Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Caraş-Severin

REVISTA DE MATEMATICĂ

A ELEVILOR ŞI PROFESORILOR

DIN JUDEŢUL CARAŞ-SEVERIN

Nr. 30, An X-2009

Editura „Neutrino"
Reşiţa, 2009

Titlul: Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din judeţul Caraş-Severin
I.S.S.N. 1584-9481

Mobil: 0741017700
www.neutrino.ro
E-mail: editura@neutrino.ro

CUPRINS

Citate

☼ Cu penele altuia te poţi împodobi, dar nu poţi zbura. Acest lucru nu îl prea ştiu oamenii, dar îl ştiu păsările....

Lucian Blaga

☼ Ideile noastre, după ce le naştem, mai aşteaptă şi să murim pentru ele!

Lucian Blaga

☼ Să nu te cerţi cu oamenii mai mult decât cu tine însuţi.

Lucian Blaga

☼ O rugăciune am : Doamne, să nu mă laşi niciodată să fiu mulţumit de mine însumi!

Lucian Blaga

☼ Eşti tânăr încă atâta timp cât admiri şi în măsura în care admiri.

Lucian Blaga

☼ Fabula câinelui. Un câine, voind să evadeze din arşiţa şi lumina soarelui, încearcă să se culce în propria sa umbră.

Lucian Blaga

☼ Lacul oglindeşte stelele pentru că vrea să fie cer.

Lucian Blaga

☼ Stările sufleteşti care par a nu avea niciun motiv, au motivele cele mai adânci.

Lucian Blaga

☼ Lupta reuşeşte mai ales acelora care iubesc mai mult lupta decât succesul.

Lucian Blaga

☼ Lumina trece pe lângă noi, năvalnică şi cu entuziasm, iar noi, în loc de a ne lăsa târâţi de iureşul ei, noi, aruncăm în aceeaşi direcţie, o umbră.

Lucian Blaga

☼ A iubi e primăvară, a cunoaşte – nseamnă iarnă.

Lucian Blaga

O inegalitate în patrulaterul ortodiagonal

Teoremă: Un patrulater convex $ABCD$ **este ortodiagonal** $(AC \perp BD)$ **dacă şi numai dacă** $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$**.**

Demonstraţie:

Fie $\{O\} = AC \cap BD$.

a) Dacă $AC \perp BD$ atunci $AB^2 + CD^2 = (OA^2 + OB^2) + (OC^2 + OD^2) =$

$= (OB^2 + OC^2) + (OA^2 + OD^2) = BC^2 + AD^2 \Rightarrow \boxed{AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2}$

b) Dacă $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$ (1) atunci fie $x = m(\sphericalangle AOB)$.

Folosim teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile $\triangle AOB$, $\triangle COD$, $\triangle BOC$ şi $\triangle AOD$.

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos x$ (2)

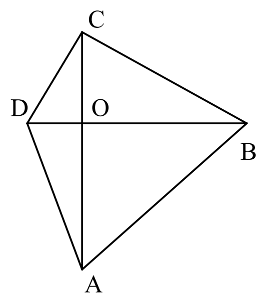
$CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2 \cdot OC \cdot OD \cdot \cos x$ (3)

$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos(180^\circ - x) \Rightarrow$

$\Rightarrow BC^2 = OB^2 + OC^2 + 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos x$ (4)

$AD^2 = OA^2 + OD^2 - 2 \cdot OA \cdot OD \cdot \cos(180^\circ - x) \Rightarrow$

$\Rightarrow AD^2 = OA^2 + OD^2 + 2 \cdot OA \cdot OD \cdot \cos x$ (5)



Din (1), (2), (3), (4), (5) rezultă că

$OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos x + OC^2 + OD^2 - 2 \cdot OC \cdot OD \cdot \cos x =$

$= OB^2 + OC^2 + 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos x + OA^2 + OD^2 + 2 \cdot OA \cdot OD \cdot \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x \cdot (OA \cdot OB + OC \cdot OD + OB \cdot OC + OA \cdot OD) = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 90^\circ \Rightarrow \boxed{AC \perp BD}$

Problemă

Fie $ABCD$ **un patrulater ortodiagonal** $(AC \perp BD)$ **astfel încât** $OA > OC$ **şi** $OB > OD$ $(\{O\} = AC \cap BD)$**.**

Demonstraţi că $AB \cdot CD < BC \cdot AD$**.**

Soluţie:

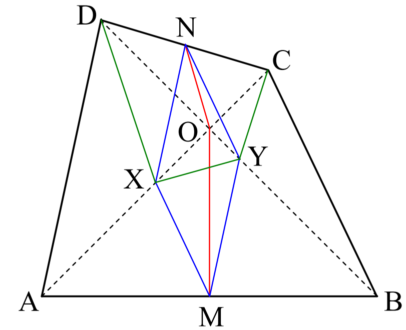
Fie M, N, X, Y respectiv mijloacele segmentelor $[AB], [CD], [AC], [BD]$.

$OA > OC \Rightarrow XC > OC \Rightarrow O \in (XC)$

$OB > OD \Rightarrow YD > OD \Rightarrow O \in (YD)$

Deci O este punctul de intersecţie al diagonalelor $[XC]$ şi $[YD]$ ale patrulaterului $XYCD$.

Deoarece N este mijlocul lui $[CD]$ rezultă că $O \in Int(\triangle NXY)$.



$[NX]$ - linie mijlocie în $\triangle CDA \Rightarrow NX \parallel DA$ şi $NX = \dfrac{DA}{2}$ (1)

$[YM]$ - linie mijlocie în $\triangle BDA \Rightarrow YM \parallel DA$ şi $YM = \dfrac{DA}{2}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow NX \parallel YM$ şi $NX = YM \Rightarrow MXNY$ - paralelogram.

$O \in Int(\triangle NXY) \Rightarrow O \in Int(MXNY) \Rightarrow MO + ON < MX + XN = MY + YN \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AB + CD}{2} < \dfrac{BC + AD}{2} \Rightarrow (AB + CD)^2 < (BC + AD)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB^2 + CD^2 + 2 \cdot AB \cdot CD < BC^2 + AD^2 + 2 \cdot BC \cdot AD$ (3)

Din teoremă $\Rightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$ (4)

(3), (4) $\Rightarrow \boxed{AB \cdot CD < BC \cdot AD}$

Observaţie

Dacă $ABCD$ este un trapez $(AB \parallel CD, AB > CD)$ ortodiagonal $(AC \perp BD)$ şi $\{O\} = AC \cap BD$ atunci $OA > OC$ şi $OB > OD$, deci $AB \cdot CD < BC \cdot AD$.

(vezi problema VII.155, pag.52 din R.M.C.S., Nr.29, An X – 2009, autor prof. Sorin Peligrad, Piteşti)

prof. Neagoe Petrişor,
Grup Şcolar „Mathias Hammer” Anina

Metoda vectorială în probleme de concurență

Scopul acestei note matematice este acela de a evoca câteva posibilități de a folosi vectorii în probleme de concurență. Vom avea nevoie pentru început de câteva propoziții cunoscute, propoziții care le vom accepta fără demonstrație.

Definiția 1. Vectorii $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ...\vec{v_n}$, se numesc liniari independenți dacă pentru $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n \in R$, a. î. $\alpha_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \vec{v_2} + ..\alpha_n \cdot \vec{v_n} = \vec{0}$ rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. În plan numărul maxim al vectorilor liniar independenți este 2. Deci dacă $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt doi vectori necoliniari și α și β două numere reale asfel încât: $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ atunci $\alpha = \beta = 0$. Ca o consecință a acestui rezultat avem:

Propoziția 1. Dacă $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt doi vectori necoliniari și α_1, α_2, β_1, β_2 numere reale asfel încât: $\alpha_1\vec{u} + \beta_1\vec{v} = \alpha_2\vec{u} + \beta_2\vec{v}$, atunci $\alpha_1 = \alpha_2$ și $\beta_1 = \beta_2$.

Un alt rezultat care va fi util în cele ce urmează este:

Propoziția 2. Fie $O \notin AB$ și M un punct din plan. Punctul M va aparține dreptei AB dacă și numai dacă există $t \in R$ astfel încât: $\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$.

Ca metodă generală de a demonstra că mai multe drepte sunt concurente este să aratăm că dintr-un punct O, oarecare al planului se poate construi un vector care să aibă vârful pe fiecare din dreptele în cauză. Vârful acelui vector nu poate fi decât un punct comun acelor drepte și deci dreptele în cauză sunt concurente. Dacă punctul O este pe una din drepte atunci concurența dreptelor in cauză revine la a arăta că se poate construi un vector având varful pe fiecare din celelalte drepte, coliniar cu un vector de pe dreapta respectiva. Vom exemplifica aceasta metodă prin câteva probleme de concurență.

Problema 1. Arătați că într-un pentagon convex, dreptele care trec prin centul de greutate al triunghiului format de trei varfuri oarecare și mijlocul segmentului determinat de celelalte două varfuri sunt concurente.

Observație: Cerința de convexitate nu este obligatorie.

Rezolvare: Fie O un punct oarecare al planului și ABCDE un pentagon convex. Fie G_1 centrul de greutate al triunghiului ABC si M_1 mijlocul lui $[DE]$. Fie $t = \frac{3}{5}$ și să calculăm vectorul: $\overrightarrow{OG} = t\overrightarrow{OG_1} + (1-t)\overrightarrow{OM_1}$. Vom avea: $\overrightarrow{OG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OG_1} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OM_1} =$

$$= \frac{3}{5}\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} + \frac{2}{5}\frac{\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}}{2} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}}{5}.$$

Punctul G astfel construit va fi pe dreapta G_1M_1 și analog se arată că este pe fiecare dreaptă cu proprietatea din enunț și deci dreptele respective sunt concurente.

Problema 2. Pe una din laturile unghiului cu vârful în O se consideră punctele A, B, C astfel încât: $\frac{OA}{1} = \frac{AB}{2} = \frac{BC}{3}$. Pe cealaltă latură considerăm punctele A_1, B_1, C_1 astfel încât: $\frac{OA_1}{3} = \frac{A_1B_1}{3} = \frac{B_1C_1}{2}$. Arătați că dreptele AA_1, BB_1 și CC_1 sunt concurente.

Bacău, etapa locală, 2007

Rezolvare:

Notăm: $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ și $\vec{v} = \overrightarrow{OA_1}$ (vezi fig 1). Se găsește ușor că:

$\overrightarrow{OB} = 3\vec{u}$, $\overrightarrow{OC} = 6\vec{u}$, $\overrightarrow{OB_1} = 2\vec{v}$, $\overrightarrow{OC_1} = \frac{8}{3}\vec{v}$

.Vom arăta că există $t_1, t_2, t_3 \in R$ astfel încât:

$t_1\overrightarrow{OA} + (1-t_1)\overrightarrow{OA_1} = t_2\overrightarrow{OB} + (1-t_2)\overrightarrow{OB_1} =$

$= t_3\overrightarrow{OC} + (1-t_3)\overrightarrow{OC_1}$.

Aceste egalități ne dau:

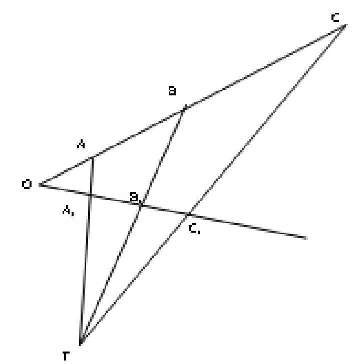


FIG 1

$$t_1\vec{u} + (1-t_1)\vec{v} = 3t_2\vec{u} + 2(1-t_2)\vec{v} = 6t_3\vec{u} + \frac{8}{3}(1-t_3)\vec{v}.$$

Va rezulta de aici că: $\begin{cases} t_1 = 3t_2 \\ 1-t_1 = 2(1-t_2) \\ t_1 = 6t_3 \\ 1-t_1 = \frac{8}{3}(1-t_3) \end{cases}$

Este necesar doar să arătăm că sistemul de mai sus admite soluție ceea ce nu este dificil de constatat: $t_1 = -3, t_2 = -1, t_3 = -\frac{1}{2}$.

A treia aplicație din această notă este o variantă restrânsă a teoremei lui Ceva:

Teorema lui Ceva: Fie ABC un triunghi şi $A_1 \in [BC], B_1 \in [AC], C_1 \in [AB]$ astfel încât: $\frac{BA_1}{A_1C} = \alpha, \frac{CB_1}{B_1A} = \beta, \frac{AC_1}{C_1B} = \gamma$. Dreptele AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente dacă şi numai dacă $\alpha\beta\gamma = 1$.

Demonstrație:

Condiția de concurență a dreptelor AA_1, BB_1 şi CC_1 revine la a scrie că vectorii $\overrightarrow{BD}$ şi $\overrightarrow{BF}$ sunt coliniari cu $\overrightarrow{BB_1}$ şi $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BF}$ unde $\{D\} = BB_1 \cap CC_1$ şi $\{F\} = BB_1 \cap AA_1$ (vezi fig 2). Va exista deci $t_1, t_2, k \in R$ astfel încât: $\overrightarrow{BD} = t_1\overrightarrow{BC} + (1-t_1)\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{BF} = t_2\overrightarrow{BA_1} + (1-t_2)\overrightarrow{BA}$ şi $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BB_1}$. Vom nota $\overrightarrow{BA} = \vec{u}$

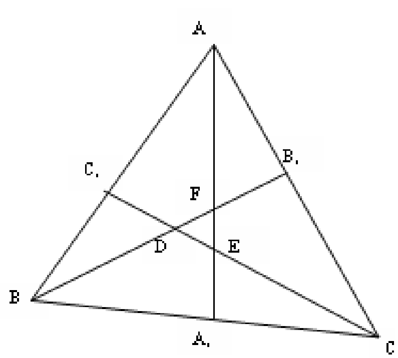


FIG 2

şi $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ şi atunci vom avea exprimările:

$\overrightarrow{BA_1} = \frac{\alpha}{\alpha+1}\vec{v}, \overrightarrow{BC_1} = \frac{1}{1+\gamma}\vec{u}, \overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{1+\beta}\vec{v} + \frac{\beta}{1+\beta}\vec{u}$. Egalitățile: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BF}$ şi $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BB_1}$ se scriu:

$t_1\vec{v} + (1-t_1)\frac{1}{1+\gamma}\vec{u} = t_2\frac{\alpha}{\alpha+1}\vec{v} + (1-t_2)\vec{u} = \frac{k}{1+\beta}\vec{v} + \frac{k\beta}{1+\beta}\vec{u}$. Aceste egalități ne conduc la un sistem la care trebuie să găsim o condiție de compatibilitate. Vom avea: $\begin{cases} t_1 = \frac{t_2\alpha}{\alpha+1} \\ \frac{1-t_1}{1+\gamma} = 1-t_2 \\ t_1 = \frac{k}{1+\beta} \\ \frac{1-t_1}{1+\gamma} = \frac{k\beta}{1+\beta} \end{cases}$.

Din primele două relații prin eliminarea lui t_2 se va găsi relația: $(1+\gamma+\alpha\gamma)t_1 = \alpha\gamma$, iar din ultimile două relații prin eliminarea lui k se obține: $(1+\beta+\beta\gamma)t_1 = 1$. Raportând cele două relații deduse se obține după simplificare $\alpha\beta\gamma = 1$

Prof. Nicolae Stăniloiu, Bocşa

Inegalitatea lui Bernoulli
şi convergenţa şirurilor lui Euler

Este binecunoscută *inegalitatea lui Bernoulli* :

pentru $x > -1$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$, are loc $(1+x)^n \geq 1+nx$ ***(B)***

Sunt de asemenea binecunoscute în analiza matematică, următoarele două *şiruri ale lui Euler* :

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ , respectiv , } E_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \in \mathbb{N}^* .$$

Se cunosc câteva moduri de demonstrare a monotoniei şi mărginirii – deci a convergenţei - acestor două şiruri . De obicei , aceste demonstraţii – aşa cum sunt ele prezentate în manuale sau tratatele de Analiza matematică - nu sunt foarte scurte şi necesită o oarecare ingeniozitate matematică .

În cele ce urmează vom prezenta demonstraţii foarte scurte pentru convergenţa celor două şiruri , folosind - în principal, inegalitatea lui Bernoulli . Pentru început vom demonstra monotonia lor .

1. ***<u>Propoziţie</u>***

Şirul $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*$, este monoton crescător .

<u>Demonstraţie</u>

Într-adevăr, avem,

$$\frac{e_n}{e_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} =$$

$$= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \overset{(B)}{>} \left(1-n\cdot\frac{1}{n^2}\right)\cdot\frac{n}{n-1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n}{n-1} = 1,$$

unde s-a aplicat inegalitatea lui Bernoulli pentru $x = -\frac{1}{n^2} > -1$, deci $e_n > e_{n-1}$, adică şirul $(e_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător .

2. ***<u>Propoziţie</u>***

Şirul $E_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \in \mathbb{N}^*$, este monoton descrescător .

