b) Să se arate că $f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

(5p) c) Să se demonstreze că $\frac{1}{e}\leq\int_0^1 e^{-x^2}dx\leq\frac{\pi}{4}$

2. Se consideră funcţia $f_n:(0;+\infty)\to\mathbb{R}, f_n(x)=\frac{(\ln x)^n}{x^2}$.

(5p) a) Să se demonstreze că $f_1(x)-f_2(x)\geq 0, \forall x\in[1;e]$.

(5p) b)Să se determine aria suprafeţei plane mărginită de graficele funcţiilor f_1 şi f_2 şi dreptele de ecuaţii x=1,respectiv x=e .

(5p) c) Să se determine volumul corpului de rotaţie C_g ,determinat de funcţia $g(x)=x\sqrt{x}\left[f_1(x)-f_2(x)\right], x\in[1;e]$

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 75

Prof. Adrian Stan

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia: $\sqrt[3]{2-x}=x$;

(5p) 2. Câte numere de telefon de zece cifre distincte se pot forma cu cifrele de la 0 la 9 ?

(5p) 3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $3^x+9^x+27^x=39$.

(5p) 4. Să se calculeze suma: 3 + 8 + 13 + ...+158;

(5p) 5. Să se calculeze: $(1+\sqrt{3})^2-\sqrt{\left(2\sqrt{3}-3\right)^2}+(\sqrt{3}-2)^{-1}$;

(5p) 6. Să se scrie ecuaţia dreptei ce trece prin punctul A(-4;2) şi este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie 2x – y + 2 = 0;

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În mulţimea $M_3(\mathbb{C})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(5p) a) Să se calculeze A^2 şi det(A);

(5p) b) Să se determine $X\in M_3(\mathbb{C})$ astfel încât $A\cdot X=X\cdot A$;

(5p) c) Să se determine numărul de soluţii ale ecuaţiei $X^2=A$ în $M_3(\mathbb{C})$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x+y+9$. Se cere:

(5p) a) Să se rezolve ecuaţia $3^x\circ 9^x=99$;

(5p) b) Să se determine simetricul lui 10;

(5p) c) Să se determine cel mai mic număr natural n pentru care $1\circ 2\circ 3\circ \dots\circ n\rangle 37$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^2-1}, x\le 1\\ \ln x, \quad x\rangle 1.\end{cases}$.

(5p) a) Să se studieze continuitatea funcţiei f în $x_0=1$;

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\langle 1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$;

(5p) c) Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(e^x)+f(e^{x^2})+f(e^{x^3})+\dots+f(e^{x^{2011}})}{x^{2011}}$;

2.

(5p) a) Fie $f:\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\to\Re$, f(x)=sin x.

(5p) b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei OX a graficului funcţiei f ;

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\cdot\sin x\ dx$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 76

Prof. Adrian Stan

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\sqrt{x^2-4x+4}=3$;
(5p) 2. Câte numere de telefon de şase cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ?
(5p) 3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f^{-1}(x)=2x-4$. Să se calculeze $(f\circ f)(-1)$.
(5p) 4. Să se calculeze suma: 2 + 9 + 16 + ...+191;
(5p) 5. Să se calculeze: $(2-\sqrt{2})^2+\sqrt{\left(4-3\sqrt{2}\right)^2}+(\sqrt{5}-2)^{-1}$;
(5p) 6. Să se scrie ecuaţia dreptei ce trece prin punctul M(-2;1) şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie -2x + 4y -1 = 0;

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii
$$\begin{cases} x+my+z=m-3 \\ 2x-3y+z=-1 \\ (m+1)x+y-2z=4 \end{cases},\ \text{unde } m\in\mathbb{R}.$$

(5p) a) Să se determine $m\in R$, ştiind că $\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ m+1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-6.$
(5p) b) Pentru m=2, să se rezolve sistemul de ecuaţii.
(5p) c) Pentru m=0, să se calculeze A^2 unde A este matricea asociată sistemului de ecuaţii.

