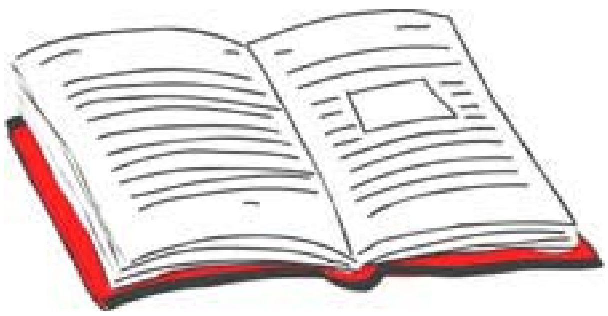
Unitatea de învăţare nr. 1

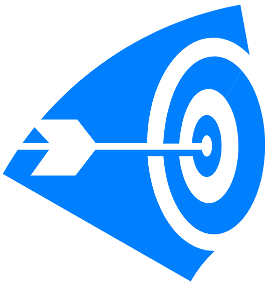
Numere complexe

Cuprins **Pagina**

Obiectivele unităţii de învăţare nr. 1	2
1.1 Forma numerelor complexe	2
1.2 Operaţii cu numere complexe	3
Lucrare de verificare – unitatea de învăţare nr. 1	5
Răspunsuri şi comentarii la întrebările din testele de autoevaluare	5
Bibliografie – unitatea de învăţare nr. 1	6



OBIECTIVELE unităţii de învăţare nr. 1



Principalele obiective ale Unităţii de învăţare nr. 1 sunt:

- Înţelegerea noţiunilor de număr complex, funcţie complexă
- Scrierea unui număr complex sub formă algebrică, trigonometrică şi exponenţială

1.1 Forma numerelor complexe

Mulţimea numerelor complexe a apărut din necesitatea extinderii noţiunii de număr, având ca punct de pornire mulţimea numerelor reale, cu scopul ca orice ecuaţie de gradul *n* să aibă *n* soluţii în noua mulţime.

Fie R corpul numerelor reale. Pe mulţimea $R^2 = R \times R = \{(x,y) \ / \ x,\ y \in \mathbf{R}\}$, produsul cartezian al perechilor ordonate de numere reale, se definesc operaţiile de adunare şi înmulţire astfel:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Definiţia 1.1. Mulţimea R^2 înzestrată cu operaţiile de adunare şi înmulţire definite mai sus formează corp, numit *corpul numerelor complexe*, ale cărui elemente se numesc numere complexe: $C = (R^2, +, \cdot)$

Definiţia 1.2. Forma algebrică a unui număr complex este:

$$z = x + iy, \quad x, y \in R$$

Observaţie:

$\bar{z} = x - iy$ se numeşte conjugatul lui z .

Definiţia 1.3. Forma trigonometrică a numărului complex z este:

$$z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

unde modulul ρ şi argumentul α sunt date de relaţiile:

$$\rho = |z| = (z \cdot \bar{z})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\alpha = \arccos\frac{x}{\rho} \text{ sau } \alpha = \arcsin\frac{y}{\rho} \text{ sau } \alpha = arctg\frac{y}{x}$$

Definiţia 1.4. Forma exponenţială a numărului complex z este:

$$z = \rho \cdot e^{i\alpha}$$

Definiţia 1.5. Două numere complexe $z_1 = \rho_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$ şi $z_2 = \rho_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$ sunt egale dacă $\rho_1 = \rho_2$ şi $\alpha_1 = \alpha_2 + 2k\pi;\ (\mathrm{k} \in \mathrm{Z})$.

Aplicaţii:

1. Determinaţi valorile întregi ale lui n pentru care puterile numărului: $(1+i)^n$ sunt reale.

Rezolvare:

$$z_1 = (1+i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n$$

$$\operatorname{Im} z_k = 0 \quad \mathrm{k} = \overline{1,3}$$

$$\sin\frac{n\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow n\pi = 4k\pi \Rightarrow n = 4k$$

Test de autoevaluare 1.1

1. Determinaţi valorile întregi ale lui n pentru care puterile numărului: $\left(\sqrt{3}+i\right)$ sunt reale.

2. Ce reprezintă mulţimea soluţiilor ecuaţiei $|z-2i| + |z+4i| = 10$?

1.2 Operaţii cu numere complexe

Oricare ar fi $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2,\ z = x + iy \in C$ sunt verificate următoarele proprietăţi:

.