<u>Demonstraţie</u>

Avem succesiv,

$$\frac{E_{n-1}}{E_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \overset{(B)}{>} \left(1+n\cdot\frac{1}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1} >$$

$$> \left(1+n\cdot\frac{1}{n^2}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = 1 \quad ,$$

în care s-a utilizat inegalitatea lui Bernoulli cu $x = \frac{1}{n^2-1} > -1$, pentru $n \geq 2$

Rezultă că $E_n < E_{n-1}$, adică şirul $(E_n)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător .

Proprietăţile de monotonie ale şirurilor $(e_n)_{n\geq 1}$ şi $(E_n)_{n\geq 1}$ demonstrate mai sus, asigură şi proprietatea de mărginire a lor, după cum se poate urmări în continuare .

3. ***<u>Propoziţie</u>***

Şirurile $(e_n)_{n\geq 1}$, $(E_n)_{n\geq 1}$ sunt mărginite .

<u>Demonstraţie</u>

Să observăm că ,

$$E_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e_n\left(1+\frac{1}{n}\right) > e_n$$

Dacă mai folosim şi proprietăţile de monotonie din propoziţiile 1 şi 2 avem $2 = e_1 < e_n < E_n < E_1 = 4$ de unde rezultă mărginirea simultană a şirurilor $(e_n)_{n\geq 1}$ $(E_n)_{n\geq 1}$.

<u>4.</u> *<u>Corolar</u>*

Şirurile $(e_n)_{n\geq 1}$, $(E_n)_{n\geq 1}$, sunt convergente şi $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty} E_n = e$.

<u>Demonstrație</u>

Şirurile fiind monotone (*Propozițiile* 1 şi 2) şi mărginite (*Propoziția* 3) , cu *teorema lui Weierstrass* rezultă că sunt convergente .

Restul rezultă din $E_n = e_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

<u>5.</u> *<u>Observație</u>*

Reținem că şirurile (e_n) , respectiv (E_n) converg crescător, respectiv descrescător către binecunoscuta constanta (lui *Euler*) ***e*** – şi,mai mult, avem şirul de inegalități :

$$\mathbf{2 = e_1 < \ldots < e_n < \ldots < e < \ldots < E_n < \ldots < E_1 = 4 .}$$

O valoare rațională aproximativă a lui este $e \simeq 2,7182818284$. Mai multe date despre aceasta – cu adevărat cea mai importantă constantă din analiza matematică (poate chiar din toata matematica !..), se pot consulta în [1] – o carte exclusiv dedicată acestui număr.

<u>6.</u> *<u>Observație metodică</u>*

După cum se poate constata şi din cele de mai sus , studiul simultan al monotoniei tandemului de şiruri $(e_n),(E_n)$, nu complică calculele , ci din contra – le scurtează . Practic studiul mărginirii şirului (E_n) **,**care prin alte metode necesită o demonstrație separată si relativ laborioasă , rezultă acum efectiv din monotonia celor două şiruri .

<u>Bibliografie</u>

[1] **Maor Eli** ***, „ e : the story of a number*** **”**, Princeton University Press, Princeton, New Jersey,1994 .

Prof. *dr.* ***Dorin Mărghidanu*** , Corabia
d.marghidanu@gmail.com

Probleme rezolvate din RMCS nr.28

Clasa a V-a

V.140 Să se determine numărul natural $n \geq 1004$ şi numerele prime $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$ astfel încât să aibă loc egalitatea $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 2009$. Să se arate ca numărul $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ este compus.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Soluție: Evident $n = 1004$ şi $p_1 = p_2 = ... = p_{1003} = 2, p_{1004} = 3$. Pe de altă parte, $p_1 p_2 \ldots p_n + 1 = 2^{1003} \cdot 3 + 1$ are ultima cifră 5, deci este compus. □

V.141 Să se arate că nu există numere naturale nenule m şi n, cu n impar, astfel încât $2^n + 5^n = m^{2010}$.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Soluție: Deoarece $m^{2010} = \left(m^{1005}\right)^2$, adică este pătrat perfect, deci ultima sa cifră poate fi $\{0,1,4,5,6,9\}$ şi $u\left(2^n\right) = \begin{cases} 2, & n = 4k+1 \\ 8, & n = 4k+3 \end{cases}$, unde $k \in \mathbb{N}$ şi $u\left(5^n\right) = 5$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, deducem de aici că ultima cifră a numărului $2^n + 5^n$ poate fi 7 sau 3; aşadar egalitatea $2^n + 5^n = m^{2010} = \left(m^{1005}\right)^2$ nu poate avea loc. □

V.142 Determinați numerele naturale nenule a şi b pentru care: $3a + 4b = 2009$ şi $\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1} + \frac{a+2}{b+2} + ... + \frac{a+2008}{b+2008} = 2009$

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

Soluție: Dacă $a < b \Rightarrow \frac{a}{b} < 1$, de unde avem şi $\frac{a+1}{b+1} < 1, ..., \frac{a+2008}{b+2008} < 1$, deci suma din enunț devine mai mică decât 2009.
La fel se procedează în cazul $b > a$ .Rămâne deci singura situație viabilă $a = b$, caz in care se verifică a doua egalitate din ipoteză. Nu rămâne decât să folosim prima egalitate şi ajungem la $a = b = 287$. □

V.143 Determinați numărul natural nenul n pentru care numărul $A = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot n + 223$ este pătrat perfect.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

Soluție: Pentru $n \geq 5$ ultima cifră a numărului A este 3, deci A nu poate fi pătrat perfect. Rămân de analizat sitațiile pentru care $n \in \{1,2,3,4\}$; pentru $n = 2$ obținem $A = 225 = 15^2$, deci pătrat perfect, aceasta fiind singura soluție a problemei.□

V.144 Arătați că nu există perechi de numere naturale (x, y) astfel încât să avem $5^x + y^4 = 2009$.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

Soluție: Se știe că $u(y^4) \in \{0,1,5,6\}$ .Dacă $x = 0$ avem că $u\left(5^x + y^4\right) \in \{1,2,6,7\}$ deci egalitatea nu poate avea loc.

Dacă x este natural nenul, atunci avem că $u\left(5^x + y^4\right) \in \{0,1,6,5\}$, deci egalitatea nu poate avea loc nici în acest caz. □

V.145 Se consideră numărul $A = 2 + 3^2 + 2^3 + 3^4 + 2^5 + 3^6 + ... + 2^{99} + 3^{100}$. Calculați restul împărțirii la 10 a numărului *A*.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: $B = 3^2 + 3^4 + 3^6 + ... + 3^{100} = 3^2(1+3^2) + 3^6(1+3^2) + ... + 3^{98}(1+3^2)$, așadar B este divizibil cu 10; $C = 2 + 2^3 + 2^5 + ... + 2^{99} =$
$= 2(1+2^2) + 2^5(1+2^2) + ... + 2^{97}(1+2^2)$ este deasemenea mulptiplu de 10, de unde restul împărțirii lui $A = B + C$ la 10 este 0. □

V.146 Arătați că numărul 2009 se poate scrie ca o sumă de numere naturale care au produsul egal cu 2009.

Red.RMCS

Soluție: $2009 = 7\cdot 7\cdot 41 \Rightarrow 2009 = \underbrace{1+1+...+1}_{1919\ termeni} + 41 + 49$ (după cum au observat câtiva elevi, aceasta nu este singura posibilitate). □

V.147 Găsiți restul împărțirii numărului $B = 21^{2009} - 10$ la 63.

Prof. Romeo Zamfir, Galați

Soluție: $B = 3^{2009}\cdot 7^{2009} - 10 = ... = 63^{1004}\cdot 3\cdot 7^{1005} - 10 = 63k - 10$, unde $k \in \mathbb{N}$; avem astfel: $B = 63(k-1) + 53, k > 2$; restul cerut este deci 53.

Soluția autorului: $B = 21^{2009} - 10 = 21^{2007}\cdot 63\cdot 7 - 63 + 53$.□

V.148 Determinați numerele naturale *m* și *n* știind că

$$130 < 2^m + 2^n < 140.$$

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: Putem presupune $m \leq n$ și astfel $a = 2^m + 2^n = 2^m(1 + 2^{n-m})$, care este evident număr par; avem $a \in \{132,134,136,138\}$ și folosim descompunerea în factori primi a celor patru numere. Se ajunge la $m = 2, n = 7$ sau $m = 3, n = 7$ (sau invers !). □

V.149 Să se determine câte perechi (A, B) de mulțimi având elementele numere naturale nenule satisfac simultan condițiile:

a) A nu conține niciun număr par;

b) $A \cup B$ are exact șase elemente;

c) pentru orice $a \in A$, există $b \in B$ astfel încât $2a + b = 16$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: Se deduce imediat că, dacă $a \in A$, atunci a este impar și $a \leq 7$. Se ajunge imediat, analizând cazurile posibile, la patru perechi, anume:
$A_1 = \{1,3,5\}, B_1 = \{6,10,14\}$, $A_2 = \{1,3,7\}, B_2 = \{2,10,14\}$,
$A_3 = \{1,5,7\}, B_3 = \{2,6,14\}$ și $A_4 = \{3,5,7\}, B_4 = \{2,6,10\}$. □

Clasa a VI-a

VI.140 Determinați numărul maxim și numărul minim de numere întregi consecutive care au suma egală cu 26.

Concurs Braşov

Soluție: dacă numerele sunt $x+1, x+2, ..., x+n,\ x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ajungem la $n(2x + n + 1) = 52$, de unde $n \in \{2,4,13,26,52\}$. Imediat deducem că numărul minim căutat este 4 (într-adevăr, $5+6+7+8=26$), iar numărul maxim este 52 (avem: $-25-24-...-1+0+1+...+25+26$).

VI.141 a) Arătați că pentru orice numere întregi a, b este adevărată egalitatea $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$

b) Determinați numerele naturale x și y pentru care $x^3 - 3^y = x^2 - 2^y$

Prof.Marius Damian, Brăila

Soluţie: b) $x^3 - x^2 = x \cdot x \cdot (x-1) = 3^y - 2^y$ şi, deoarece $x(x-1)$ este număr par, deducem că $3^y - 2^y$ trebuie să fie număr par, de unde $y=0$, apoi $x \in \{0,1\}$. □

VI.142 Găsiţi cel mai mic număr natural care se scrie (în baza 10) doar cu cifrele 2 şi 3 şi care se divide cu 132.

Prof. Dorel Miheţ, Timişoara

Soluţie: $132 \cdot 6 = 2112$ nu satisface enunţul, dar $132 \cdot 66 = 23232$ convine, deci acesta este numărul căutat. (sau: $132 = 3 \cdot 4 \cdot 11$ şi astfel numărul căutat n trebuie să fie multiplu de 3, de 4 şi de 11; deducem că ultimele două cifre ale sale sunt 32, etc.) □

VI.143 Fie *m* şi *n* două numere diferite de câte 4 cifre distincte, acestea fiind 1, 2, 3 şi 4. Arătaţi că *m* nu divide pe *n* .

Prof. Daniela Vlaicu, Zalău

Soluţie: Dacă $n = \overline{abcd}$, atunci $a+b+c+d=10 \Rightarrow n = 9k+1$; dacă $m/n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2$ cu $n = km \Rightarrow k = 9p + r, r \in \{0,1,2...,8\}$, de unde $r = 1 \Rightarrow k \geq 10$, absurd, deoarece $\frac{n}{m} < 4$. □

VI.144 Să se determine numerele naturale nenule *p* şi *q* pentru care

$$\frac{2^q+1}{2^p-1} \in \mathbb{N}.$$

* * *

Soluţie: Deosebim cazurile:

a) $p=1$. Evident, orice număr natural *q* satisface enunţul; b) $p=2$.

Avem $\frac{2^q+1}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{(3-1)^q+1}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow q = 2m+1, m \in \mathbb{N}$; c) dacă $p > 2$, avem $q > p \Rightarrow q = cp + r, 0 \leq r < p$ şi astfel

$\frac{2^q+1}{2^p-1} = 2^{q-p} + \frac{2^{q-p}+1}{2^p-1} = 2^{q-p} + 2^{q-2p} + ... + \frac{2^r+1}{2^p-1}$, cu $\frac{2^r+1}{2^p-1} < 1$, de unde $\frac{2^q+1}{2^p-1} \notin \mathbb{N}$. (Problema era sigur mai nimerită la clasa a VII a sau chiar a VIII a, ne cerem scuze; oricum, s-a primit o soluţie corectă şi completă de la elevul Andrei Ştefănescu, deşi redactată pe 4 pagini !). □

VI.145 Un elev a simplificat o fracţie de forma $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$ ştergând *b* atât de la numărător cât şi de la numitor, obţinând totuşi rezultatul corect.

Câte astfel de fracţii există la care, simplificând greşit, obţinem un rezultat corect ? (cifrele *a,b,c* sunt nenule şi distincte)

* * *

Răspuns: patru fracţii: $\frac{16}{64}, \frac{19}{95}, \frac{49}{98}, \frac{26}{65}$. □

VI.146 Arătaţi că pentru orice număr natural nenul *n* , fracţia $F(n) = \frac{6^{2n}+2001}{8^n+811}$ este reductibilă.

Prof. Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

Răspuns: $6^{2n} = (7-1)^{2n} = 7k+1$ şi $8^n = (7+1)^n = 7p+1$; se arată imediat că fracţia este reductibilă prin 7. □

VI.147 Arătaţi că dacă *a,b,c,d* sunt numere întregi astfel încât $7/(5a+9b+12c-2d)$, atunci $7/(a-b+c+d)$.

Prof. Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

Idee: Dacă $5a+9b+12c-2d = x$ şi $a-b+c+d = y$, avem: $3x - y = 7z, z \in \mathbb{Z}$. □

VI.148 Să se găsească numerele $\overline{ab}$ care sunt divizibile cu $4a+3b$.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

Soluţie: $k(4a+3b) = \overline{ab}$ şi, pentru $k \geq 3$ avem $\overline{ab} = 10a + b \geq 3(4a+3b) = 12a+9b$, imposibil. Aşadar $k \in \{1,2\}$. Se analizează uşor cazurile posibile şi se ajunge la numerele 13, 26, 39, 52. □

VI.149 La un concurs de matematică au fost date 30 de probleme.Pentru fiecare problemă rezolvată corect s-au acordat câte 5 puncte, iar pentru fiecare problemă rezolvată greşit s-au scăzut câte 3 puncte. Câte probleme a rezolvat corect un elev care a obţinut un total de 118 de puncte?

Concurs Timiş

Soluţie: Pentru fiecare problemă rezolvată greşit, elevul pierde din punctajul maxim $5+3=8$ puncte; dacă ar fi rezolvat corect toate problemele, elevul ar fi obţinut 150 de puncte. Cum $150-118=32$, deducem că elevul a rezolvat greşit $32:8=4$ probleme, deci a rezolvat corect 26 de probleme. □

Clasa a VII-a

VII.140 Se consideră un triunghi *ABC* şi punctele *D* şi *E* pe *(BC)* astfel încât $BD = DE = EC$; se notează cu *F* simetricul lui *A* faţă de *B*, $AD \cap FC = \{G\}$ şi $EG \cap AB = \{H\}$. Arătaţi că $FH = AB$.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

Soluție: $\frac{DC}{DB} = 2$ şi $BA = BF \Rightarrow D$ este centru de greutate în triunghiul *ACF*, de unde avem că *G* este mijlocul lui *(FC)*. Cu teorema lui Menelaus în triunghiul *BFC* avem: $\frac{EB}{EC} \cdot \frac{GC}{GF} \cdot \frac{HF}{HB} = 1 \Rightarrow 2HF = HB$, deci *F* este mijlocul lui *(BH)*, aşadar $HF = FB = AB$. □

VII.141 Se consideră mulţimea $A = \{1, 2, \ldots, 2009\}$ şi mulţimile $A_1, A_2, ..., A_n$ care satisfac proprietăţile :

a) pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$, mulţimea A_k are cel puţin opt elemente;

b) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = A$.

(1) Să se determine valoarea maximă a numărului n ;

(2) Să se arate că există $k \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât A_k conţine două elemente a căror diferenţă este multiplu de 8.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Soluția autorului: Deoarece $2009 = 8 \cdot 251 + 1$, vor exista cel mult 251 de astfel de submulţimi.Este clar, conform principiului cutiei, că, în cel mai nefavorabil caz (acela în care există 250 de submulţimi de forma $B = \{8n_1, 8n_2 + 1, 8n_3 + 2, \ldots, 8n_8 + 7\}$), a 251-a dintre submulţimi va avea forma $C = \{8m_1, 8m_2 + 1, 8m_3 + 2, \ldots, 8m_8 + 7, 8m_9 + s\}$, unde $s \in \{0, 1, \ldots, 7\}$. Prin urmare vor exista două dintre elementele mulţimii C care vor da acelaşi rest prin împărţirea la 8, adică diferenţa acestora va fi multiplu de 8. □

VII.142 La un turneu de şah au participat băieţi şi fete astfel încât fiecare participant la turneu a jucat o partidă cu fiecare dintre ceilalţi. Dacă se ştie că băieţii au jucat între ei 21 de partide şi în total s-au jucat 66 de partide, aflaţi câţi băieţi şi câte fete au participat la turneu.