2. Pe $(1;\infty)$ se dă legea de compoziţie $x\circ y=xy-x-y+2$. Se cere:

(5p) a) Să se verifice asociativitatea legii de compoziţie;

(5p) b) Să se calculeze $\underbrace{2\circ2\circ.....\circ2}_{2011\ termeni}$;

(5p) c) Să se rezolve ecuaţia: $C_n^0\circ C_n^1\circ....\circ C_n^n=3n-5$;

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

(5p) a) Determinaţi domeniul maxim de definiţie D al funcţiei f;

(5p) b) Să se studieze monotonia funcţiei $g(x) = x \cdot f^2(x)$;

(5p) c) Determinaţi asimptota oblică spre $+\infty$ a funcţiei f.

2. Fie $f: [0;1] \to \Re, \quad f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

(5p) a) Să se calculeze $\int_0^1 (x^3 + 1) \cdot f(x)\ dx$;

(5p) b) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa OX şi dreptele de ecuaţii x=0 şi x=1 ;

(5p) c) Să se calculeze limita $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{x^2}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 77

Prof. Adrian Stan

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuaţia: $C_n^n + C_n^{n-1} + ... + C_n^1 = 1023$;

(5p) 2. Câte numere de patru cifre distincte se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ?

(5p) 3. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x^2 - 4x + 3$. Să se determine punctele de pe graficul funcţiei care au abcisa egală cu ordonata.

(5p) 4. Să se calculeze suma: 1 + 7 + 13 + ...+151;

(5p) 5. Să se calculeze: $\log_3 81 \cdot \log_3 27 \cdot \log_3 9 \cdot \log_3 3 \cdot \log_3 1$;

(5p) 6. Se dau vectorii $\overrightarrow{v_1}(2m-1;3)$ şi $\overrightarrow{v_2}(m+2;2)$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât cei doi vectori să fie coliniari.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. Se cere:

(5p) a) Să se determine matricea B= A – 3 I_2;
(5p) b) Să se arate că A·B= B·A= O_3;
(5p) c) Să se calculeze determinantul matricei C = $(A+B)^3$;

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f(X)=(X^2+X+1)^{10}+(X^2+1)^{10}+1$ şi $g(X)=X^2+1$.
(5p) a) Să se descompună polinomul g în factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$.
(5p) b) Să se arate că f este divizibil cu g ;
(5p) c) Dacă $f(X)=a_{20}X^{20}+a_{19}X^{19}+...+a_1X+a_0$, $a_i\in\mathbb{R}$, să se determine a_{19}.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(-x^2+4x-2)\cdot\sin x$.
(5p) a) Să se calculeze $f'(0)$;
(5p) b) Să se arate că $|f(x)|\le 2, \forall x\in\mathbb{R}$;
(5p) c) Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţie f în punctul de abcisă $x_0 = 0$.

2. Fie $f:[1;5]\to\Re$, $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$.
(5p) a) Să se calculeze $\int_1^5 f(x)\cdot f'(x)dx$ unde f ’(x) este derivata de ordinul întâi a funcţiei f.
(5p) b) Să se calculeze volumul corpului de rotaţie obţinut prin rotaţia în jurul axei OX a graficului funcţiei f ;
(5p) c) Să se arate că $0\le\int_1^5 f(x)dx\le 2\sqrt{2}$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 78

Prof. Adrian Stan

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\lg(x^2-3x)=1$;
(5p) 2. Într-o urnă sunt 8 bile albe şi 4 bile negre. Care este probabilitatea ca scoţând două bile din urnă fără a le vedea , acestea să fie albe ?
(5p) 3. Să se determine imaginea funcţiei $f:[-1;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-5x+6$.
(5p) 4. Să se calculeze suma: 1 + 9 + 17 + ...+233;
(5p) 5. Să se calculeze: $C_{2011}^1+C_{2011}^2+C_{2011}^3+...+C_{2011}^{2011}$;
(5p) 6. Dacă $a\in(0;\frac{\pi}{2})$ şi $\sin a=\frac{1}{3}$ să se calculeze sin2a.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele de forma $M_a=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \ln a & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$, $a\rangle 0$.