1. $z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2)$

2. $z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$

4. $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 \cdot e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}$

5. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\alpha_1-\alpha_2)}$

6. $z_1^n = \rho_1^n \cdot e^{in\alpha_1}$; $\sqrt[n]{z_1} = \rho\dfrac{1}{n} \cdot e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}$, $\mathrm{k} = \overline{0,\mathrm{n}-1}$.

7. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\overline{z}} = z$

8. Re z = $\dfrac{z+\overline{z}}{2}$, Im z = $\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

9. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, $z \neq 0$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, $\forall\, n \in N$

10. $|\overline{z}| = |z|$, $\overline{\alpha \cdot z} = \alpha \cdot \overline{z}$, $|z| = |-z|$, $\forall\ \alpha \in R$

11. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\forall\ z_2 \neq 0$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

12. $z\overline{z} = |z|^2$.

Aplicaţii:

1. Dacă $|z_i| = r, i = 1,2,...,n, n \geq 2,$ arătaţi că

$$E = \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)...(z_n + z_1)}{z_1 z_2 ... z_n} \in R$$

<u>Rezolvare:</u>

$$\overline{E} = \frac{(\overline{z}_1 + \overline{z}_2)(\overline{z}_2 + \overline{z}_3)...(\overline{z}_n + \overline{z}_1)}{\overline{z}_1 \overline{z}_2 ... \overline{z}_n} = r^{2n}\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right)...\left(\frac{1}{z_n} + \frac{1}{z_1}\right)\frac{z_1 z_2 ... z_n}{r^{2n}} = E$$

Deci $\overline{E} = E$ implică $E \in R$.

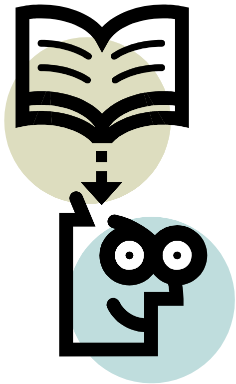
Test de autoevaluare 1.2

1. Completaţi spaţiul liber:

Dacă $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$ atunci $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 x_2 + ... + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$

2. Să se se arate că în C are loc identitatea:

$$|1 + z_1 \overline{z}_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$$



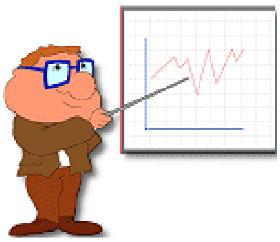
De reţinut!

- forma algebrică a numerelor complexe
- forma trigonometrică a numerelor complexe
- forma exponenţială a numerelor complexe
- operaţiile cu numere complexe

Lucrare de verificare la Unitatea de învăţare nr. 1

1. Determinaţi valorile întregi ale lui n pentru care puterile numărului: $\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n$ sunt reale.

2. Să se se arate că în C are loc identitatea:
$|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2$



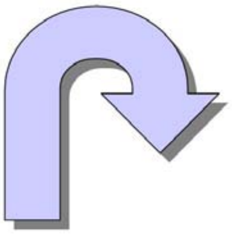
Răspunsuri şi comentarii la întrebările din testele de autoevaluare

Test de autoevaluare 1.1

1. $\sin\dfrac{n\pi}{6}=0\Rightarrow n=6k$
2. Elipsa cu focarele în z = 2i şi z = 4i.

Test de autoevaluare 1.2

1. y_1y_2
2. Se foloseşte relaţia $z\bar{z}=|z|^2$.



Recapitulare

- Forma algebrică a unui număr complex este: $z = x + iy$, $x, y \in R$
- Forma trigonometrică a numărului complex z este: $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
- Forma exponenţială a numărului complex z este: $z = \rho \cdot e^{i\alpha}$

Bibliografie

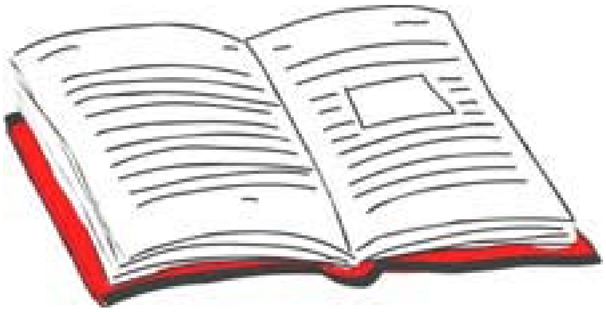
1. Ioan–Mircea Popovici, *Matematici speciale (pentru ingineri şi economişti),*Editura Nautica, Constanţa, 2005
2. I.M. Popovici, D. Popovici, M. Dumitru, A. Costea, *Capitole de matematici:Speciale, probabilităţi şi statistică,* Editura Nautica, Constanţa, 2007
3. I.M. Popovici, E. Constantinescu, F. Memet, D. Popovici, Şt. Szabo, D.M. Popovici, *Probleme de matematici speciale,* 1998
4. R. Cristescu, *Matematici superioare*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.