Prof.Marius Damian, Brăila

Soluție: Din $\frac{n(n-1)}{2}=21$, deducem $n=7$ (băieți) și, din

$7m+\frac{m(m-1)}{2}=66-21=45$, ajungem la $m=5$ (fete). □

VII.143 Fie $ABCD$ un romb, $E\in(BC), F\in(AB)$ astfel încât $m(\measuredangle ADF)=m(\measuredangle EDF)$. Dacă $DE=AF+CE$, arătați că $ABCD$ este pătrat.

Prof. Mircea Fianu, București

Soluție: O problemă frumoasă și nu foarte ușoară. Considerăm $M\in DE$ astfel încât $ME=CE\Rightarrow DM=AF$. Notăm $CM\cap AD=\{N\}$, $CM\cap FD=\{P\}, CM\cap BD=\{R\}, AC\cap FD=\{Q\}$. Deoarece triunghiul *CME* este isoscel, considerente de unghiuri conduc și la concluzia că triunghiul *DMN* este isoscel; cum *DP* este bisectoare, deducem $DP\perp CN$. Din $\Delta AQF\sim\Delta CQD$ avem: $\frac{AQ}{QC}=\frac{AF}{CD}$ (1), iar din $\Delta DRN\sim\Delta BRC$ avem: $\frac{NR}{RC}=\frac{DN}{BC}$ (2). Cum $AF=DN, BC=CD$, din(1) și (2) deducem: $\frac{AQ}{QC}=\frac{NR}{RC}\Rightarrow RQ\,//\,AN$. Acum, deoarece R este ortocentrul triunghiului *DQC*, ajungem la: $RQ\perp DC, RQ\,//\,AD$, de unde $AD\perp DC$, așadar $ABCD$ este pătrat. □

VII.144 Determinați numerele reale x și y pentru care

$$x+y=4 \text{ și } 2^x+2^y=8.$$

Prof. Heidi Feil, Oțelu - Roșu

Soluție: A doua egalitate se poate scrie $2^x+2^{4-x}=8$ sau, notând $t=2^x$, $t+\frac{16}{t}=8$, de unde $(t-4)^2=0\Rightarrow t=4\Rightarrow x=2, y=2.$ □

VII.145 Determinați mulțimile M cu trei elemente, numere naturale, care satisfac proprietatea: dacă $x\in M$, atunci $\sqrt{x}\in M$ sau $x^2\in M$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

Răspuns: Avem mai multe soluții:

$M_1=\{0,a,a^2\}, a\in\mathbb{N}, a\geq 2$, $M_2=\{1,a,a^2\}, a\in\mathbb{N}, a\geq 2$,

$M_3=\{b,b^2,b^4\}, b\in\mathbb{N}, b\geq 2$. □

VII.146 Pe laturile *AD* și *AB* ale rombului *ABCD* se consideră punctele *E*, respectiv *F* astfel încât $AE=DF$. Dreptele *BC* și *DE* se intersectează în punctul *P*, iar *CD* și *BF* se intersectează în *Q*. Arătați că:

a) $\frac{PE}{PD}+\frac{QF}{QB}=1$;

b) *P,A* și *Q* sunt coliniare.

Concurs Deva

Soluție: a) $BE\,//\,CD\Rightarrow\frac{PE}{PD}=\frac{BE}{CD}$ și $DF\,//\,BC\Rightarrow\frac{QF}{QB}=\frac{FD}{BC}$, de unde:

$\frac{PE}{PD}+\frac{QF}{QB}=\frac{BE}{CD}+\frac{FD}{BC}=1$; b) $DF\,//\,BC$ conduce la:

$\frac{FQ}{QB}=\frac{FD}{BC}=\frac{EA}{AB}\Rightarrow EF\,//\,AQ$ (Thales). Din $BE\,//\,CD$, avem și

$\frac{PE}{PD}=\frac{BE}{CD}=\frac{AF}{AD}\Rightarrow EF\,//\,AP$; conform axiomei lui Euclid, avem că punctele *P, A, Q* sunt coliniare. □

VII.147 Se consideră dreptunghiul *ABCD* și se notează cu *E* simetricul lui *A* față de *BD,* iar $BE\cap CD=\{M\}$. Arătați că:

a) patrulaterul *BECD* este trapez isoscel;
b) axa de simetrie a trapezului *BCED* conține centrul dreptunghiului *ABCD.*

Prof. Nistor Budescu, Dalboșeț

Soluție: a) BD este mediatoarea segmentului *(AE)* și imediat se ajunge la $\Delta BDA\equiv\Delta BDE$ (1) ,de unde $\measuredangle BED$ este drept, apoi $\Delta EDM\equiv\Delta CBM$ (2). Dacă notăm cu *Q* proiecția lui *M* pe *BD* și $\{P\}=MQ\cap CE$, din (2) deducem *(MQ* este în triunghiul *DMB* și înălțime și bisectoare.Se ajunge imediat (!) la $MP\perp CE\Rightarrow PQ\perp EC$. Deducem acum $BD\,//\,CE$; cum $BC=AD=DE$, *BCED* este trapez isoscel; b) $MB=MD, MQ\perp BD$ conduce la: *Q* este mijlocul lui *(BD)*, deci $Q\in AC$. □

VII.148 Să se determine numerele naturale *x* și *y* pentru care

$$4x^2+2x+11=y^2.$$

Prof. Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

Soluție: $16x^2+8x+1+43=4y^2$ conduce la $4y^2-(4x+1)^2=43$, de unde $(2y-4x-1)(2y+4x+1)=43$. Analizând cazurile care apar, deducem: $x=5, y=11$. □

VII.149 Se consideră un triunghi *ABC* și *M* mijlocul laturii *(BC)*. Arătați că există $D\in(AB), E\in(AC)$ astfel încât $DE//BC$ și $m(\measuredangle DME)=90^o$.

Soluție: Notăm cu *D*, respectiv *E* intersecțiile bisectoarelor unghiurilor $\measuredangle AMB, \measuredangle AMC$ cu *(AB)*, respectiv *(AC)*. Avem imediat:

$m(\measuredangle DME)=\frac{1}{2}m(\measuredangle AMB)+\frac{1}{2}m(\measuredangle AMC)=90^o$; folosind teorema bisectoarei: $\frac{AD}{DB}=\frac{AM}{MB}=\frac{AM}{MC}=\frac{AE}{EC}$, iar cu reciproca teoremei lui Thales, ajungem la $DE//BC$. □

Clasa a VIII-a

VIII.140 Determinați numerele întregi *a* și *b* pentru care

$$\left(\frac{\sqrt{2}-a}{\sqrt{2}+a}+\frac{\sqrt{2}-b}{\sqrt{2}+b}\right)\in\mathbb{Z}$$

Prof. Traian Duță, Făgăraș

Soluție: Notăm suma din paranteză cu $k\in\mathbb{Z}$ și avem imediat: $2(2-ab)=k(2+ab)+\sqrt{2}\cdot k(a+b)$. Cum $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, deducem: $k=0, ab=2$ sau $a+b=0, k=-2+\frac{8}{2-a^2}\in\mathbb{Z}$. Se ajunge astfel la: $(a,b)\in\{(1,-1),(-1,1),(0,0),(1,2),(2,1),(-1,-2),(-2,-1)\}$. □

VIII.141 Determinați numerele întregi *x* și *y* pentru care

$$\sqrt{y-x}+\sqrt{x}=3 \text{ și } \sqrt{y+x}+\sqrt{x}=5.$$

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeș

Răspuns: $\sqrt{y-x}=3-\sqrt{x}$ și $\sqrt{y+x}=5-\sqrt{x}$; se ridică la pătrat cele două egalități, se elimină *y* și se ajunge destul de rapid la $x=4, y=5$. □

VIII.142 Fie *A* o mulțime de numere reale cu cel puțin trei elemente. Arătați că, dacă pentru orice $a,b\in A, a\neq b$, avem $(a^3+b)\in\mathbb{Q}$, atunci $A\subset\mathbb{Q}$.

Prof. Romeo Ilie, Brașov

Soluție: Reamintim că $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ și $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$. Fie $a,b,c\in A$ distincte. Din $c^3+a, c^3+b\in\mathbb{Q}$, deducem: $a-b\in\mathbb{Q}$. Din $a^3+c, b^3+c\in\mathbb{Q}$, avem și $a^3-b^3\in\mathbb{Q}$. Cum $a\neq b$, $a-b\in\mathbb{Q}$, $a^3-b^3\in\mathbb{Q}$, ajungem la $a^2+ab+b^2\in\mathbb{Q}$. Cum $(a-b)^2\in\mathbb{Q}$, deducem și $ab, a^2+b^2\in\mathbb{Q}$. Din $a^3+b, a+b^3\in\mathbb{Q}$, $ab, a^2+b^2\in\mathbb{Q}$, rezultă $a+b\in\mathbb{Q}$. Acum, deoarece $a+b\in\mathbb{Q}$ și $a-b\in\mathbb{Q}$, avem: $a,b\in\mathbb{Q}\Rightarrow A\subset\mathbb{Q}$. □

VIII.143 Dacă $x,y\in(0,\infty)$, arătați că: $\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}\geq\frac{2(x+y)}{2+x+y}$. Precizați în ce caz avem egalitate.

Concurs Suceava

Soluție: Adunăm 2 în fiecare membru al inegalității propuse și aceasta devine $(x+y+1)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\right)\geq\frac{4(x+y+1)}{2+x+y}$, adică $(x+1+y+1)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\right)\geq 4$, care este adevărată, egalitatea obținându-se pentru $x=y$ (se arată imediat că $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$).□

VIII.144 În interiorul unui cub de latură 6 se consideră 1001 cuburi unitate cu fețele paralele cu fețele cubului dat. Arătați că există două cuburi unitate cu proprietatea că centrul unuia se află în interiorul sau pe fețele celuilalt.

Prof. Dinu Șerbănescu, București

Soluție: împărțind cubul în 12^3 cuburi de latură $\frac{1}{2}$, avem: centrele celor 1001 cuburi unitate se află la o distanță de cel puțin $\frac{1}{2}$ față de fețele cubului inițial, prin urmare ele nu se pot găsi în interiorul cuburilor de latură $\frac{1}{2}$ ce au o față pe una din fețele cubului dat. Rezultă că cele 1001 de centre se află în cele 1000 de cuburi de latură $\frac{1}{2}$ interioare cubului dat.

Atunci două dintre centrele cuburilor unitate se află în interiorul sau fe fețele unui cub de latură $\frac{1}{2}$. $\square$

VIII.145 Volumul unui paralelipiped dreptunghic este 24. Mărind dimensiunile cu 2, 3, respectiv 4, volumul crește de 8 ori. Calculați aria totală a paralelipipedului.

* * *

Soluție: Dacă dimensiunile inițiale sunt *a,b,c*, noile dimensiuni sunt $x=a+2, y=b+3, z=c+4$. Raportul volumelor este $\frac{V'}{V}=\left(\frac{x}{a}\right)^3=\left(\frac{y}{b}\right)^3=\left(\frac{z}{c}\right)^3=8$. Deducem: $\frac{a+2}{a}=\frac{b+3}{b}=\frac{c+4}{c}$, de unde, calcule facile conduc la $a=2, b=3, c=4$ și finalizarea e la îndemână. $\square$

VIII.146 Să se determine minimul expresiei

$$E(x,y)=x^3+y^3-3xy\ ,\ x,y>0.$$

* * *

Soluție: Folosim $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\geq 0$, pentru $x,y,z\geq 0$. Deducem astfel: $x^3+y^3+z^3\geq 3xyz$ pentru $x,y,z\geq 0$ și, pentru $z=1$, ajungem la: $E_{\min}=-1$. $\square$

VIII.147 Dacă *m* și *n* sunt numere naturale, arătați că numărul 5^n+5^m se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte dacă și numai dacă $n-m$ este număr par.

Prof. Vasile Zidaru, Sf.Gheorghe

Soluție: Presupunem că numărul 5^n+5^m se scrie ca o sumă de două pătrate perfecte și, prin absurd, presupunem că *m* și *n* au parități diferite, de exemplu $m=2k+1, n=2p,\ k,p\in\mathbb{N}$. Este acum de observat că $25=8\cdot 3+1\Rightarrow 25^a=\mathcal{M}8+1, \forall a\in\mathbb{N}$. Deducem: $5^n+5^m=5^{2p}+5^{2k+1}=25^p+5\cdot 25^k=5\cdot(\mathcal{M}8+1)+\mathcal{M}8+1=\mathcal{M}8+6$. Cum însă un pătrat perfect are una dintre formele $\mathcal{M}8,\ \mathcal{M}8+1,\ \mathcal{M}8+4$, suma a două pătrate perfecte nu poate fi de forma $\mathcal{M}8+6$, contradicție.

Reciproc acum ; fie *m* și *n* naturale de aceeași paritate. Dacă $m=2k, n=2p,\ k,p\in\mathbb{N}$, atunci $5^n+5^m=\left(5^k\right)^2+\left(5^p\right)^2$; dacă $m=2k+1, n=2p+1,\ k,p\in\mathbb{N}$, atunci

$$5^n+5^m=5\cdot\left[\left(5^k\right)^2+\left(5^p\right)^2\right]=\left(1^2+2^2\right)\cdot\left[\left(5^k\right)^2+\left(5^p\right)^2\right]=$$

$$=\left(2\cdot 5^k+5^p\right)^2+\left(5^k-2\cdot 5^p\right)^2.\ \square$$

VIII.148 Fie mulțimea $M=\{1,2,3,..,20\}$**.** Să se demonstreze că oricum am alege 14 numere distincte din M, putem găsi printre acestea două numere al căror produs este pătrat perfect **.**

Prof. dr. Dorin Mărghidanu, Corabia

Soluție: Construim mai întâi submulțimile lui *M* care au proprietatea că produsul a câte două elemente ale lor dau un pătrat perfect: $M_1=\{1,4,9,16\}$, $M_2=\{2,8,18\}, M_3=\{3,12\}, M_4=\{5,20\}$ (remarcăm că acestea au împreună 11 elemente); completăm, până la o partiție a lui *M*, cu submulțimi care nu mai au această proprietate: $M_5=\{6\}, M_6=\{7\}, M_7=\{10\}, M_8=\{11\}$, $M_9=\{13\}, M_{10}=\{14\}, M_{11}=\{15\}, M_{12}=\{17\}$, $M_{13}=\{19\}$.(acestea au, împreună, nouă elemente). Alegând 14 elemente oarecare din M, va trebui să alegem și cel puțin două numere din una dintre submulțimile M_1-M_4, care se bucură de proprietatea din enunț. $\square$

VIII.149 Fie $[AB]$ și $[CD]$ două segmente necoplanare, iar *E* și *F* mijloacele lor. Arătați că: $AD+BC>2EF$.

Concurs Olt

Soluție: Dacă *L* este mijlocul lui *(AC)*, avem $EL=\frac{1}{2}BC, LF=\frac{1}{2}AD$. Din triunghiul *ELF* deducem $EL+LF>EF\Rightarrow\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}AD>EF$ ... $\square$

Clasa a IX-a

IX.140 Fie *A* o mulțime de numere naturale și $f:A\to A$ o funcție cu proprietățile:

a) există $a\in A$ cu $f(a)\neq a$;
b) $f(m)-f(n)=m-n, \forall m,n\in A$.

Arătați că mulțimea *A* este infinită.

Prof. Mircea Becheanu, București

Soluție: Din b) avem $f(m)-m=f(n)-n, \forall m,n\in A$, deci $f(m)-m$ este constantă, așadar $f(n)-n=k$ sau $f(n)=n+k$, k constantă.
Presupunem că A este finită și notăm $a=\min A, b=\max A$, de unde $f(a)\geq a, f(b)\leq b \Rightarrow a+k\geq a, b+k\leq b\Rightarrow k=0$.Ajungem astfel la $f(n)=n$, contradicție cu a). □

IX.141 Se consideră punctele coliniare distincte *A,B,C,D,E* astfel încât $AB=BC=CD=DE$. Dacă *F* este un punct din plan, iar *G* și *H* centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor *ADF,* respectiv *BFE,* arătați că $GH\perp FC$.

Concurs Baltic 1997

Soluție: Dacă *U* și *T* sunt proiecțiile lui *G* și respectiv *H* pe *AB*, atunci *U* și *T* sunt mijloacele segmentelor *(BC)*și *CD)*. Notăm $AB=a$ și avem:

$$FG^2-GC^2=AG^2-CG^2=AU^2-TC^2=\left(\frac{3a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=4a^2$$. Analog

$FH^2-CH^2=4a^2$, așadar ajungem la $FG^2-GC^2=FH^2-CH^2$, de unde (!!) avem : $GH\perp FC$. □

IX.142 Fie $M\subset\mathbb{R}, M\neq\varnothing$ și funcțiile $f,g:M\to M$ cu proprietățile:
a) $f(g(x))=g(f(x))=x,\ \forall x\in M$;
b) $f(x)+g(x)=x,\ \forall x\in M$.