(5p) a) Să se arate că $M_a\cdot M_b=M_{a\cdot b},\forall a,b\rangle 0$.
(5p) b) Să se calculeze determinantul matricei $M_1+M_2+M_3+......+M_{2011}$;
(5p) c) Să se calculeze $M(a)^{100}$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{Z}_5[X],\quad f(X)=X^2+(a+\hat{2})X+\hat{3}a+\hat{2}$.
(5p) a) Determinaţi $a\in\mathbb{Z}_5$, ştiind că $f(\hat{1})=\hat{1}$;
(5p) b) Pentru $a=\hat{2}$ rezolvaţi ecuaţia $f(x)=\hat{4}$ în $\mathbb{Z}_5$;
(5p) c) Pentru $a=\hat{2}$, să se arate că polinomul f este divizibil cu $X+\hat{3}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}-\{4\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2-7x+10}{4-x}$.
(5p) a) Să se arate că $f(x)=3-x-\frac{2}{4-x}$;

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x-5}$;

(5p) c) Aflaţi $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)\cdot(x-4)\le 0$;

2. Fie $f:\Re\to\Re,\ f(x)=\begin{cases} xe^{x^2-1}, & x\le 1\\ 2x^2-1, & x\rangle 1\end{cases}$.

(5p) a) Să se demonstreze că f admite primitive pe R;

(5p) b) Să se calculeze $\int_{-2}^{2} f(x)dx$;

(5p) c) Să se determine parametrul real $a\ge 1$, astfel încât aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa OX şi dreptele de ecuaţii x =1 şi x = 2 să fie egală cu $a^2 - \frac{16}{3}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 79

Prof. Constantin Telteu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi inversul numărului complex $z=\sqrt{3}+i$.

(5p) 2. Determinaţi punctul de extrem al funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2+3x-4$.

(5p) 3. Într-o progresie aritmetică cu $a_3=0;\ a_{100}=-194$, determinaţi termenul a_{55}

(5p) 4. Determinaţi numărul raţional x pentru care: $\frac{a^{3x}\cdot a^{x-1}}{a^{1+x}}=a^5;\ a>0, a\ne 1$.

(5p) 5. Scrieţi ecuaţia mediatoarei segmentului ale cărui capete sunt punctele $A(1;2)$ şi $B(1;6)$.

(5p) 6. Determinaţi valoarea lui $\sin x$, ştiind că $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{3\sqrt{5}}{15}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $M=\left\{M(a)/M(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ a^2 & 2a & 1\end{pmatrix}, a\in\mathbb{Q}\right\}\subset M_3(\mathbb{Q})$.

(5p) a) Demonstraţi că $M(a)\cdot M(b)=M(a+b),\ \forall a,b\in\mathbb{Q}$.

(5p) b) Calculaţi $(M(2))^{2011}$.

(5p) c) Arătaţi că $I_3\in M$ şi că $\forall a\in\mathbb{Q},\ \exists M^{-1}(a)\in M$.

2. Fie legea de compoziţie $x*y=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1},\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Arătaţi că $\mathbb{R}$ are element neutru în raport cu această lege.

(5p) b) Arătaţi că orice număr real este simetrizabil în raport cu această lege de compoziţie.

(5p) c) Arătaţi că legea este asociativă.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se dă funcţia $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$.

(5p) a) Să se calculeze $f'\left(\sqrt{2}-1\right)$ şi $f'\left(-\sqrt{2}-1\right)$.

(5p) b) Să se determine punctal de maxim local al graficului funcţiei.

(5p) c) Să se determine asimptota verticală a funcţiei.