Unitatea de învăţare nr. 2

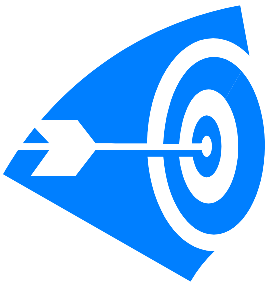
Funcţii complexe

Cuprins **Pagina**

Obiectivele unităţii de învăţare nr. 2	2
2.1 Funcţii complexe de variabilă reală	2
2.2 Funcţii complexe de variabilă complexă	3
Lucrare de verificare – unitatea de învăţare nr. 2	5
Răspunsuri şi comentarii la întrebările din testele de autoevaluare	5
Bibliografie – unitatea de învăţare nr. 2	6



OBIECTIVELE unităţii de învăţare nr. 2



Principalele obiective ale Unităţii de învăţare nr. 2 sunt:

- Înţelegerea noţiunilor de funcţie complexă de variabilă complexă, funcţie monogenă
- Aplicarea cu succes a unor elemente simple de calcul

2.1 Funcţii complexe de variabilă reală

Definiţia 2.1. Funcţia $f : A \subset R \to C$ se numeşte funcţie complexă de variabilă reală.

Dacă A este un interval şi f este o funcţie continuă atunci funcţia se numeşte curbă. Notăm variabile cu t. Cum $f(t) \in C$ vom folosi pentru f(t) notaţia: z(t) = x(t) + iy(t).

Ecuaţia

$$Z = z(t) \qquad (1)$$

reprezintă ecuaţia în complex a curbei. Ecuaţia (1) poate fi înlocuită de ecuaţiile

$$x = x(t),\ \ y = y(t) \qquad (2)$$

numite ecuaţiile parametrice ale curbei (t se numeşte parametru).

Definiţia 2.2. Diagrama unei funcţii complexe de variabilă reală z = z(t) este curba plană reprezentată grafic, însoţită de un procedeu grafic de corespondenţă între valorile parametrului t şi punctele de pe curbă. Curba se numeşte *suportul diagramei*.

<u>Observaţie:</u>

Diagramele rezolvă două probleme:

1. Pentru momentul t se determină punctul pe curbă.
2. Fiind dat punctul de curbă, determinăm momentul căruia îi corespunde acest punct.

Aplicaţii:

1. Să se construiască suportul diagramelor funcţiei:

$z(t) = 2 + i + t(1 + i)$

<u>Rezolvare:</u>

$z(t) = 2 + t + i(1 + t)$

Ecuaţiile parametrice ale curbei sunt:

$x = 2 + t$

$y = 1 + t$

Eliminânt pe t obţinem $y = x - 1$, care reprezintă o dreaptă paralelă cu prima bisectoare şi cu ordonata la origine -1.

Test de autoevaluare 2.1

1. Să se construiască suportul diagramelor funcţiei: $z(t) = a + be^{i\omega t}$, $a \in C$, $b \in R^*$.

2. Să se construiască suportul diagramelor funcţiei: $z(t) = \dfrac{1+it}{1+t}$.

2.2 Funcţii complexe de variabilă complexă

Definiţia 2.3. Dacă D este un domeniu din C, aplicaţia $f : D \to C$ se numeşte funcţie complexă de variabilă complexă (numele funcţiei este dat de codomeniu).

Considerăm variabila complexă z = x + iy funcţia are forma

$$F(z) = f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y),$$
$$U(x,y) = \text{Re}\, f(z),\ V(x,y) = \text{Im}\ f(z).$$

Definiţia 2.4. Dacă $z_1 \neq z_2$ implică $f(z_1) \neq f(z_2)$ şi reciproc, pentru orice z_1 şi $z_2 \in D,$ atunci f(z) este *univalentă* pe D. Funcţia f(z) este *uniformă* pe D dacă îşi conservă valoarea $f(z_0)$ din punctul z_0 şi la revenirea variabilei z în z_0 după ce în prealabil a descris un contur (γ) din D pentru orice $z_0 \in D.$ Dacă nu este uniformă atunci f(z) este *multiformă*.