Arătați că:
1) $x\in M\Rightarrow -x\in M$; 2)

Concurs Moldova 2002

Soluție: Din $f(x)+g(x)=x,\ \forall x\in M$ deducem:
$f(f(y))+g(f(y))=f(y)$, adică $f(f(y))+y=f(y), y\in M$. Avem astfel: $f(f(f(y)))=f(f(y))-f(y)=-y$ și deci, pentru $x\in M$, avem și $-x=f(f(f(x)))\in M$. Deoarece $f(x)+g(x)=x,\ \forall x\in M$ și $f(x)-f(f(x))=x$, rezultă $g(x)=-f(f(x))$, deci:
$x=f(g(x))=f(-f(f(x)))=-f(f(f(x)))$. Deducem:
$f(-f(y))=-f(f(y))$ și $f(-x)=-f(x), \forall x\in M$. □

IX.143 Determinați numerele reale *x,y,z* care satisfac proprietățile:
a) $0<x\leq 11$; b) ; c) $x+y+z=38$; d) $xyz=2002$.

Concurs Australia 2002

Soluție: Dacă $x\leq 10$, avem: $2002=xyz\leq x\left(\frac{y+z}{2}\right)^2=x\left(\frac{38-x}{2}\right)^2$.

Notăm $x=10-2a$ și deducem: $2002\leq 1960-112a-46a^2-2a^3\leq 1960$, fals. Așadar: $10<x\leq 11$(să nu uităm: nu știm că numerele sunt întregi !!) Deoarece $x+y+z=38$, avem: $27\leq y+z<28$ și, cum

$yz=\left(\frac{y+z}{2}\right)^2-\left(\frac{y-z}{2}\right)^2$ și $z\geq 14$, avem că maximul lui *yz* se atinge când $z=14$. Aceasta înseamnă că
$2002=xyz\leq 14x(24-x)\Leftrightarrow x(24-x)\geq 143\Leftrightarrow (x-12)^2\leq 1$. Cum însă $x\leq 11$, ultima relație nu poate avea loc decât pentru $x=11, z=14$, de unde obținem și $y=13$. (Problemă dificilă, credem). □

IX.144 Să se arate nu există nici un triunghi ABC în care

$$tg\,A=\frac{a-b}{c},\ tg\,B=\frac{b-c}{a} \text{ și } tg\,C=\frac{c-a}{b}.$$

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Soluție: Utilizăm identitățile:

$\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}=0,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}^*$ (se verifică prin calcul direct) $tg\,A+tg\,B+tg\,C=tg\,A\cdot tg\,B\cdot tg\,C$ (valabilă în orice triunghi ABC care nu e dreptunghic).În cazul în care ar exista un triunghi ABC cu proprietățile din enunț, folosind relațiile anterioare, ar rezulta că $tg\,A\cdot tg\,B\cdot tg\,C=0$, adică unul din unghiurile triunghiului ar fi nul sau alungit, fals. □

IX.145 Comparați numerele $a=tg\frac{\pi}{9}$ și $b=2-\sqrt{2}$.

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu - Roșu

Idee: Se calculează $tg\frac{\pi}{8}$ și se folosește monotonia funcției tg. □

IX.146 Determinați numerele întregi *x* și *y* care satisfac :

$$(x+y)(x^2+y^2)=1+3xy$$

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

Soluție: Notăm $S=x+y, P=xy\in\mathbb{Z}$ şi ajungem la $S(S^2-2P)=1+3P$, de unde $P=\frac{S^3-1}{2S+3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 8P\in\mathbb{Z}$, adică $\frac{8S^3+27-35}{2S+3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow(2S+3)\in D(35)$; se ajunge la $S\in\{-19,-5,-4,-2,-1,1,2,16\}$ .Se analizează cazurile ce apar şi în final se ajunge la $(x,y)\in\{(1,1),(1,0),(0,1),(1,-2),(-2,1)\}$. □

IX.147 Să se determine numerele reale *m* pentru care rădăcinile ecuației $x^2-2(m-1)\cdot x+m=0$ sunt întregi.

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu - Roşu

Soluție: Folosind relațiile lui Viete, găsim o relație între rădăcini, independentă de *m* : $x_1+x_2-2x_1x_2+2=0$, de unde $x_1=\frac{x_2+2}{2x_2-1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2x_1\in\mathbb{Z}$, adică $1+\frac{5}{2x_2-1}\in\mathbb{Z}$ .Analizând cazurile care apar, ajungem la $m\in\{0;3\}$. Obligatoriu (de ce ?), verificare. □

IX.148 Să se arate că dacă într-un triunghi *ABC* avem

$$b^2-bc+c^2\geq a^2, \text{ atunci } B+C\geq\frac{2\pi}{3}.$$

Red.RMCS

Soluție:Folosind ipoteza, teorema cosinusului şi monotonia funcției cos, avem: $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\geq\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$, de unde $A\leq\frac{\pi}{3}\Rightarrow B+C\geq\frac{2\pi}{3}$.□

IX.149 Precizați natura triunghiului *ABC* în care

$$a^2\sin B+b^2\sin C+c^2\sin A=6\cdot\mathcal{A}_{ABC}$$

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu - Roşu

Soluție: Folosind teorema sinusurilor, egalitatea devine $\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{2R}=6S$ (*) . Folosind inegalitatea mediilor avem însă $a^2b+b^2c+c^2a\geq 3\sqrt[3]{(abc)^3}=3abc$ şi astfel (*) conduce la $6S\geq\frac{3abc}{2R}$ sau $S\geq\frac{abc}{4R}$; cum însă $S=\frac{abc}{4R}$, ajungem la $a=b=c$. □

Clasa a X-a

X.140 Să se arate că dacă $a,b,c,d\in(0,\infty)$,atunci

$$\frac{a^4}{b^2c}+\frac{b^4}{c^2d}+\frac{c^4}{d^2a}+\frac{d^4}{a^2b}\geq a+b+c+d.$$

Prof. dr. Dorin Mărghidanu, Corabia

Soluție: Cu inegalitatea mediilor , avem

$$:\frac{a^4}{b^2c}+2b+c=\frac{a^4}{b^2c}+b+b+c\geq 4\cdot\sqrt[4]{\frac{a^4}{b^2c}\cdot b^2\cdot c}=4a \quad ,$$

şi analoagele , care se însumează. □

X.141 Să se determine toate funcțiile $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ care verifică relația: $x^2+2f(xy)+y^2=f^2(x+y)$ pentru orice *x* şi *y* numere naturale.

Elev Ovidiu Stăniloiu, Bocşa

Soluție: Luăm $x=y=0$ şi avem: $2f(0)=f^2(0)$. De aici rezultă că $f(0)=0$ sau $f(0)=2$. Luăm acum $x=0$ în relația din ipoteză. Se va obține: $2f(0)+y^2=f^2(y)$. Dacă $f(0)=0$ atunci $f^2(y)=y^2$ şi de aici $f(y)=y$. Dacă $f(0)=2$ avem: $4+y^2=f^2(y)$. De aici $f(y)=\sqrt{4+y^2}$. Observăm că valorile lui f nu sunt naturale decât pentru $y=0$. Deci singura soluție a problemei este $f(y)=y,\forall y\in\mathbb{N}$.□

X.142 Să se determine funcțiile surjective $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ pentru care $f(m)+f(n)=f(f(m+n))$, oricare ar fi *m, n* numere naturale.

Elev Ovidiu Stăniloiu, Bocşa

Soluție: : Luăm $n=0$ şi notăm $f(0)=t$. Vom avea: $f(m)+t=f(f(m))\forall$ m ∈ N , Cum f este surjectivă pentru orice număr natural p există un număr natural k_p a.î. $f(k_p)=p$. Luăm $m=k_p$ în relația de mai sus şi se obține: $p+t=f(p)$ pentru orice p număr natural. Daca $t\neq 0$ atunci se observă uşor că f nu mai este surjectivă ($f(m)>0$) pentru orice m. Deci singura funcție care verifică relatia din ipoteză este funcția identică. □

X.143 Numerele naturale distincte *a,b,c,d,e,f,g,h,n* verifică egalitățile $ab + cd = ef + gh = n$. Determinați cea mai mică valoare a lui n .

Concurs Belarus

Soluție: Problema nu e deloc ușoară (nu s-a primit nicio soluție corectă). Să vedem: Ne propunem să demonstrăm că $n \geq 31$. Dacă niciunul dintre numerele date nu este egal cu 1, atunci $2n = ab + cd + ef + gh \geq 4 \cdot \sqrt[4]{abcdefgh} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 9}$; imediat avem: $n \geq 48$. Dacă unul dintre numere, de exemplu h , este egal cu 1, ne propunem să estimăm o limită inferioară pentru $2n = ab + cd + ef + g$; este relative ușor de arătat că această expresie are valoarea minimă când cel mai mare dintre *a,b,c,d,e,f,g* este chiar *g*. Avem: $2n = ab + cd + ef + gh \geq g + 3\sqrt[3]{abcdef} \geq g + 3\sqrt[3]{5040} > g + 51$. Așadar $2n > g + 51$; cum $g \geq 8 \Rightarrow 2n \geq 60 \Rightarrow n \geq 30$. Să presupunem că $n = 30$, deci $g = 8$ și $\{a,b,c,...,h\} = \{1,2,3,...,8\}$ .Exact unul dintre aceste numere este divizibil cu 5, să presupunem că $a = 5$; atunci $30 = ab + cd$, imposibil (cd nu este divizibil cu 5). Așadar $n \geq 31$. E suficient să arătăm că $n = 31$ satisface enunțul: $31 = 1 \cdot 7 + 4 \cdot 6 = 2 \cdot 8 + 3 \cdot 5$. □

X.144 Lungimile *a,b,c* ale laturilor unui triunghi satisfac egalitatea $b + c = 3a$. Arătați că *a* este lungimea celei mai mici laturi.

* * *

Soluție: Notăm semiperimetrul triunghiului cu *p* și $x = p - a, y = p - b, z = p - c$. Egalitatea din ipoteză conduce la: $3(y + z) = (x + y) + (x + z) \Leftrightarrow x = y + z$. Deoarece $b = x + z > x = y + z = a$, analog pentru c , deducem că a este lungimea celei mai mici laturi. □

X.145 Două pătrate de latură 1, având laturile paralele, se intersectează după un dreptunghi de arie $\frac{1}{8}$. Calculați distanța minimă dintre centrele celor două pătrate.

Prof. Radu Gologan, București

Soluție: Dacă *MNPQ* este dreptunghiul determinat de intersecția pătratelor unitate de centre *A* și *B*, notând $MN = x, PQ = y$, deducem: $xy = \frac{1}{8}, x, y \in [0,1]$. Paralela prin *A* la *MN* intersectează paralela prin *B* la *NP* în punctul *C* și astfel avem: $AC = 1 - x, BC = 1 - y$, de unde $AB^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 = ... = (x + y - 1)^2 + \frac{3}{4}$. Așadar distanța minimă căutată este $\frac{\sqrt{3}}{2}$ și se obține pentru $x + y - 1 = 0, xy = \frac{1}{8}$. □

X.146 Să se rezolve ecuația $\cos 2x + 2\cos 4x + \cos 6x = \cos^2 x$

Red.RMCS

Soluție: Ecuația se poate scrie $2\cos 4x \cdot \cos 2x + 2\cos 4x = \cos^2 x$ sau $2\cos 4x(1 + \cos 2x) = \cos^2 x \Rightarrow 4\cos 4x \cdot \cos^2 x = \cos^2 x$. Imediat se ajunge la: $x \in \left\{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pm\frac{1}{4} + \arccos\frac{1}{4} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}$. □

X.147 Arătați că în orice triunghi *ABC* este adevărată inegalitatea $\frac{A^2}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{B^2}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{C^2}{\sin\frac{C}{2}} \geq \frac{2\pi^2}{3}$. Precizați în ce caz are loc egalitatea.

Prof. Aurel Doboșan, Lugoj

Idei: Se folosește $\sum \sin\frac{A}{2} \leq \frac{3}{2}$ (care se poate obține, de exemplu, cu inegalitatea lui Jensen) și inegalitatea $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{\alpha_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$ (Titu Andreescu) pentru A^2, B^2, C^2 , respectiv $\sin\frac{A}{2}, \sin\frac{B}{2}, \sin\frac{C}{2}$. □

X.148 Fie $z = x + i \cdot y, i^2 = -1$, cu $xy \neq 0$ .Arătați că, dacă $|z| = 1$, atunci $\left(a + \frac{b}{x^2}\right) \cdot \left(a + \frac{b}{y^2}\right) \geq (a + 2b)^2$, $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$.

Prof. D.M.Bătinețu – Giurgiu, București

Soluție: $\left(a + \frac{b}{x^2}\right) \cdot \left(a + \frac{b}{y^2}\right) = a^2 + \frac{ab + b^2}{(xy)^2}$ și folosim $\frac{1}{(xy)^2} \geq \frac{4}{(x^2 + y^2)^2}$ (care se demonstrează imediat). □

X.149 Stabiliți dacă numărul $a=1-3\cdot C_{60}^{2}+9\cdot C_{60}^{4}-27\cdot C_{60}^{6}+81\cdot C_{60}^{8}-...$ este par sau impar.

Red. RMCS

Idei: Se consideră $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^{60}$, se calculează în două moduri (formula lui Moivre, respectiv binomul lui Newton), se ajunge la $a=\operatorname{Re}(z)=2^{60}$. □

Clasa a XI-a şi Clasa a XII-a

XI.140 Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă, să se demonstreze că există $c_1,c_2\in(a,b)$ astfel încât

$$f'(c_1)=\frac{f(c_1)-f(a)}{b-c_1} \text{ şi } f'(c_2)=\frac{f(b)-f(c_2)}{c_2-a}.$$

Prof. dr. Dorin Mărghidanu, Corabia

Idei: Teorema lui Rolle şi funcțiile $g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabile, definite prin $g(x)=(x-b)[f(x)-f(a)]$, $h(x)=(x-a)[f(b)-f(x)]$. □

XI.141 Fie Matricea $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$. Elementele lui A se modifică după următoarea regulă: Un element de pe diagonala principală se măreşte sau se micşorează cu 2, iar în rest, orice alt element se măreşte sau se micşorează cu 1. Este posibil ca după după 2008 astfel de transformări determinantul lui A să fie 2008 ?

Elev Ovidiu Stăniloiu, Bocşa

Soluție: Se observă că după un număr par de transformări elementele care nu sunt pe diagonala principală devin pare iar celelalte rămân impare. Deci după 2008 transformări matricea A va avea toate elementele, cu excepția celor de pe diagonala principală, numere pare. Determinantul lui A va fi atunci un număr impar şi deci nu poate fi 2008. □

XI.142 Determinați funcțiile polinomiale $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ştiind că există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x>a$, f nu este injectivă pe intervalul $[a,x]$

Elev Ovidiu Stăniloiu, Prof. Nicolae Stăniloiu, Bocşa

Soluție: Fie $x_0>a$. Pe intervalul $[a,x_0]$ vor exista doua numere $\alpha_1,\alpha_2\in R$ a.î. $f(\alpha_1)=f(\alpha_2)$. Conform teoremei lui Rolle există r_1 între α_1 şi α_2 astfel încât: $f'(r_1)=0$. Fie $x_1>a$ şi $x_1<r_1$. Vor exista două numere reale β_1 şi β_2 a.î. $f(\beta_1)=f(\beta_2)$ iar între β_1 şi β_2 va exista un r_2 astfel încât $f'(r_2)=0$. Evident $a<r_2<r_1$. Continuând raționamentul deducem că f' are o infinitate de rădăcini şi deci este polinomul nul. Rezultă că f este polinomul constant. □

XI.143 Fie $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi şirul $\left(x_n(a)\right)_{n\geq1}$ definit prin

$$x_n(a)=\sin a+\frac{\sin^2 a}{2}+\ldots+\frac{\sin^n a}{n},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

a) Să se demonstreze că $\lim_{n\to\infty}x_n(a)=-\ln(1-\sin a)$.

b) Să se arate că $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

a) Soluție: Dacă $f_n:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $f_n(x)=\frac{1-x^n}{1-x}$, $\forall x\in(0,1)$ şi $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Prin calcul direct se verifică dubla inegalitate:

$-\frac{1}{1-x}<\frac{1-x^n}{1-x}<\frac{1-\sin^n a}{1-x}$, valabilă pentru orice $x\in(0,\sin a)$ şi orice $n\in\mathbb{N}^*$. Integrând pe intervalul $(0,\sin a)$ această inegalitate obținem:

$$\int_0^{\sin a}\left(-\frac{1}{1-x}\right)dx \le \int_0^{\sin a} f_n(x)dx \le \int_0^{\sin a}\frac{1-\sin^n a}{1-x}dx \Rightarrow -\ln(1-\sin a) \le x_n(a) \le$$
$$\le \left(\sin^n a - 1\right)\cdot \ln(1-\sin a)$$
(1)

(am folosit scrierea inițială a funcției f_n).