2. Fie funcţia $I:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ I(x)=\int_0^x\left(3t-2t^2\right)e^t dt$.

(5p) a) Să se calculeze $I(1)$.

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty} I(x)$.

(5p) c) Să se rezolve ecuaţia: $I(x)=\left(7x-2x^2\right)e^x$.

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 80

Prof. Constantin Telteu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Arătaţi că $\frac{z}{\bar{z}} = -i$, unde $z = 1 - i$.

(5p) 2. Determinaţi numărul real a pentru care graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax + a$ este situat deasupra axei absciselor.

(5p) 3. Să se afle primul termen al unei progresii aritmetice, ştiind că al cinci-lea termen este 5, iar al zece-lea termen este 11.

(5p) 4. Pentru ce valoare a lui x este adevărată egalitatea : $2\log_x 0,1 + 3\log_x 0,001 = -11$?

(5p) 5. Scrieţi ecuaţia medianei din vârful A al triunghiului ABC ştiind că $A(1;2)$; $B(2;3)$; $C(4;3)$.

(5p) 6. Ştiind că $\alpha \in (0;\pi)$ şi $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se dă sistemul: $\begin{cases} (2m+3)x - 4y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ 3x - 12y + (9-2m)z = 0 \end{cases}$

(5p) a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul admite doar soluţia banală $(x = y = z = 0)$

(5p) b) Să se determine rangul matricei sistemului pentru $m = 2$.

(5p) c) Să se rezolve sistemul pentru $m = 1$.

2. Fie $M = \left\{ M(x) / M(x) = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2(1-x) & 2x-1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^* \right\}$

(5p) a) Să se arate că M este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor şi că $M(x) \cdot M(y) = M(xy)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$.

(5p) b) Să se arate că orice matrice $M(x)$ din M este inversabilă şi să se determine inversa sa.

(5p) c) Să se calculeze $\left(M\left(x\right)\right)^{n}$, $n \in \mathbb{N}^{*}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}-\{1\}$, $f\left(x\right)=\dfrac{x^{2}+\alpha x+\beta}{x-1}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Ştiind că punctul $A(0;1)$ este punct de extrem al graficului funcţiei, să se determine α şi β.

(5p) b) Să se arate că funcţia $g:\mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R}$, $g\left(x\right)=f'\left(x\right)$, cu α şi β determinaţi la punctul a), nu are puncte de extrem.

(5p) c) Să se determine α ştiind că asimptota oblică a funcţiei f trece prin origine.

2. Fie $I_{n}=\int_{0}^{1}\dfrac{x^{2n}}{x+\alpha}dx$, $n \in \mathbb{N}^{*}$, $\alpha \in (1;\infty)$.

(5p) a) Să se calculeze I_{1}.

(5p) b) Să se arate că $0 \le I_{n} \le \dfrac{1}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^{*}$, $\forall \alpha \in (1;\infty)$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{2011}\alpha^{k}I_{n}\right)$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 81

Prof.Constantin Telteu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|$, unde $z=\dfrac{1}{i}$.

(5p) 2. Determinaţi valoarea numărului real m pentru care graficul funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f\left(x\right)=-2x^{2}+mx$ este situat sub dreapta de ecuaţie $y=1$.

(5p) 3. Fie $\left(x_{n}\right)_{n\ge1}$ termenii unei progresii aritmetice cu raţia r, şi funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x)=ax+b,\ \ a,b\in\mathbb{R}$. Să se arate că $\left(f(x_n)\right)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică şi determinaţi raţia ei.

(5p) 4. Pentru ce valori ale lui n avem $C_n^3 - A_n^2 \leq 0$?

(5p) 5. Baza mare a unui trapez este situată pe dreapta de ecuaţie $x+y-3=0$, iar baza mică este situată pe o dreaptă d ce trece prin originea sistemului de coordonate. Determinaţi ecuaţia dreptei d.