Definiţia 2.5. Funcţia f(z) derivabilă în z_0 se numeşte monogenă în z_0.

Teorema 2.1. Funcţia f(z) =U(x,y) + iV(x,y) este monogenă în $z_0 = x_0 + iy_0$ din D dacă şi numai dacă sunt îndeplinite condiţiile:

$$(C-R)\ \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial V}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial V}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

numite condiţiile Cauchy – Riemann.

<u>Observaţie</u>: $f'(z) = \dfrac{\partial U}{\partial x} + i\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y} + i\dfrac{\partial V}{\partial y}\right).$

Aplicaţii :

1.Să se determine punctele $z = x + iy$ în care funcţia $f(z) = x^2 - 4xy + y + i(3x - y^2)$ este monogenă şi să se calculeze derivatele în punctele determinate.

Rezolvare :

$u(x, y) = x^2 - 4xy + y$

$v(x, y) = 3x - y^2$

Ecuaţiile Cauchy-Riemann sunt :

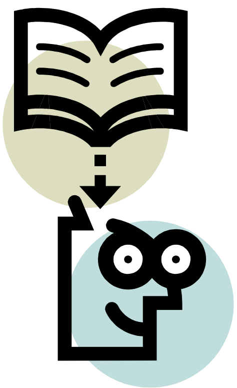
$$\begin{cases} 2x - 4y = -2y \\ -4x + 1 = -3 \end{cases}$$

Soluţia sistemului este $(1,1) \Rightarrow$ funcţia este monogenă în punctul $z_0 = 1 + i$ şi $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,1) + i\frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = -2 + 3i$

Test de autoevaluare 2.2

1. Să se determine punctele $z = x + iy$ în care funcţia $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ este monogenă.

2. Să se determine punctele $z = x + iy$ în care funcţia $f(z) = z^2 - z \cdot \bar{z} - \bar{z}^2 + \bar{z} - 2z$ este monogenă.



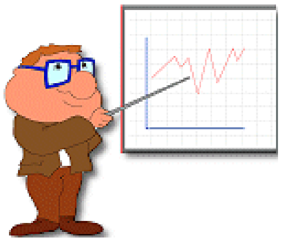
De reţinut!

- noţiunea de funcţie complexă de variabilă reală
- noţiunea de funcţie complexă de variabilă complexă
- noţiunea de funcţie monogenă

Lucrare de verificare la Unitatea de învăţare nr. 2

1. Să se construiască suportul diagramelor funcţiei: $z(t) = \dfrac{1}{1+it}$.

2. Să se determine punctele $z = x + iy$ în care funcţia $f(z) = \ln z$ este monogenă şi să se calculeze derivatele în punctele determinate.



Răspunsuri şi comentarii la întrebările din testele de autoevaluare

Test de autoevaluare 2.1

1. $z(t) = a_1 + ia_2 + b(\cos \omega t + i \sin \omega t)$

$x(t) = a_1 + b\cos \omega t$

$y(t) = a_2 + b\sin \omega t$

sunt ecuaţiile parametrice ale cercului

$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = b^2$

2. $x(t) = \dfrac{1}{1+t}$

$y(t) = \dfrac{1}{1+t}$

Deci $x + y = 1$

Test de autoevaluare 2.2

1. $f(z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$

$u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ şi $v(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$

$$(C - R)\begin{cases} x^2 = y^2 \\ xy = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 0$$

Punctul (0, 0) nu aparţine domeniului de definiţie al funcţiei, deci funcţia nu este monogenă în niciun punct din planul complex.