În final, prin trecere la limită în **(1),** vom obține, ținând seama de criteriul cleştelui, că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(a) = -\ln(1-\sin a)$.

b) Dacă $g:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ este funcția definită prin $g(a)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n(a)$, atunci, conform punctului a), avem

c) $$g(a)=\lim_{n\to\infty}\left(\sin a+\frac{\sin^2 a}{2}+\ldots+\frac{\sin^n a}{n}\right) = -\ln(1-\sin a)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{a\nearrow\frac{\pi}{2}} g(a) = \underbrace{\lim_{a\nearrow\frac{\pi}{2}}\left(-\ln(1-\sin a)\right)}_{=+\infty} = \lim_{a\nearrow\frac{\pi}{2}}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sin a+\frac{\sin^2 a}{2}+\ldots+\frac{\sin^n a}{n}\right)\right)\Rightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$$

XI.144 Fie $a,b>0$ astfel încât ecuația $x^3-ax^2+bx-1=0$ să aibă soluțiile reale x_1,x_2,x_3. Dacă $\left[x_1^3\right]=\left[x_2^3\right]=\left[x_3^3\right]$, să se arate că $\left[\frac{a^2}{b}\right]=3$.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Soluție: Cele trei relații ale lui Viète $S_1=x_1+x_2+x_3=a$, $S_2=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b$, $S_3=x_1x_2x_3=1$ împreună cu ipoteza $a,b>0$ ne garantează faptul că $x_1,x_2,x_3>0$ (rezultat cunoscut).

Din $\left[x_1^3\right]=\left[x_2^3\right]=\left[x_3^3\right]\overset{\text{not.}}{=}k\in\mathbb{N}$, rezultă $\begin{cases}k\le x_1^3<k+1\\ k\le x_2^3<k+1\\ k\le x_3^3<k+1\end{cases}$, de unde, prin înmulțirea acestor trei relații, şi ținând seama de $x_1x_2x_3=1$, obținem $k=1$.

Rescriind acum inegalitățile anterioare şi utilizând faptul că $x_1^3=\frac{x_1^2}{x_2x_3}$ şi analoagele, vom avea succesiv

$$\begin{cases}1\le\dfrac{x_1^2}{x_2x_3}<2\\ 1\le\dfrac{x_2^2}{x_3x_1}<2\\ 1\le\dfrac{x_3^2}{x_1x_2}<2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2x_3\le x_1^2<2x_2x_3\\ x_3x_1\le x_2^2<2x_3x_1\\ x_1x_2\le x_3^2<2x_1x_2\end{cases}\overset{\text{sumând}}{\Rightarrow}\left[\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}\right]=1\Rightarrow$$
$$\left[\frac{S_1^2-2S_2}{S_2}\right]=1\Rightarrow\left[\frac{a^2}{b}\right]=3.$$

XI.145 Pe $(0,\infty)$ definim o lege de compoziție "$\circ$" comutativă, cu proprietatea că $\forall x,y\in G$ cu $x\le y$, avem $x\le x\circ y\le y$. Dacă $a,b,c\in G$ satisfac $\frac{a}{b\circ c}=\frac{b}{c\circ a}=\frac{c}{a\circ b}$, arătați că $a=b=c$.

Prof. Steluța Monea şi Mihai Monea, Deva

Soluție: Putem presupune că $a\le b\le c$. Din ipoteză deducem atunci: $\frac{a}{c}\le\frac{a}{b\circ c}\le\frac{a}{b}$ şi, de unde $\frac{b}{c}\le\frac{a}{b}\Rightarrow b^2\le ac$. Analog, $\frac{b}{c}\le\frac{b}{c\circ a}\le\frac{b}{a}$ şi

$\frac{c}{b} \leq \frac{c}{a \circ b} \leq \frac{c}{a} \Rightarrow ca \leq b^2$. Avem aşadar $b^2 = ac$. Din $\frac{a}{b \circ c} = \frac{b}{c \circ a}$ deducem $\frac{ac}{b \circ c} = \frac{bc}{c \circ a} \Rightarrow \frac{b}{b \circ c} = \frac{c}{c \circ a}$ şi atunci $\frac{b}{c} \leq \frac{b}{b \circ c} \leq \frac{b}{b}$ şi $\frac{c}{c} \leq \frac{c}{c \circ a} \leq \frac{c}{a}$.

Obţinem $\frac{b}{b \circ c} = \frac{c}{c \circ a} = 1$, adică

$b \circ c = b$ şi $c \circ a = c$ (1). Analog deducem $c \circ a = a$ şi $a \circ b = b$ (2). Din (1) şi (2) avem $a = c$ şi concluzia problemei. □

XI.146 Să se determine funcția derivabilă $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ pentru care

$$f(0) = \sqrt{e} \text{ şi } x \cdot f(x) = (1 + x^2) \cdot f^{/}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Idee: relația din enunț se poate scrie $\frac{f^{/}(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(x^2+1\right)^{/}}{x^2+1}$; se ajunge la

$f(x) = e^{\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)}$. □

XI.147 Se consideră o funcție derivabilă $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, strict crescătoare, cu $f(0) = 0$.

a) Demonstrați că există $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\frac{f^{/}(c)}{f(c)} = tgc$.

b) Demonstrați că există $d \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ pentru care $\frac{f^{/}(d)}{f(d)} = 2 \cdot tg2d$.

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu - Roşu

Idei: a) considerăm $g(x) = f(x)\cos x, x \in \mathbb{R}$, derivabilă şi cu $g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Se aplică teorema lui Rolle (de ce este nevoie de stricta monotonie a lui *f* ?) ; b) $h(x) = \cos 2x \cdot f(x)$. □

XI.148 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă şi injectivă, iar *A,B,C* puncte situate în această ordine pe reprezentarea geometrică a graficului lui *f*. Demonstrați că: $AC^2 > AB^2 + BC^2$.

Prof. Steluța Monea şi Mihai Monea, Deva

Soluție: Condiția din concluzie este echivalentă cu a arăta că unghiul $\measuredangle ABC$ este obtuz. Cum *f* este continuă şi injectivă, avem că *f* este strict monotonă;presupunând că este strict crescătoare, construim prin *B*

paralele cu axele, care împart planul în patru cadrane, numerotate $Q_I, Q_{II}, Q_{III}, Q_{IV}$. Atunci *A* va fi poziționat în cadranul Q_{III}, iar *C* în cadranul Q_I, ceea ce arată că unghiul este obtuz. □

XI.149 (Enunț corectat)Vârfurile unui triunghi sunt puncte având coordonatele întregi, unul dintre ele fiind situat pe dreapta de ecuație $y = x$, altul pe dreapta de ecuație $y = 2x$, iar centrul de greutate este chiar originea sistemului de axe de coordonate. Să se arate că aria triunghiului este un număr întreg.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Remarcă: Ne cerem scuze pentru omisiune şi vă invităm să rezolvați acum problema. □

Probleme propuse

(se primesc soluții până în data de 15 februarie 2010, în niciun caz mai târziu !)

Notă: Se pot trimite şi soluții la problemele propuse în articolele apărute în ultimele două numere ale revistei. Respectați cu strictețe normele de expediere, in special scrieți pe plic, jos în stânga, clasa în care sunteți acum!!

Clasa I

I.31. Scrie numerele mai mari decât 50 şi mai mici decât 80 care au diferența dintre cifra zecilor şi cea a unităților egală cu 1.

Inst. Nicoleta Marcu, Reşița

I.32. Câte numere naturale de 2 cifre au la sfârşit cifra 3?

Inst. Nicoleta Marcu, Reşița

I.33. Scrie toate numerele naturale de 2 cifre care au suma cifrelor egală cu 6. Aşează-le apoi în ordine descrescătoare.

Inst. Nicoleta Marcu, Reşița

I.34. Într-o clasă sunt 12 fete, iar băieți cu 3 mai mulți. În recreație, 13 elevi au ieşit în curtea şcolii. Câți elevi au rămas în clasă?

Înv. Hildegard Loidl, Reşița

I.35. Maria a scris în ordine crescătoare numerele de la 38 la 45. Cât este suma dintre cel de-al treilea număr şi penultimul număr din şirul scris de Elena?

Inst.. Mariana Mitrică, Reşița

I.36. Pe stadion erau 59 copii. După ce au plecat 12 fete şi au mai venit 7 băieți, pe stadion au rămas 16 fete.
a) Câte fete au fost la început pe stadion?
b) Câți băieți sunt acum?

Inst.. Mariana Mitrică, Reşița

I.37. Am în acvariu 3 peşti. Mai pun încă 16. Îi dau Deliei cadou 2. Câți peşti mai am în acvariu?

Inst. Lidia Todor, Caransebeş

I.38. Bunicul a plantat în livadă 13 meri, 12 peri şi restul până la 36, pruni. Câți pruni a plantat bunicul?

Inst. Lidia Todor, Caransebeş

I.39. Şase rațe stau pe lac.
Strigă într-una: mac, mac, mac!
Dacă mai vin trei plus şapte,
Află, dacă poți tu, frate,
Câte rațe sunt pe lac?
De strigă mereu: mac, mac!

Inst. Neta Novac, Reşița

1.40. Mă gândesc la trei numere diferite nenule. La primul număr adun 3, la al doilea adun 4, iar la al treilea adun 5. Suma numerelor obținute acum este 18. Cât poate fi produsul numerelor la care m-am gândit la început ?

Carolina Savu, elevă, Moldova-Nouă

Clasa a II-a

II.31. Peste 8 ani, Victor va avea 13 ani. Ce vârstă are acum Victor? Ce vârstă va avea tatăl băiatului peste 4 ani, dacă este cu 26 de ani mai mare decât fiul său?

Inst. Lidia Todor,Caransebeş

II.32. Mihai are 56 de timbre. Sora lui ar avea 100 de timbre, dacă ar avea tot atâtea câte are Mihai şi şi-ar mai cumpăra 17. Câte timbre are sora lui Mihai?

Inst. Lidia Todor,Caransebeş

II.33. Luni, la biblioteca județeană, au venit la sala de lectură 26 de cititori. Câți cititori vin în-tr-o săptămână, dacă zilnic vine cu câte unul mai mult decât în ziua precedentă şi dacă ştim că biblioteca este deschisă de luni până sâmbătă?

Inst. Ozana Drăgilă, Reşița

II.34. Mircea rezolvă luni 7 probleme, marți cu 6 probleme mai multe, iar miercuri cu 5 probleme mai puține decât marți, în total rezolvând cu 19 mai multe decât sora sa. Câte probleme a rezolvat sora sa ?

Înv. Ana Modoran, Reşița

II.35. Suma a 4 numere este cât dublul lui 39. Al treilea număr este cu 14 mai mare decât al doilea, care este cu 9 mai mare decât primul. Să se afle numerele, dacă al treilea număr este 32.

Înv. Ana Modoran, Reşița

II.36. Într-un coş sunt 25 de mere verzi şi roşii. După ce Maria ia din coş toate merele roşii şi 5 mere verzi, în coş rămân doar 10 mere verzi. Câte mere roşii şi câte mere verzi au fost la început în coş?

Inst.Cristina Ardeleanu,Reşița

II.37. Din suma numerelor 53 şi 42 scade suma răsturnatelor acestor numere. Diferența măreşte-o cu cel mai mare dintre numerele date. Cât îți mai trebuie să ajungi la 100?

Inst.Cristina Ardeleanu,Reşița

II.38. Mircea şi Alin sunt colecționari de timbre vechi. Mircea are acum 69, iar Marin are 73. Ce ar trebui să facă cei doi copii pentru a avea număr egal de timbre? Care sunt variantele posibile?

Inst.Cristina Ardeleanu,Reşița

II.39. Suma a două numere este 60 şi este cu 12 mai mare decât diferența dintre 50 şi unul din ele. Care sunt cele două numere?

Inst.Costa Moatăr, Reşița

II.40. Micşorați cu 23 suma vecinilor numărului 36.

Înv.Hildegard Loidl, Reşița

Clasa a III-a

III.31. Mă gândesc la un număr. Îl triplez, iar din rezultat scad 40. Triplez din nou rezultatul şi iar scad 40. Am obținut 2.
La ce număr m-am gândit?

Inst. Lidia Todor, Caransebeş

III.32. Vecina mea are în curte 90 de păsări. Gâştele sunt de 2 ori mai multe decât rațele. Rațele sunt de 3 ori mai puține decât găinile. Câte păsări din fiecare fel are vecina?

Inst. Lidia Todor, Caransebeş

III.33. M-am gândit la un număr. Dacă îl mărim de zece ori, iar rezultatul îl micşorăm la jumătate, obținem cel mai mic număr scris cu trei cifre.
La ce număr m-am gândit?

Inst.Măriuța Benga,Reşița

III.34. În trei şcoli sunt 725 elevi. Câți elevi sunt în fiecare şcoală, dacă în primele două şcoli sunt 476 elevi, iar în ultimele două, 483 elevi?

Inst.Măriuța Benga,Reşița

III.35. Suma a patru numere este 810. Ştiind că fiecare este cu 15 mai mare decât precedentul, să se afle numerele.

Inst.Costa Moatăr, Reşița

III.36. Diferența a două numere este 240. Dacă mărim descăzutul cu 80, cu cât trebuie să mărim scăzătorul pentru ca diferența să devină 180?

Inst.Costa Moatăr,Reşița

III.37. La un magazin s-au vândut într-o zi 30 kilograme cartofi. A doua zi s-a vândut o cantitate de 2 ori mai mare decât în prima zi, iar a treia zi cât produsul numerelor 5 şi 9.
Câte kilograme de cartofi s-au vândut în cele trei zile ?

Inst. Neta Novac,Reşița

III.38. Fiecare elev are în ghiozdan câte 3 cărți şi câte 6 caiete.

Câte cărţi şi caiete au în total, jumătate din clasa a III-a A, în care sunt de toţi, 22 de elevi?

Înv. Ana Modoran, Reşiţa

III.39. În trei cutii sunt 86 de bile. În prima cutie sunt de două ori mai multe decât în a doua cutie, iar în a treia cutie sunt cu 6 bile mai multe decât în a doua. Câte bile sunt în fiecare cutie?

Înv. Ana Modoran, Reşiţa

III.40. Într-un coş sunt 28 mere, pere şi gutui. Mere sunt cu 4 mai multe decât pere, iar gutui cât dublul perelor.
Câte fructe sunt din fiecare fel în coş?

Inst. Neta Novac,Reşiţa

Clasa a IV-a

IV.160. Dacă se împarte suma a cinci numere naturale consecutive la 7, obţinem câtul 11 şi restul 3. Aflaţi numerele.

Înv. Ana Modoran, Reşiţa

IV.161. Cu o pătrime din banii pe care îi are, Sara cumpără o carte, iar cu 6 lei mai puţin decât o cincime din rest cumpără un stilou. I-au rămas 78 de lei.Cât costă cartea? Dar stiloul?

Înv. Ana Modoran, Reşiţa

IV.162. a)Câte numere naturale de trei cifre există, ştiind că cifra zecilor este egală cu 7?
b)Calculaţi diferenţa dintre cel mai mare număr obţinut şi cel mai mic.

Inst.Măriuţa Benga,Reşiţa

IV.163. Trei veveriţe au adus într-o scorbură acelaşi număr de alune.După ce fiecare dintre ele a mâncat câte 12 alune, în scorbură au rămas atâtea alune câte a avut fiecare la început.
Câte alune au fost în scorbură?

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

IV.164. Dana şi Andreea au rezolvat împreună 72 probleme. În timp ce Andreea rezolva 3 probleme, Dana rezolva cu două probleme mai mult. Câte probleme a reuşit să rezolve fiecare dintre ele?

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

IV.165. Folosiţi paranteze în exerciţiul $3\cdot 8:4+5-3$ pentru a obţine, pe rând, rezultatele : a) 18 ; b) 12 ; c) 4.

* * *

IV.166. Nouă stâlpi, aşzaţi în linie dreaptă, se află la egală distanţă unul faţă de celălalt. Se ştie că între primul şi al cincelea stâlp sungt 480 m. Ce distanţă este între primul şi ultimul stâlp ?

Concurs Ploieşti, 2008

IV.167. O cutie plină cu mere cântăreşte 23 kg, iar pe jumătate goală 12 kg. Cât cântăreşte cutia goală ?

Concurs Ploieşti, 2008

IV.168. O cămilă aleargă de 6 ori mai încet decât un jaguar. Jaguarul aleargă de 3 ori mai repede decât o antilopă. Calculaţi în cât timp parcurge o antilopă distanţa parcursă de cămilă într-o oră.