(5p) 6. Determinaţi soluţiile din intervalul $\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ ale ecuaţiei: $\sin 5x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $M=\left\{M(x,y)/M(x,y)=\begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -7y & x-4y\end{pmatrix}, x\neq 0, x^2-2y^2=1, x,y\in\mathbb{R}\right\}$.

(5p) a) Arătaţi că M este parte stabilă a mulţimii $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

(5p) b) Arătaţi că înmulţirea matricelor din M este comutativă.

(5p) c) Arătaţi că orice matrice din M este inversabilă şi inversa ei este tot din M.

2. Fie legea de compoziţie internă pe $\mathbb{R}$: $x * y=\frac{1}{2}(x+y-xy+1),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Să se determine elementul neutru.

(5p) b) Să se determine mulţimea elementelor simetrizabile în raport cu această lege de compoziţie.

(5p) c) Arătaţi că această lege este asociativă.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se dă funcţia: $f:D_{\max}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^4-5x^2+4}$.

(5p) a) Determinaţi domeniul maxim de definiţie.

(5p) b) Determinaţi punctele de extrem ale graficului funcţiei.

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^2-f(x)\right)$.

2. Se dau matricile $A=\begin{pmatrix} \frac{x-1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & x-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{6}{x-1} \\ 0 & 1 & -\frac{6}{x-1}\end{pmatrix}$ şi funcţia

$f:(-1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\left(x^2+3x+2\right)$.

(5p) a) Să se demonstreze că: $\int_0^2 f(x)dx>2\ln 2$.

(5p) b) Să se calculeze $I=\int_a^b\frac{f'(x)}{2x+3}dx$, unde a şi b, $a<b$ sunt soluţiile ecuaţiei $\det(M)+x^2-x=0$, în care $M=A\cdot B$.

www.mateinfo.ro

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{f(x)}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 82

Prof. Constantin Telteu

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că $z=a+i\sqrt{3}$ şi $|\bar{z}|=2$

(5p) 2. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel ca graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-4mx+m-3$ să fie tangent axei absciselor.

(5p) 3. Dacă $(a_n)_{n\geq1}$ este o progresie aritmetică, să se arate că a_n, a_{2n}, a_{3n} sunt în progresie aritmetică.

(5p) 4. Ştiind că $\log_{42}7=a$, să se calculeze $\log_{42}6$.

(5p) 5. Determinaţi ecuaţia dreptei ce este paralelă cu dreapta $d:x-3y+4=0$ şi trece prin punctul $A\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$.

(5p) 6. Să se rezolve ecuaţia: $7\sin 5x+5\cos 7x=12$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se dau mulţimile: $A=\left\{x+y\sqrt{p}\,/\,x,y\in\mathbb{Q}, p\in\mathbb{N}, p\ \ prim\right\}$;

$B=\left\{M(x,y)/M(x,y)=\begin{pmatrix} x & y \\ py & x\end{pmatrix}, x,y\in\mathbb{Q}, p\in\mathbb{N}, p\ \ prim\right\}$ şi funcţia

$f:A\to B, f\left(x+y\sqrt{p}\right)=M(x,y)$.

(5p) a) Arătaţi că B este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

(5p) b) Găsiţi elementele inversabile din B şi calculaţi inversa matricei $M(x,y)$.

(5p) c) Arătaţi că $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b), \forall a,b\in A$.

2. Pe mulţimea $G=(1,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$.

(5p) a) Să se arate că G are element neutru în raport cu această lege de compoziţie.

(5p) b) Să se arate că orice element din G este simetrizabil în raport cu această lege de compoziţie.

(5p) c) Să se arate că funcţia $f:(0;\infty)\to G,\ f(x)=\sqrt{x+1}$ este un izomorfism între grupurile $((0;\infty),\cdot)$ şi $(G,\circ)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se dă funcţia $f_a:D_{\max}\to\mathbb{R},\ f_a(x)=\ln(x^2+4x+a),\ a\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Să se determine a şi b ştiind că $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{b\}$.