Concurs Ploieşti, 2008

IV.169. Suma dintre un număr, jumătatea, dublul şi sfertul său este 1860. Care este numărul?

Inst. Ozana Drăgilă, Reşiţa

Clasa a V-a

V.160 Printre primele 10000 numere, câte se termină în 1 şi sunt de forma 8^m+5^n ?

Prof. Loreta Ciulu, Reşiţa

V.161 a) Să se arate că există o infinitate de numere naturale, care împărţite la 7, dau restul 5 şi, împărţite la 6, dau restul 4.
b) Ce rest dau aceste numere, dacă le împărţim la 42 ?

Prof. Constantin Apostol, Rm – Sărat

V.162 Aflați cel mai mare număr natural y pentru care numărul $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 132$ este divizibil cu 5^y

Prof. Maria Iancu, Oravița

V.163 Ionel este cu 6 ani mai mare decât sora lui Ania, iar media aritmetică a vârstelor lor este de 18 ani. Ştiind că dublul vârstei lui Ionel reprezintă vârsta actuală a tatălui său, aflați peste câți ani tatăl său va împlini vârsta de 60 de ani.

Prof. Maria Iancu, Oravița

V.164 Arătați că dacă numărul natural x este soluția ecuației $3^x + 3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x+2} + 3^{x-2} = 1089$, atunci el este pătrat perfect.

Prof. Maria Iancu, Oravița

V.165 Un număr natural se numeşte *acceptabil* dacă produsul cifrelor sale este 15. Câte numere *acceptabile* de două cifre există? Dar de trei cifre ?

Concurs Suceava, 2009

V.166 Albă ca Zăpada şi cei şapte pitici au suma vârstelor egală cu 216 ani. Dacă se ştie că piticii au vârstele numere naturale consecutive, arătați că, dacă Albă ca Zăpada are vârsta egală cu cea a unuia dintre pitici, atunci ea are vârsta celui mijlociu.

Concurs Mangalia, 2009

V.167 Alex cumpără pentru aniversarea mamei: 7 lalele, 5 narcise şi 11 garoafe. O lalea, o garoafă şi o narcisă costă împreună 6 lei, iar 5 lalele costă cât 3 garoafe şi o narcisă. Dacă 3 lalele valorează cât 2 garoafe, cât a plătit Alex pe florile cumpărate ?

Concurs Iaşi, 2009

V.168 Bunicul şi bunica au, în anul 2009, vârstele 79, respectiv 75 ani. Calculați în ce an aveau împreună un secol.

Concurs Iaşi, 2009

V.169 O carte *ciudată* este o carte în care toate paginile sunt numerotate cu numere formate numai din cifre impare (1,3,5,7,9,etc.). Determinați ce număr se află pe a 50-a pagină a unei cărți *ciudate.*

Concurs Iaşi, 2009

Clasa a VI-a

VI.160 a) Să se arate că un număr de patru cifre, având cifrele identice două câte două, nu poate fi prim.

b) Să se găsească numerele *n* de trei cifre distincte cu proprietatea: cifrele numărului *n* sunt factori primi ai lui *n* .

Prof. Loreta Ciulu, Reşița

VI.161 Se dau numerele $x = 7$ şi $y = 21$;

a) Să se calculeze $(7;21)$;

b) Să se calculeze $[7;21]$;

c) Să se verifice că $x + y = (x;y) + [x;y]$;

d) Să se arate că există o infinitate de perechi (x, y) de numere naturale, având proprietatea $x + y = (x;y) + [x;y]$.

Prof. Constantin Apostol, Rm – Sărat

VI.162 Arătați că nu există numere naturale *a* şi *b* nenule astfel încât $2008a + 2009b = 2008 \cdot 2009$.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

VI.163 Determinați numărul maxim de numere naturale diferite a căror sumă este 470.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

VI.164 100 de localități europene sunt toate legate între ele de trasee turistice. Ştiind că oricare trei dintre localități nu sunt situate pe un acelaşi traseu, aflați numărul maxim de trasee existente .

Prof. Maria Iancu, Oravița

VI.165 Alegem 61 de numere naturale nenule, distincte, a căror sumă este 2044. Arătați că printre aceste numere se găseşte cel puțin unul care să reprezinte volumul unui cub cu lungimea laturii exprimată printr-un număr natural.

Concurs Bucureşti, 2009

VI.166 Pe tablă sunt scrise numerele 29 şi 30. Un *pas* înseamnă scrierea pe tablă a unui număr nou, egal cu suma oricăror două dintre numerele scrise deja pe tablă. Este posibil ca, după mai mulţi *paşi*, pe tablă să fie scris numărul 2009 ?

Concurs Caraş – Severin, 2009

VI.167 Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţi că, dacă $2^n - 2$ este divizibil cu 9, atunci $2^n - 2$ este divizibil cu 63.

Prof. Andrei Eckstein, Timişoara

VI.168 Fie *A, B, C, D* patru puncte coliniare astfel încât $AC + CB + BD = AD$. Dacă *M* este mijlocul lui *(AB)*, iar *N* este mijlocul lui *(CD)*, astfel încât punctele *M* şi *N* sunt concomitent în interiorul segmentului *(BC)* sau în exteriorul segmentului *(BC)* şi $[CM] \equiv [NB]$, atunci $[AC] \equiv [BD]$.

Prof. Ion Cicu, Bucureşti

VI.169 Pe o dreaptă se consideră un punct fix *A* , un punct mobil *P* şi mijlocul *N* al segmentului *(AP)*.Când punctul *P* se deplasează pe dreaptă şi ajunge în poziţia P', punctul *N* ajunge în poziţia N'. Ce relaţie există între lungimile segmentelor PP' şi NN' ?

Concurs Bucureşti, 2009

Clasa a VII-a

VII.160 Arătaţi că numărul $\sqrt{5^1 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^{2009}}$ este iraţional.

Călin Gheorghişan, elev, Oraviţa

VII.161 Să se demonstreze că dacă într-un triunghi cu laturile a, b, c avem $a = 1$ şi $b, c \in N^*$, atunci triunghiul este isoscel.

Miruna Ciulu, elevă Reşiţa

VII.162 Să se demonstreze că numărul $n = 2007 \cdot 2008 \cdot 2009 \cdot 2010 + 1$ este pătrat perfect.

Miruna Ciulu, elevă Reşiţa

VII.163 Aflaţi numerele naturale *x* şi *y* pentru care $\sqrt{4x - x^2 - 3}$ este număr raţional.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

VII.164 Fie M şi N punctele de intersecţie a dreptelor care includ înălţimile din B şi din C ale triunghiului ABC , cu o dreaptă care trece prin A. Să se arate că HM = HN dacă şi numai dacă dreapta MN include bisectoarea unghiului A, unde H este ortocentrul triunghiului.

Prof. Constantin Apostol, Rm – Sărat

VII.165 Lungimile laturilor unui patrulater convex sunt exprimate prin numere naturale direct proporţionale cu 4 numere naturale consecutive. Dacă perimetrul patrulaterului este de 230 cm, aflaţi lungimile laturilor lui.

Prof. Maria Iancu, Oraviţa

VII.166 Determinaţi numerele naturale *x, y, z* pentru care:

$$\frac{3x}{3x+2} = \frac{6y}{3y+4} = \frac{x+y+z}{2x+3y+3}$$

Prof. Ion Rotaru, Craiova

VII.167 Se consideră un unghi ascuţit $\measuredangle xOy$ şi un punct *P* în interiorul său. Notăm cu *M* şi *N* simetricele lui *P* faţă de *Ox*, respectiv *Oy*. Arătaţi că: a) triunghiul *OMN* este isoscel; b) $OP > \frac{MP + PN}{4}$.

Concurs Comăneşti, 2009

VII.168 Fie triunghiul ascuţitunghic *ABC*. Pe semidreapta *(AC* se consideră punctul *D* astfel încât $BA = BD$, iar pe *(AB* se consideră *E* astfel încât $CA = CE$. Notăm cu *M* mijlocul segmentului *(AD)* şi cu *N* mijlocul segmentului *(AE)*.Dacă $\{P\} = BM \cap CN$, arătaţi că: $AP \perp BC$.

Prof. Constantin Apostol, Rm. – Sărat

VII.169 Determinaţi două mulţimi disjuncte *A* şi *B* care verifică simultan condiţiile:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, ..., 2009\}$;

b) toate elementele din *B* se pot exprima ca sumă de elemente distincte din *A*;

c) niciun element din *A* nu se poate exprima ca sumă de alte elemente distincte din *A*.

Concurs Suceava, 2009

Clasa a VIII-a

VIII.160 O piramidă gigantică are în total 101 vârfuri.
Aflați numărul maxim de plane distincte determinate de aceste vârfuri .

Prof. Maria Iancu, Oravița

VIII.161 Determinați toate perechile (d,n) de numere naturale, $d \geq 2,\ n \geq 2$, care satisfac: $d/(n^2+1)$ și $d/(n^2+2n+2)$

Prof.univ.dr. Vasile Pop, Cluj – Napoca

VIII.162 Determinați numerele întregi *a,b,c,d* pentru care

$$ac + bd = 1 \text{ și } ad + bc = 2$$

Concurs Iași, 2008

VIII.163 Un număr natural se numește *pretențios* dacă se poate scrie sub forma $x^2 + 3y^2$ cu *x* și *y* numere întregi. Demonstrați că:

a) 268 și 279 sunt numere *pretențioase;*
b) Numărul 1001 nu este *pretențios;*
c) Produsul a două numere *pretențioase* este un număr *pretențios.*

Prof. Ion Pătrașcu, Craiova

VIII.164 Fie *x,y,z* numere reale nenule astfel încât *xy,yz,zx* sunt numere raționale.

a) Arătați că numărul $x^2 + y^2 + z^2$ este rațional;
b) Dacă, în plus, numărul $x^3 + y^3 + z^3$ este rațional nenul, arătați că x, y, z sunt raționale.

Concurs Piatra – Neamț, 2008

VIII.165 Arătați că, dacă în piramida *VABCD*, cu baza *ABCD* pătrat, muchiile laterale sunt congruente, atunci înălțimea piramidei are piciorul în centrul pătratului.

Prof. Constantin Apostol, Rm. – Sărat

VIII.166 Determinați numerele naturale nenule *a* și *b* pentru care

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right) \in \mathbb{N}$$

Concurs Focșani, 2009

VIII.167 Stabiliți natura triunghiului în care lungimile *a,b,c* ale laturilor satisfac: $a + b + c = 3$ și $c^2 - 2ab + 4(a+b) \leq 7$.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeș

VIII.168 Determinați perechile (x, y) de numere întregi pentru care

$$x(2x + y + 1) = y^2 + 2y + 3.$$

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

VIII.169 Arătați că, dacă $x, y > 0$ și $xy = 1$, atunci $\dfrac{x}{y+1} + \dfrac{y}{x+1} \geq 1$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

Clasa a IX-a

IX.160 Să se găsească un număr natural n cu proprietatea

$$n = 3 \cdot \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor + 1$$

Să se arate că există numai două astfel de numere.

Prof. Loreta Ciulu, Reșița

IX.161 Determinați numerele naturale nenule *n* pentru care

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} < \frac{n^3}{2^n}.$$

* * *

IX.162 a) Arătați că nu există funcții $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $f\left(x^2 - x + 1\right) + f\left(x - x^2\right) = x^2 + 1,\ \forall x \in \mathbb{R};$

b) Arătați că, pentru orice $k \in \mathbb{R}$, există $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $g\left(x^2 - x + 1\right) + g\left(x - x^2\right) = k,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

IX.163 Determinați numărul elementelor mulțimii

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} / x = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1}, n = \overline{1, 2009} \right\}.$$

* * *

IX.164 Determinați funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac proprietățile:

a) $f(x + 2y) = x + 2f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R};$
b) $g(x + g(2y)) = x + 2g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$

* * *

IX.165 Arătați că , dacă $a,b,c,d \in [-2,\infty)$ și $a+b+c+d=16$, atunci

$$a^3+b^3+c^3+d^3 \geq 40.$$

Prof.Dan Ştefan Marinescu, Ion Şerdean, Hunedoara

IX.166 Determinați cel mai mic număr natural *n* pentru care primele două zecimale ale numărului $\sqrt{n^2+4n+1}$ sunt egale cu 9.

Prof. Costel Anghel, Slatina

IX.167 Determinați $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $3+3^n = 3\cdot 2^n$.

Prof.Dan Negulescu, Brăila

IX.168 Se consideră un triunghi *ABC* în care $m(\measuredangle ABC)=120^o$. Perpendiculara din *B* pe *BC* taie pe *AC* în *D*. Arătați că, dacă $\frac{DC}{AC}=t\in(0,1)$, atunci $t\cdot AB = 2\cdot(1-t)\cdot BC$.

Concurs Bacău, 2008

IX.169 Se consideră un triunghi *ABC* în care $AB = AC$ și un punct *D* pe latura *AC* astfel încât $CD = 2\cdot DA$. Fie *M* un punct pe segmentul (BD). Arătați că $\measuredangle MCB \equiv \measuredangle MBA$ dacă și numai dacă $AM \perp MC$.

Prof.univ.dr. Dan Brânzei, Iaşi

Clasa a X-a

X.160 Fie $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ rădăcinile ecuației $z^2+2z+4=0$.
Calculați $S=\alpha^7+\beta^7$ și $T=(\alpha+2)^5+(\beta+2)^5$.

* * *

X.161 Se consideră numerele complexe

$$a=1+3i,\ b=-2+mi,\ c=4+mi.$$

Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât imaginile geometrice ale numerelor considerate să fie vârfurile unui triunghi dreptunghic.

* * *

X.162 a) Arătați că: $\cos\frac{\pi}{12}\notin\mathbb{Q}$;

b) Dacă $z\in\mathbb{C}$ astfel încât $z+z^{-1}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$, determinați partea reală a numărului complex $u=z^{100}+z^{-100}$.

* * *

X.163 a) Rezolvați ecuația: $\log_2(6-x)=\log_3(x-4)$;

b) Determinați numerele întregi *y* pentru care $\log_2(6-y)=\log_3(1+\sqrt{y})$

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

X.164 Funcția $f:\mathbb{R}\to A, f(x)=a^x+b$, cu $a>0, a\neq 1$, este bijectivă, având inversa *g*. Dacă $g(7)=1, g(9)=2$, calculați $f(3)$, precizați *A* și determinați numerele naturale *n* pentru care $f(n)=3^n$.

* * *

X.165 Demonstrați că: $\frac{17}{5}<\log_2 5+\log_5 8<4$

* * *

X.166 Rezolvați ecuația: $\left(\sqrt{5}+2\right)^x+\left(9-4\sqrt{5}\right)^x=2$.

* * *

X.167 Demonstrați că: $\log_3 8 \geq \frac{11}{6}$.

Prof. Alfred Eckstein,Viorel Tudoran, Arad

X.168 Demonstrați că: $3\sin x+\frac{1}{\sin^3 x}>4$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Prof. Alfred Eckstein,Viorel Tudoran, Arad

X.169 O funcție $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ se numește *complicată* dacă

$$f(x+2y)+2f(3x+y)=3f(x+y),\ \forall x,y\in\mathbb{N}.$$

a) Studiați dacă există funcții injective *complicate;*
b) Studiați dacă există funcții surjective *complicate.*

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

Clasa a XI-a

XI.160 Se notează cu *G* mulțimea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ale căror elemente sunt exact elementele mulțimii $\{1,3,5,7\}$ și $H=\{\det A / A\in G\}$.

a) Arătați că: $0\notin H$;
b) Determinați cel mai mare element al mulțimii *H*;
c) Arătați că există $b\in\mathbb{R}$ și $B\in G$ astfel încât $B^2=b\cdot B+8b\cdot I_2$.

* * *

XI.161 Studiaţi convergenţa şirului definit prin $x_n = \dfrac{9^n}{\left(3+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}}, n \geq 1$.

* * *

XI.162 Studiaţi convergenţa şirului definit prin $x_1 = 1,\ 3x_{n+1} = x_n - 4,\ \forall n \geq 1$.

* * *

XI.163 Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este un şir definit prin $x_1 = a > 0$ şi $x_{n+1} - \ln(n+1) = x_n - \ln n,\ \forall n \geq 1$, studiaţi convergenţa şirurilor $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$, unde $y_n = \dfrac{x_n}{n}, \forall n \geq 1$.

Prof. Lucian Dragomir, Oţelu – Roşu

XI.164 Dacă $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ verifică egalităţile $3AB + A + B = O_n$ şi $3AC + A + C = O_n$, arătaţi că $B = C$.

Prof. Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

XI.165 Se consideră determinantul $D = \begin{vmatrix} a+2 & 2a-1 & a^2 \\ b+2 & 2b-1 & b^2 \\ c+2 & 2c-1 & c^2 \end{vmatrix}$. Stabiliţi natura triunghiului care are lungimile laturilor *a,b,c* în cazul $D = 0$.