(5p) b) Să se rezolve ecuaţia $f_0(x)=\ln(x+2)+\ln 2$.

(5p) c) Să se verifice că o primitivă a funcţiei f_4 este funcţia dată de formula: $F(x)=2\left[(x+2)\ln(x+2)-x+2011^{2011}\right]$

2. Se dă funcţia $f_a:D_{\max}\to\mathbb{R},\ f_a(x)=\ln(x^2+4x+a),\ a\in\mathbb{R}$ şi funcţia $g:(-a;\infty)\to\mathbb{R}, g_a(x)=-\ln(x+a), a\in\mathbb{R}.$

(5p) a) Să se calculeze $I_4=\int_{e-2}^{1} f_4(x)\,dx$.

(5p) b) Să se calculeze $I=\int_0^{e-1}\frac{f_3(x)+g_3(x)}{x+1}dx$.

(5p) c) Să se calculeze $J=\int f_a(x)\,dx$, pentru $a>4$

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 83

Prof. Iuliana Traşcă

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Aflaţi suma rădăcinilor ecuaţiei $x^2-5x+6=0$.

(5p) 2. Determinaţi $\mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$, ştiind că $z_1=2+i,\ z_2=3+i$.

(5p) 3. Ştiind că doi termeni ai unei progresii aritmetice sunt $a_3 = 10$ şi $a_8 = 25$, să se calculeze a_{10}.

(5p) 4. Rezolvaţi ecuaţia $3^{\frac{x}{2}} \cdot 7^{\frac{x}{2}} = 9261$.

(5p) 5. Să se scrie ecuaţia mediatoarei segmantului [AB], unde A(3,2) şi B(7, 4).

(5p) 6. Dacă $f:\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{tg^2 x+1}{tgx}$, calculaţi $\int f(x)dx$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul: $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+13y-5z=0, \\ x-11y+3z=0 \end{cases}$ unde x, y, z $\in \mathbb{R}$

(5p) a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A, A fiind matricea sistemului.

(5p) b) Să se rezolve sistemul.

(5p) c) Să se găsească o soluţie (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care

$$(x_0+3)^2+(y_0+4)^2-(z_0+1)^2+y_0 = x_0{}^2+y_0{}^2-z_0{}^2-y_0+39 .$$

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziţie “∗” astfel:

$x*y=\frac{1}{3}(x+y-2xy+1)$, oricare ar fi x, y $\in \mathbb{R}$.

(5p) a) Este această lege comutativă? Care este elementul neutru?

(5p) b) Arătaţi că orice element $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ este simetrizabil în raport cu legea “∗”

(5p) c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $3^x * 9^x = \frac{1}{3}$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x)=\int_{\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\arcsin x} \ln\left(2\sin^2 t+\cos^2 t\right)dt$

(5p) a) Să se arate că f este derivabilă.

(5p) b) Să se calculeze $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

(5p) c) Să se cerceteze dacă funcţia este integrabilă şi în caz afirmativ să se calculeze $\int_0^{\cos 45^0} f(x)dx$

2. Se consideră funcţia $f:[1,\infty) \leftarrow [0,\infty)$, $f(x)=\sqrt{x-\sqrt{9x^2-(3x-1)^2-4x}}$

(5p) a) Arătaţi că f este strict crescătoare.

(5p) b) Arătaţi că f este bijectivă; Determinaţi $x_0 \in [1,\infty)$ asfel încât $f'(x_o):f'(41)=\frac{9}{7}$

(5p) c) Calculaţi $f^{-1}\left(10\sqrt{2}\right)$)

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 84

Prof. Iuliana Traşcă

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Rezolvaţi ecuaţia $\frac{(x+4)!}{(x+2)!}=156$.

(5p) 2. Se dă ecuaţia $x^2+(5-2m-m^2)x-a^3+2011=0$, $m\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$. Pentru ce valori ale lui m, suma rădăcinilor ecuaţiei este minimă?

(5p) 3. Să se rezolve inecuţia: $\log_{\frac{1}{4}}(3x-2)>-2$.

(5p) 4. Calculaţi $5\sqrt{3}\sin 2x$, ştiind că $\mathrm{tgx}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(5p) 5. Să se rezolve ecuaţia: $9^x-10\cdot 3^x+9=0$

(5p) 6. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{3n^3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 10x & 1 & 0\\ 25x^2 & 5x & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

(5p) a) Calculaţi $\{[A(-1)-A(1)]\cdot A(2)\}^{2011}$

(5p) b) Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$

(5p) c) Demonstraţi că matricea $A(x)$ este inversabilă si calculaţi inversa matricei $A(x)$.

2. Fie ecuaţia: $x^2\cdot\left[\left(\sqrt{2}-x\right)^2+2\sqrt{2}x-2x^2\right]+[x]=0$, unde [x] este partea întreagă a lui x.. Să se afle soluţiile ecuaţiei în următoarele cazuri:

(5p) a) $[x]\in\mathbb{Z}_-$

(5p) b) $\left[x\right]=0$

(5p) c) $\left[x\right]\in\mathbb{Z}_{+}$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie şirul cu termenul general $a_k=\log_{2^{-1}}\dfrac{k\left(k+2\right)}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)-k-1}$, $k\in\mathbb{N}$ şi şirul cu termenul general $b_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$.

(5p) a) Să se arate că şirul $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător

(5p) b) Să se arate că şirul $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-b_n\right)$

2. Considerăm şirul $I_n=\int\limits_{arctg0}^{arctg1}\left(\dfrac{\sin 2x}{2\cos^2 x}\right)^{2n}dx$.

(5p) a) Să se studieze monotonia, mărginirea şi convergenţa şirului I_n

(5p) b) Să se arate că $I_{n+1}+I_n=\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+...+\frac{n}{3}}{1^2+2^2+...+n^2}$

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}I_n$

www.mateinfo.ro

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 85

Prof. Iuliana Traşcă

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine numerele reale a şi b astfel încât să avem egalitatea: $a+bi=-\frac{7}{5i+2}$.

(5p) 2. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x+5x^3$. Să se afle $f'(e)$.

(5p) 3. Se dă dreapta:d: x-5y+1=0, să se determine ecuaţia dreptei d' care trece prin punctul A(4, 1) şi este perpendiculară pe d.

(5p) 4. Dacă $\log_{20}2=a$ să se exprime $\log_2 25$ în funcţie de a.

(5p) 5. Să se afle suma S_{30} a primilor 30 de termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$ pentru care $a_1=-3,\ a_8=67$

(5p) 6. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $\sqrt{2-x}=3x+24$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu termenul general $I_n=\int_0^1\frac{2x^n}{(x+1)^2+(x-1)^2}dx$.

(5p) a)) Calculaţi I_0 , I_1 şi. I_2.

(5p) b) Arătaţi că $\frac{I_{n+3}+I_{n+1}}{[(n+3)+(n+1)]^{-1}}=2$, (∀) n ∈ **N***.

(5p) c) Demonstraţi că $\frac{1}{2(n+2)}\le I_{n+1}\le\frac{1}{2n}$, (∀) n ≥ 1 .

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-10x^3+35x^2-50x+24$.

(5p) a) Să se arate că suma cuburilor rădăcinilor ecuaţiei $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$ este un pătrat perfect.

(5p) b) Să se arate că $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2,3,4\}$

(5p) c) Să se demonstreze că $f(x)f''(x)<(f'(x))^2$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin: $f(x)=\begin{cases}2^{-1}\cdot\left[\left(e^x-1\right)^2+\left(e^x+1\right)^2-2\right], & x\le 0\\ 3x^2+2x+m, & x>0,\ m\in\mathbb{R}\end{cases}$

(5p) a) Determinaţi $m\in\mathbb{R}$, astfel încât rădăcinile ecuaţiei $3x^2+2x+m=0$ să fie reale şi negative.