* * *

XI.166 Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ pentru care matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ m & 1 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} m & -1 & 3 \\ 3 & m & -1 \\ -1 & 3 & m \end{pmatrix}$ au acelaşi rang.

* * *

XI.167 Determinaţi numerele întregi *a,b,c* care satisfac condiţiile următoare: 1) $a + 2b - c = 4$; 2) $3a + 2b + c = 8$;

3) $2a - b + 3c = 3$; 4) $\dfrac{b+a}{c} \in \mathbb{Z}.$

Red. RMCS

XI.168 Determinaţi matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pentru care $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Red. RMCS

XI.169 O matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ are proprietatea *(P)* dacă $A \cdot {}^t(2A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determinaţi matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ care au proprietatea *(P);*

b) Arătaţi că există o infinitate de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care au proprietatea *(P).*

Prof.Lucian Dragomir, Oţelu – Roşu

Clasa a XII-a

XII.160 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + e^x$. Arătaţi că:

a) Derivata f' a funcţiei considerate este strict crescătoare;

b) $\sqrt[4]{e} - \sqrt{e} < \dfrac{1}{2}$;

c) $\sqrt[8]{e} - \sqrt[4]{e} < \dfrac{3}{64}$;

d) Există o primitivă *F* a funcţiei *f* şi un număr întreg *n* pentru care $F(n) \in \mathbb{Z}$.

Prof. Lucian Dragomir, Oţelu – Roşu

XII.161 Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{Z} \to 3\mathbb{Z}$ este un morfism între grupurile $G = (\mathbb{Z}, +)$ şi $H = (3\mathbb{Z}, +)$. Stabileşte funcţia *f* chiar un izomorfism între grupurile *G* şi *H* ?

* * *

XII.162 Determinaţi ordinul elementului $\hat{7}$ în grupul $(\mathbb{Z}_{2009}, +)$

* * *

XII. 163 Arătaţi că orice grup $(G, \cdot)$ pentru care există $a, b \in G$ astfel încât $ab^2 = ba$ şi $b^4 = e$, este un grup finit.

Prof. Lucian Dragomir, Oţelu – Roşu

XII. 164 Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ se notează $x \circ y = xy - x - y + 2$.

a) Determinați $A \subset \mathbb{R}$ pentru care "$\circ$" este o lege de compoziție pe $G = \mathbb{R} \setminus A$, iar $(G, \circ)$ este grup;

b) Determinați mulțimea $U(\mathbb{Z}) = \{u \in \mathbb{Z} / \exists v \in \mathbb{Z} : u \circ v = 2\}$.

* * *

XII.165 Calculați: $I = \int \frac{x^{3n-1} - x^{n-1}}{x^{4n} - x^{2n} + 1} dx$, $n \geq 2$, $x \in (0, \infty)$.

Prof. Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

XII.166 Calculați $J = \int \frac{x(x^3 - 1)}{(x^2 + 1)(x^5 + 1)} dx$, $x > 0$.

Red. RMCS

XII.167 Calculați: $K = \int \frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x} \cdot e^x dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

XII.168 Se consideră mulțimea $\mathcal{H} = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / A \cdot {}^t A = I_2\right\}$.

1. Să se studieze care dintre matricele $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ aparțin mulțimii $\mathcal{H}$ considerate.
2. Să se arate că înmulțirea matricelor determină pe mulțimea $\mathcal{H}$ o structură de grup necomutativ.
3. Să se demonstreze că dacă $A, B \in \mathcal{H}$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $AX = B$, atunci $X \in \mathcal{H}$.

* * *

XII. 169 Să se dea un exemplu de lege de compoziție pe $\mathbb{Q}$ care are elementul neutru $e = 0$ și pentru care simetricul lui $x = 1 \in \mathbb{Q}$ există, dar este un număr din $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

Rubrica rezolvitorilor

Punctaje obținute pentru rezolvarea problemelor din RMCS nr.29 (în paranteză apare punctajul acumulat pentru concursul revistei, ediția a V-a)

Repetăm: Respectați regulile de expediere a plicurilor cu soluții; *în special, indicați pe plic clasa în care sunteți!!!*

Clasa a I-a

Liceul Hercules Băile Herculane (inst. Alexa Gaiță, inst. Diana Grozăvescu) Viericiu Daniel 100(100), Dudțană Denis 20(20), Ghinea – Vintilescu Irina 100(100), Megan Alexandra – Ioana 100(100), Grozăvescu Cristian 20(20), Hilgers Abel Aurelian 100(100), Păuna Robert 100(100), Hogea Patricia 100(100), Ștefan Brînzan Georgiana 100(100), Cănicean Cristina 100(100), Iliescu Camelia 20(20), Rădoi Andrada 100(100), Coman Alina 100(100), Papavă Laurențiu 20(20), Prodilean Andrei 20(20), Călțun Adrian 20(20), Bolbotină Iulia 100(100), Bolbotină Flavia 100(100).

Liceul Pedagogic CD Loga Caransebeș (inst. Maria Patricia Trion) Tufîși Alexandru 30(30).

Clasa a II-a

Liceul Hercules Băile Herculane(înv.Adriana Laitin, inst. Mirela Bolbotină) Țimbota Alexandru Valentin100(189), Petcu Alexandru Egon 100(393), Panduru Liviu Dimitrios10(295), Blidariu Mihai100(194), Grozăvescu Andreea Ana-Maria(91), Bîrlan Florentin(93), Mihalcea Daniel100(195), Vlădica Alexandra 200(295), Staicu Ariana 208(502), Gongu Cristian(84), Cîrdei Bogdan Antonio 100(300), Cionca Flavius Cosmin 100(289), Spătaru Livia Karina 100(200).

Școala Bolvașnița Știrban George (50).

Liceul Pedagogic CD Loga Caransebeș (înv. Lidia Todor) Bona Alin 90(360), Bogdan Alexandra100(370), Boncalo Sebastian 100(370),Marghescu Radu 90(360), Călinescu Christiana 82(392), Câmpean Casian 82(282), Cercel Cerasela 90(90), Ghimboașă Petronela 100(370), Iacob Rareș 90(360), Roșu Dan 88(292),Vela Cristian 90(360), Drăghin Alexia Daniela 100(100), Popescu Cosmina 100(100).

Școala Generală 2 Reșița (înv. Florica Boulescu, înv. Mariana Brebenariu) Ciobanu Elena 290(610),Racoceanu Rareș 100(300), Maletici Noemi 100(200), Solomon Denisa 100(296), Pascu Eugen

Cristian 100(100), Burileanu Ana – Iulia 100(100), Ciocîrlan Rareş 100(100), Cicortaş Raul 200(200), .
Şcoala Generală 9 Reşiţa (inst. Costa Moatăr) Borduz Flavius 100(189), Voinea Nicoleta 100(189), Bodnar Emanuela Deborah 100(192), Rusu Melisa 100(195), Avram Denisa 100(100), Negrea Alexandra 100(100).
Liceul Teoretic Traian Lalescu Reşiţa (inst. Daniela Osman) Lohon Ariana 100(100).
Grup şcolar Moldova Nouă (înv. Anastasia Stroia) Răulea Alina 60(90), Cristea Bianca (97), Irimia Loredana 90(266), Harca George Adrian 60(196), Iacob Andreea (56),Voicu Andreea 50(50), Bolohan Andreea (100), Crenicean Georgiana 80(80), Cojocariu Sandra 70(70), Bojici Ivana 100(100).
Şcoala Generală 1 Oţelu – Roşu (înv. Nicoleta Toader, înv. Nicoleta Doleanu) Janţu Lucian 100(170), Jebelean Cristiana (74), Boghian Tiberiu 100(150), Borca Delia Ariana 50(121), Preda Sebastian 100(174), Meilă Denis 100(180), Dobre Alexandra (42), Modîlcă Alin (60), Veţan Denis 90(250), Baderca Flavius 100(180), Pop Adrian 100(150).
Liceul Teoretic Gen.Dragalina Oraviţa (înv.Ildiko Stoenescu, prof. Aurica Lazarov) Lazarov Andrei 120(460),Petcu Cristina 30(30), Miloş Mădălina 70(70), Boca Christiana 70(70), .

Clasa a III-a

Liceul Hercules Băile Herculane (inst.Floarea Kuszay, înv.Camelia Staicu, înv. Doina Zah) Mărţuică Ana 100(198), Laitin Patricia 100(200), Bolbotină Gabriel 200(695), Susana Denisa 100(200), Militaru Antonio 100(200), Jircovici Ana-Maria 100(200), Agafiţei Cristian Theodor 200(516), Troacă Andrei 200(563), Agafiţei Nichita 200(516), Nicoară Rebeca 200(563), Bocică Cristinel (93), Negoiţescu Nicoleta 200(579), Ciobanu Antonia 200(574), Sorescu Valentin 200(582), Dorobanţu Maria 200(585), Stoican Anastasia 200(577), Dancău Maria Ileana 200(585), Roş Maria 210(587)
Şcoala Berzasca (înv. Pîrvu Tatiana) Puia Roxana Emilia (190)
Şcoala Bolvaşniţa Jura Miriam Iasmina (20)
Şcoala Bozovici(înv. Violeta Voin Stanec) Pascariu Anda – Cristina 100(100) .
Şcoala Romul Ladea Oraviţa (înv. Viorica Totorean, înv. Merima Velcotă, înv.Georgeta Curea) Burcuşel Alex (35), Burulea Alexandru 190(252), Preda Damir 200(290), Gherman Oana200(280), Dumitraşcu Bogdan Andrei 85(160), Scarlat Sara-Giulia 100(375), Buzdug Ionuţ

100(276), Niţă Cezar (90), Velimirovici Iasmina 100(100), Stoica Cezar 90(90), Dudilă Eduard 100(100).
Liceul Teoretic Gen.Dragalina Oraviţa (înv. Mirela – Ana Nicolaevici) Mărilă Paul (161), Lazăr Denis 60(60).
Şcoala Generală 2 Reşiţa (înv. Aurica Niţoiu) Potocean Aura Teodora 230(524).
Şcoala Generală 8 Reşiţa (înv. Rodica Moldovan, înv. Corina Nedelcu) Goian Tudor George 146(324), Bruno Kapros 100(280), Nica Elena Lorena 70(133), Chiseliţă Mara 100(283), Badea Elia Cristina 100(160), Surugiu Dragoş Andrei 100(168), Ciupici Vlad Mihai Jiva (30), Pătru Ralph Antonio (74), Grema Denis (73), Marin Mădălin 148(310), Pascal Roxana 200(379), Ţeperdel Darius 187(322), Duca David 100(200). Ştreng Flavius 105(270), Cenda Sabina 250(324), Colţescu Cătălin Emil 100(100), Popovici Naomi 90+100(190), Soreanu Patrick 100(100).
Şcoala Generală 9 Reşiţa (înv. Margareta Filip) Jumanca Patricia (232)
Liceul Pedagogic CD Loga Caransebeş (înv. Ion Ritta) Miculescu Andreea (100)
Şcoala Generală 1 Oţelu – Roşu (mama) Buţă Jana Adina 260(659)
Şcoala Generală 12 Decebal Craiova, Dolj (inst. Letiţia Lungu) Prejbeanu Andreea Cristina 180(420).

Clasa a IV-a

Liceul Hercules Băile Herculane (înv.Maria Daria Puşchiţă) Mircea Emilian Golopenţa 100(200), Brancu Violeta Petruţa 100(200), Tudor Oana 100(300), Bujancă Georgiana 100(200), Barbu Cornel (100).
Şcoala Berzasca (înv. Elena Armanca) Bănică Mihai Sebastian (86)
Liceul Traian Doda Caransebeş (înv. Margareta Stefănuţi)
Stanciu Ana – Zaira 100(197)
Liceul Pedagogic CD Loga Caransebeş (inst. Mirela Tătar) Boba Bianca (90)
Şcoala Ciclova Română (înv. Ruja Caragea) Mitreanu Andrei – Mihai 100(200)
Şcoala Generală 2 Reşiţa (înv. Ana Modoran, inst. Ozana Drăgilă) Velcsov Flavia 160(570), Ciopонea Alexandru Mihai 140(220), Mihai Flavian Andrei 110(506), Gligor Mădălina Georgiana 190(580), Presnescu Bogdan 180(280), Murariu Dumitru Ciprian 100(496), Bălean Octavian 70(444), Nicola Elena Beatrice 210(610), Dieaconu Daniel 150(150).
Şcoala Generală 9 Reşiţa (înv. Mariana Mitrică, înv. Angela Adina Belu, inst.Margareta Filip) Imbrescu Raluca 200(639), Gherasim Daniel

200(385), Vladu Andrei 220(692), Şoavă Daniel Viorel210(790) , Zaharia Flavia Cristiana 210(814), Remo Denis 232(575), Ţigănilă Ionuţ Lucian (411),Jumanca Patricia 170(170).

Liceul Teoretic Traian Lalescu Reşiţa (inst. Lavinia Dolot, inst. Simona Vancu) Freisz Patrick 200(200), Iacob – Mare Ionuţ Radu 130(130), Verdeţ Vlad 120(120), Cîrstea Denisa 150(150), Puşcaş Roberta 140(140), Lucaci Cristiana 200(200), Cenan – Glăvan Daria 160(160), Catina Paula 140(140), Berivoescu David 70(70), Potocianu Rebecca 170(170), Puşcaş Antonia Miruna 110(110), Regulschi Antonia 110(110).

Şcoala Romul Ladea Oraviţa (înv. Camelia Suru, înv. Rozalia Arnăutu, prof. Maria Iancu) Borş Maria 170(473), Şchiopu Alexandra (73), Palade Teodora 130(408), Budimir Mădălina 140(433), Caracoancea Timotei 80(145), Brădeanu Luciana Florentina 80(386), Drugărin Iosmin Ciprian 80(173), Voin Lavinia (229), Raşca Alexandru 152(152)

Şcoala Rusca Teregova Blaj Petru 110(210)

Liceul General Dragalina Oraviţa (înv. Livia Creţu) Clepan Daria Ştefania 150(180),Negru Sebastian 130(250),Boraci Alexandru 140(140).

Clasa a V-a

Liceul Hercules Băile Herculane (Inst.Alexa Gaiţă, Înv. Doina Zah, Înv.Diana Grozăvescu, prof. Maria Haracicu, prof. Marius Golopenţa) Barbu Andrei 80(203), Şulma Patricia 140(340), Barbu Cristian 90(238), Burcin Andreea 136(336), Nicoară Denisa (90), Vătavu-Pepa Călina (90), Ciobanu Romina 90(188), Vişescu Marius 90(90), Novăcescu Cristian 80(80).

Şcoala Berzasca (înv. Ramona Soroceanu) Radovan Iasmina (143), Secobeanu Flavius (60), Bîtea Nadin (76), Mogoşan Rebeca Sara (143), Criste Gabriel (96).

Şcoala Bozovici(Prof.Pavel Rîncu) Hotac Roberto 90(90), Vodă Ana – Maria 90(90), Băin Oriana 100(100), Melcescu Florina 100(100).

Şcoala Generală nr. 6 Arad (înv. Irina Ciule, prof. Florian Bolojan) Popa Iasmina 40(340)

Şcoala Bolvaşniţa (Inst. Mihaela Goanţă) Ştirban Simona (20),
Jura Damarius Cătălin (20)

Şcoala Generală 8 Caransebeş (prof. Nuţu Jurj)
Andra Ardelean 90(90)

Liceul Traian Doda Caransebeş (înv. Elena Minea, înv. Ileana Petrescu, prof. Adrian Dragomir) Szabo Ciprian 100(300), Marco Mihai (70).

Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (prof. Lavinia Moatăr) Jura Victor 100(100), Ciobanu Iulia – Andreea 140(140), Iovănică Sebastian 70(70).

Grup Şcolar Moldova Nouă(Prof. Aurelia Voilovici) Bojici Vladislav 110(110), Bonaţ Bogoslav Gabriel 100(100).

Şcoala Romul Ladea Oraviţa(înv. Camelia Suru, prof. Camelia Pîrvu) Balmez Bogdan 250(350), Simu Victor (50), Ciobanu Raluca 180(180), Gogea Mirabela 160(160),Cocar Lorena 190(190), Marocico Andreea 130(130) .

Şcoala Generală 2 Reşiţa (înv. Elisaveta Vlăduţ, prof. Mariana Drăghici, prof. Mirela Rădoi) Popa Radu 30(60), Mihancea Miruna 50(140), Lolescu Bogdan (80), Schinteie Eugen (40), Ciucă Mihai (40), Pinte Ana Maria 120(190), Rădoi Oana (285), Dacica Anca Cristina 120(120).

Şcoala Generală 8 Reşiţa (Prof. Mirela Camelia Rădoi) Laboş Roxana 150(150), Budimir Claudia 150(150), Tal Andreea 150(150), Rădoi Oana 100(100).