(5p) b) Pentru ce valori ale lui m funcţia f este continuă?

(5p) c) Aflaţi primitivele funcţiei f pe $\mathbb{R}$

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie xoy=ax+by+c.
Se ştie că $(\mathbb{R},o)$ este grup cu elementul neutru e=2.

(5p) a) Arătaţi că $(a+b)^2=c^2$

(5p) b) Pentru a=1, b=1, $c=-2$ să se găsescă numerele $p\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$, cu proprietatea $poq\in\mathbb{N}$ şi $q=\frac{1}{3}$

(5p) c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: xo(2x)o(3x)o...o(2011)=- 4020

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 86

Prof. Iuliana Traşcă

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Identificaţi mulţimea $A=\left\{z\in\mathbb{C}/\left|z+2i\right|\le 5\right\}$

(5p) 2. Să se calculeze limita: L= $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+...+\frac{1}{5^n}}$

(5p) 3. Să se arate că dreptele d: 3x-y+2=0 şi $d^{'}: x+3y-15=0$ sunt perpendiculare şi să se afle punctul lor de intersecţie.

(5p) 4. Aflaţi n astfel încât $C_n^1+C_n^2\le 21$

(5p) 5. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-2011x^2+2010$ nu este injectivă.

(5p) 6. Să se rezolve ecuaţia $343^x+2\cdot 175^x-3\cdot 125^x=0$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\sum_{n=0}^{2011} C_{2011}^{n}}{2^{2010}} & (1!+2!+3!):3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \dfrac{C_{2011}^{2010}}{C_{2011}^{1}}+\alpha \end{pmatrix}$

(5p) a) Care este cea mai simplă formă a matricei A? Să se afle α astfel încât det(A)=1.

(5p) b) Să se determine A^n, ştiind că α =0

(5p) c) Dacă $B=(b_{ij})_{i,j\in\overline{1,3}}$, unde $B=A^{2011}$, atunci să se afle $T=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} b_{ij}$

2. Definim pe $\mathbb{R}$ legea de compoziţie xoy=xy-5x-5y+30.

(5p) a) Să se arate că $G=(5,\ \infty)$ este parte stabilă în raport cu "o";

(5p) b) Să se arate că (G,o) este grup abelian;

(5p) c) Să se determine toate izomorfismele $f:\mathbb{R}\to G$ de forma $f(x)=e^{ax}+b,\ a,\ b\in\mathbb{R}$, între grupurile $(\mathbb{R},\ +)$ şi $(G,\ o)$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, definit prin $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 0dx,\ I_n=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\cos^2 x-1)\sin^{n-2} xdx,$

(5p) a) Să se calculeze I_0, I_1, I_2 .

(5p) b) Să se găsească o relaţie între I_n şi I_{n-2} utilizând metoda integrării prin părţi.

(5p) c) Folosind metoda inducţiei matematice, să se arate că:

$$I_{2n}=\prod_{p=1}^{n}\frac{2p-1}{2p}\cdot\frac{\pi}{2},\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$$

2. Se consideră funcţia $f:(0,\ \infty)\to\mathbb{R}$ derivabilă şi care verifică relaţia:

$$(x+1)\cdot f(x)+(x+1)^2-4x=(x-1)^2+x^3+\int_0^x f(t)dt,\ \forall\ x\geq 0$$

(5p) a) Să se afle $f'(x)$

(5p) b) Să se calculeze: $\dfrac{2011^{2011}}{2010!}\cdot f^{(2011)}(2010)$

(5p) c) Să se determine α astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)-x\cdot f''(x)}{f''(x)}=2010-\alpha$

www.mateinfo.ro