Şcoala Generală 9 Reşiţa (înv. Zora Zecheru, prof. Vasile Chiş) Bălean Vlad 140(300), Şutilă Alexandra 150(150), Călina Antonia 100(100).

Liceul Gen.Dragalina Oraviţa (înv. Paulina Lăpuşnianu) Smida Mădălina Georgiana (70), Braşoveanu Alex Ionuţ 70(170).

Şcoala Generală 1 Oţelu-Roşu (Prof. Heidi Feil) Şinka Andrei Fabian 180(180), Moica Dan 125(125), Săvescu Ovidiu 125(125), Todor Jonathan 110(110), Micşa Tudor 150(150), Babeu Denis 150(150), Boştină Dorian 125(125), Galuşka Vlad 160(160), Suciu Teodora 160(160), Bordeianu Mihail 50(50), Firanda Denysa 150(150), Teleagă Larisa 160(160), Cioarcă Adnana 180(180), Damian Patricia Cristina 130(130), Janţu Petre Marin 190(190), Graszl Bianca 160(160), Hrenyak Alexia 170(170), Pitica Roxana 190(190).

Grup Şcolar Oţelu-Roşu (Prof. Adriana Dragomir) Epuraş Georgian 170(170), Mihuţ Casiana 190(190), Olah Iosif Valentin 80(80).

Şcoala Rusca Teregova (Prof. Sorin Ciucă) Răduia Elisaveta 125(125), Codoşpan Alina – Călina 147(147) .

Clasa a VI-a

Şcoala Generală nr.1 Anina (prof. Marin Constantin Cleşiu)
Goia Ana Maria (40), Lupu Ana (40), Borcean Delia (80), Sîrghie Mădălina (70)

Şcoala Bănia (prof. Iancu Cleşnescu) Andrei Nicu Daniel (90)
Stroca Andrei (90), Becia Robert (300) (???) .

Liceul Hercules Băile Herculane (Prof. Constantin Bolbotină) Popa Andrei ***(redactare cu creionul ??)*** 220(416),Cîrdei Alex-Cosmin 238(569), Urzică Ionuț Sorin 146(532),Cernescu Maria (326), Moagă Ducu Alecsandru 170(620), Stanciu Ana-Maria 186(687), Stanciu Ani 185(686), Grigorie Denisa Bianca 176(543), Urdeş Florin 154(635), Radu Denisa 155(656), Rădoi Flavius (196), Becia Robert 162(462), Vlascu Cătălin Ionuț 80(80).

Şcoala Bozovici(Prof.Pavel Rîncu, prof. Iosif Găină) Negru Anca – Patricia 80(80), Marin Mihaela 100(100), Romînu Denisa 50(50).

Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Delia Dragomir, Prof. Janet Miuță Bocicariu) Iliescu Alexandru 80(465), Jurescu Ioan Cristian 70(140), Nistor Răzvan (110), Dodoiu Oana (80), Stoicănescu Petru 120(300), Neagoe Loredana 130(439), Varga Florina (70), Seracin Ciprian 70(180), Oțet Cătălin (30).

Liceul Pedagogic Caransebeş (Prof. Dorina Humița,Prof. Marița Mirulescu) Semenescu Raluca 70(250), Pelin Anitta 50(140), Nicoară Ioana 100(170), Zamfir Andreea 20(190), Ambruş Patricia (90), Belciu Aida 110(110), Belciu Anemona 100(100).

Grup Şcolar Moldova Nouă(prof.Vasilica Gîdea) Chiriac Bianca (120), Petraru Ioana (214), Airini Michel 140(365), Căta Alexandra (80), Dărac Alexandra (60), Căluşariu Ana Maria (50).

Şcoala Generală 2 Reşița (prof.Marius Şandru, prof. Diana Stănică)
Neațu Monica 80(270), Ursul Larisa Iasmina (30), Ciobanu Anca 140(320), Vasilovici Camil (20), Aldescu Dragana 20(20), Antal Alexandra 40(40), Gaiță Timeea 20(20), Şchiopu Patrick 20(20).

Şcoala Generală 6 Reşița (Prof. Susana Simulescu) Alexa Luana Maria (170), Herțanu Denisa (130), Vida Octavian (100).

Şcoala Generală 8 Reşița (Prof. Mirela Rădoi) Trica Alissia (107), Sanda Mihaela (70), Puşcaşu Simona 80(248), Ştirbu Monica (40), Rus Daniel 60(317).

Şcoala Generală 9 Reşița(prof. Irina Avrămescu, prof.Vasile Chiş) Ştefan Andrei Daniel 85(175), Buşoi Natalia (120), Boldea Cristina 150(230), Gaiță Nadine 170(555), Costea Denis-Loren (200), Anănuță Adela Marina 50(170), Ciortan Ionuț Petru (195), Pupăzan Andreea 70(260), Muscu Dragoş 100(280), Bochizu Constantin (180), Munteanu Ionuț Valentin 160(555).

Liceul Teoretic Traian Lalescu Reşița (Prof. Otilia Bejan) Dolot Diana Nicole 80(410).

Şcoala Romul Ladea Oravița (Prof.Camelia Pîrvu) Balmez Andrada-Ioana 200(672), Murgu Teodora 130(525), Chirciu Cătălina 120(240).

Lic. Gen.Dragalina Oravița(Prof.Aurica Lazarov) Țibulca Andrei 50(110)

Şcoala Generală 1 Oțelu-Roşu (Prof. Heidi Feil) Toader Răzvan 152(282), Pândici Cristian Andrei 30(80), Țolea Loredana Oana 100(220), Simescu Larisa Geanina 90(180), Buzzi Cristian Alexandru 90(338), Opruț Raul (80), Szatmari Larisa Maria 130(515), Bauer Richard (160), Erdei Dorian Emeric 100(205), Oancea Maria Roxana 80(140),Szalma Eric 90(177), Trifu Teodora 40(40), Dinu Alexandru 75(75), Honciuc Laura 60(60).

Şcoala Generală nr.3 Oțelu-Roşu (Prof. Felicia Boldea, prof.Daniela Suciu) Barbu Lidia 116(403), Micşescu Cristian 70(230), Carp Andreea 125(432), Piess Helmuth 85(240), Drăgan Alexandra Diana (138), Ghercă Sabrina Marinela 70(186).

Grup Şcolar Oțelu-Roşu (Prof. Adriana Dragomir) Lohan Larisa (210) , Crețoiu Ionuț (210).

Şcoala Rusca Teregova (Prof. Sorin Ciucă) Humița Ionela 160(225), Banda Ioan Alexandru Ilia 195(495), Stepanescu Alina Iconia 246(464), Stepanescu Maria 170(454).

Şcoala Vîrciorova (prof. Ioan Liuba) Bănescu Ramona 30(60), Anghel Alina 30(30), Ivăniş Patricia 10(10).

Clasa a VII-a

Liceul Hercules Băile Herculane (Prof. Constantin Bolbotină, prof. Marius Golopența) Şandru Ilie Daniel 145(585), Gherghina Liviu 142(436), Török Bogdan 167(600), Mihart Georgiana 214(684), Ferescu Liana (448), Croitoru Sabina (140), Domilescu Manuel 152(607), Terfăloagă Ana – Maria (479) .

Şcoala Berzasca (Prof. Dana Emilia Schiha) Vulpescu Iulia (360), Velicicu Andreea (150), Vîlcu Cosmin (50), Buga Ioana Mihaela (60).

Şcoala Bozovici(Prof.Pavel Rîncu) Ruva Mihaela 100(170), Iancu Maria Timeea 80(80), Mitocaru Patricia 100(100), Pervu Georgiana 80(80).

Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Delia Dragomir) Domăneanțu Octavian 60(270).

Şcoala Ciclova Română (prof. Geta Mîşcoi) Munteanu Andreea (84),David Gertrude – Melissa 120(120).

Şcoala Generală Dalboşeț (Prof.Pavel Rîncu) Motorga Eliza Mirela (50)

Gr. Şc. Moldova Nouă(Prof. Zoran Ocanovici)Mereu Mădălina (60)

Şcoala Generală nr. 6 Reşiţa (Prof. Susana Simulescu) Ciulu Miruna Dalila 140(560)
Şcoala Generală 8 Reşiţa (Prof. Mirela Rădoi) Chiru Cristian 30(188), Guia Daniel Petru 60(156).
Şcoala Generală nr. 9 Reşiţa (Prof. Ion Belci,Prof.Irina Avrămescu) Peptan Andrei Valentin 120(350), Pangica Antonio (160), Munteanu Ionuț Valentin 160(555) – în ce clasă totuşi???, Vâlcu Sebastian 10(140), Bercean Bogdan 70(190),Momin Alexandra 52(132),Popa Ioan Raul (96)
Şcoala Romul Ladea Oravița (Prof. Mariana Iancu, Prof. Camelia Pîrvu) Gheorghişan Călin 380(663), Dănilă Mădălina 196(757), Pîrvu Ancuța Iulia 170(400), Alexa Anca 183(742), Drinceanu Ioana 130(250),Trăilă Alexandra Iulia 182(292).
Şcoala Generală 3 Oțelu-Roşu (Prof. Daniela Suciu, Prof. Felicia Boldea) Băilă Cristina (70),Românu Nicoleta (80), Barbu Daniel 125(270), Preda Cristina (67), Vladu Alina (100), Haba Beatrice 60(127).
Şcoala Generală 1 Oțelu-Roşu (Prof. Heidi Feil, prof.Anişoara Popa) Ştefănescu Andrei 200(655), Raț Laura 30(70), Trica Alexandru 50(150), Manu Cristina (80), Necşa Adina 60(160), Neagu Alexandra 30(80), Bidilici Răzvan 60(60), Guțan Iuliana 30(30), Ciurică Bianca 30(30), Văduva Alex 47(47), Iamandei Diana 30(30).
Grup Şcolar Oțelu-Roşu (Prof. Iulia Cecon) Olaru Ionuț 70(170), Călău Maria 70(170).
Liceul Pedagogic Caransebeş (Prof. Dorina Humița, Prof. Antoanela Buzescu) Bivolaru Iulia Mălina 110(300), Băzăvan Răzvan Alexandru (30), Băzăvan Oana Cătălina (40), Dinulică Petru Augustin 220(680),Dinulică Septimiu 220(680), Rîcă Anda Elena 100(290), Bogdan Roxana 105(295), Enăşoni Lavinia 70(140), Nica Hermina (60), Iordache Andreea (30), Popovici Daniel (30), Lala Timotei (60), Jurca Rebeca (50).
Şcoala Rusca Teregova (Prof. Sorin Ciucă) Stepanescu Georgeta 210(295), Blaj Ioan 60(155), Moacă Nicolae 20(82), Gherga Marinela 196(392), Codoşpan Oana 86(161), Banda Giorgiana Violeta 132(162), Boşneag Maria – Ionela (85), Driter Ioan (65), Hurduzeu Ana 76(76).

Clasa a VIII-a

Şcoala Anina(Prof. Marin Cleşiu) Paiu Andrada (60), Bardaş Georgiana Flavia (40)
Şcoala Bozovici(Prof. Iosif Găină, Prof. Pavel Rîncu) Vrancea Andreea 60(140), Borchescu Eugen 60(60), Careba Denisa 70(70), Munteanu Mădălina 60(60), Hotac Adina 80(80), Ştefan Ana 70(70) .

Grup Şcolar Moldova Nouă(Prof. Vasilica Gîdea) Oprea Adelina (70)
Şcoala Generală 2 Reşița (Prof. Mariana Drăghici) Țeudan Adina 90(310), Drăghici Livia Liliana 137(407), Aghescu Monica Elena (160).
Şcoala Generală nr. 9 Reşița (Prof. Irina Avramescu, Prof.Vasile Chiş, Prof. Ion Belci) Peptan Alexandru 130(320), Lazăr Silviu Ioan 90(330), Popa Ioan Raul 96(96).
Şcoala Generală 1 Oțelu-Roşu (Prof. Heidi Feil, Prof. Anişoara Popa) Pop Cristian Ionuț 70(277),Radu Ionela 40(245), Tuştean Patricia (160) Boran Cristian (40), Alexa Alexandra (70).
Şcoala Generală 3 Oțelu-Roşu(prof.Felicia Boldea) Băilă Diana 40(110).
Grup Şcolar Industrial Oțelu-Roşu(Prof. Iulia Cecon) Vărgatu Alina (40), Popescu Ana Maria (40).
Şcoala Rusca Teregova(Prof. Sorin Ciucă) Humița Ileana 152(256), Ursulescu Ionela 137(243), Banda Elisabeta (72), Humița Cosmin Vasile 23(23), Stepanescu Georgeta (116)

Clasa a IX-a

Şcoala Berzasca (Prof. Dana Emilia Schiha) Pătraşcu Alin (60), Dragomir Ionuț (60)
Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Adrian Dragomir, Prof. Iacob Didraga) Stoicănescu Gelu 76(266), Popa Andreea (35) , Dumitraşcu Andreea 75(135), Măran Marius (80), Antonescu Nicoleta 46(46), Răcăjdianu Sorana 47(47), Agape Oana 45(45), Milu Nicoleta 40(70), Negrei Bianca 56(156).
Grup Şcolar Moldova Nouă (Prof. Lăcrămioara Ziman) Vidinaru Andreea 62(62), Mărculescu Mihaela 57(57), Gîrjan Laura 47(47).
Şcoala Rusca Teregova (Prof. Sorin Ciucă) Codoşpan Florinela (75), Blaj Marinela (52), Humița Maria (85), Milu Ionela (30)
Liceul Gen.Dragalina Oravița (Prof.Aurica Lazarov) Bănuc Vasilică Angel 18(18)
Grup Scolar Oțelu – Roşu (prof. Lucian Dragomir)Krokoş Lorena 48(228),Kuhn Anne Marie 36(136).

Clasa a X-a

Liceul Traian Doda Caransebeş(Prof. Delia Dragomir, prof. Lavinia Moatăr) Mocanu Ioana 70(222), Matei Sergiu (93), Szabo Cristian 50(96), Paşan Petru 55(158), Tuştean Claudiu (17), Buliga Adrian Denis (17).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (Prof. Dorina Humița, Prof. Antoanela Buzescu, prof.Marița Mirulescu) Magu Georgiana (42), Semenescu Anca 103(297), Timofte Tina (30), Untaru Mădălina (30), Berdich Adriana (20).

Tehnologic Nicolae Stoica de Haţeg Mehadia** (prof. Mihaela) Costescu Nicoleta 103(227), Coconete Cosmina 62(62).
Liceul Traian Lalescu Reşiţa (prof. Ovidiu Bădescu) Nemeş Adina 20(167), Azap Bianca 20(167).
Grup Şcolar Oţelu-Roşu (Prof. Lucian Dragomir) Duma Andrei Florin 40(131), Bugariu Răzvan 41(110).
Liceul Gen.Dragalina Oraviţa (Prof.Mihai Lazarov) Goian Raluca Mădălina 28(92).

Clasa a XI-a

Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Delia Dragomir, Iacob Didraga) Baneu Petru 50(97), Zanfir Cristian 124(272), Bona Petru 84(126), Prunar Victor 123(203), Todor Elena 98(303), Galescu Dan 100(230), Ciucă Cristian Sorin 50(100), Stolojescu Petronela 96(166).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş(Prof. Antoanela Buzescu) Marta Marian Sebastian 108(255).
Liceul Traian Lalescu Reşiţa (Prof. Ovidiu Bădescu) Meşter Sergiu (154)
Grup Şcolar Industrial Oţelu-Roşu(Prof. Lucian Dragomir) Cococeanu Oana 47(200), Atinge Carina 45(131).
Liceul Gen.Dragalina Oraviţa(Prof.Mihael Lazarov)Pricop Romina 82(182), Gherghel Gordana 40(40), Sas Raluca Ionela 40(40).
Grup Şcolar Moldova Nouă (Prof. Lăcrimioara Ziman)
Istudor Deian 20(77), Vireanu Adelina 30(50), Calotă Bianca (28), Radoicovici Iasmina (20), Harabagiu Dragana Gabriela 60(80), Pucă Alexandra Elena 60(80), Mina Nenad Neşa(20).

Clasa a XII-a

Colegiul Naţional Moise Nicoară Arad (Prof. Ovidiu Bodrogeanu) Adina Vlad (60)
Liceul Tata Oancea Bocşa (Prof.Ioan Todor) Stăniloiu Ovidiu 130(330)
Liceul Hercules Băile Herculane(Prof.Constantin Bolbotină) Stolojescu Anca (115).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (Prof. Antoanela Buzescu) Mureşan Ana-Maria 70(170), Mureşan Alexandru Ioan 70(170).
Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Lavinia Moatăr, Prof. Iacob Didraga) Bălulescu Bianca Veronica (30), Aghescu Alina Mihaela (30), Turnea Ana-Maria (30), Firan Maria – Mirabela (30), Train Anca 64(94), Dozsa Cecilia (30).
Grup Școlar Industrial Oțelu-Roșu (Prof. Lucian Dragomir) Bugariu Dan (76), Damian Raluca (30).