2. $f(z) = -x^2 - 3y^2 - x + iy(4x - 3)$

$u(x, y) = -x^2 - 3y^2 - x$ şi $v(x, y) = y(4x - 3)$

$$(C - R)\begin{cases} -2x - 1 = 4x - 3 \\ -6y = -4y \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}, y = 0$$

Recapitulare

- Funcţia f(z) derivabilă în z_0 se numeşte monogenă în z_0.
- Funcţia f(z) =U(x,y) + iV(x,y) este monogenă în $z_0 = x_0 + iy_0$ din D dacă şi numai dacă sunt îndeplinite condiţiile:

$$(C-R)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial V}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial V}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Bibliografie

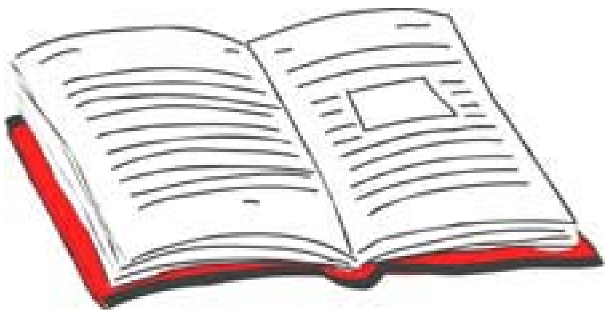
1. Ioan–Mircea Popovici, *Matematici speciale (pentru ingineri şi economişti),*Editura Nautica, Constanţa, 2005
2. I.M. Popovici, D. Popovici, M. Dumitru, A. Costea, *Capitole de matematici:Speciale, probabilităţi şi statistică,* Editura Nautica, Constanţa, 2007
3. I.M. Popovici, E. Constantinescu, F. Memet, D. Popovici, Şt. Szabo, D.M. Popovici, *Probleme de matematici speciale,* 1998
4. R. Cristescu, *Matematici superioare*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.

Unitatea de învăţare nr. 3

Funcţii olomorfe

Cuprins **Pagina**

Obiectivele unităţii de învăţare nr. 3	2
3.1 Funcţii olomorfe	2
Lucrare de verificare – unitatea de învăţare nr. 3	4
Răspunsuri şi comentarii la întrebările din testele de autoevaluare	5
Bibliografie – unitatea de învăţare nr. 3	6



OBIECTIVELE unităţii de învăţare nr. 3

Principalele obiective ale Unităţii de învăţare nr. 3 sunt:

- Înţelegerea noţiunii de funcţie olomorfă
- Aflarea unei funcţii complexe dacă se cunoaşte partea reală sau partea imaginară
- Aplicarea cu succes a unor elemente simple de calcul

3.1 Funcţii olomorfe

Definiţia 3.1. O funcţie *f* : *D*$\to C$ monogenă în orice punct din *D* se numeşte *olomorfă* pe *D*.

Observaţia.

i) O funcţie este olomorfă într-un punct dacă există o vecinătate a punctului respectiv astfel încât funcţia să fie monogenă în fiecare punct din acea vecinătate.

Teorema 3.1. Fie f,g : D$\subset C \to C$ două funcţii complexe de variabilă complexă. Dacă f şi g sunt monogene într-un punct $z_0 \in D$, atunci şi funcţiile f, f$\pm$g, fg, f/g ($g(z_0)\neq 0$) sunt monogene în acest punct şi între derivatele lor există relaţiile :

1. $[\alpha f(z)]'_{z=z_0}=\alpha f'(z_0), \alpha\in C$
2. $[f(z)\pm g(z)]'_{z=z_0}=f'(z_0)\pm g'(z_0)$
3. $[f(z)g(z)]'_{z=z_0}=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$
4. $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]'_{z=z_0}=\dfrac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}, g(z_0)\neq 0$

Teorema 3.2. Fie D_1, $D_2 \subset C$ două domenii şi f: $D_1 \to D_2$, g :$D_2\to C$. Dacă f este monogenă într-un punct $z_0\in D_1$ şi g este monogenă în punctul $w_0=f(z_0), w_0\in D_2$, atunci funcţia compusă h=g$\circ$h este monogenă în z_0 şi avem :

$$[h(z)]'_{z=z_0}=g'(w_0)f'(z_0)=g'(f(z_0))f'(z_0)$$

Observaţia.

i) Dacă o funcţie olomorfă într-un domeniu D are derivate nulă, atunci ea este constantă în domeniul D.

ii) Ca o consecinţă a teoremei Cauchy-Riemann se poate determina o funcţie olomorfă pe un domeniu, când i se cunoaşte doar partea reală sau doar partea imaginară.

iii) Funcţiile monogene *f*(*x*,*y*) = *u*(*x*, *y*) + *i*·*v*(*x*, *y*) pot fi scrise sub forma *w* = *f*(*z*) observând că *w* = *f*(*z*) = *u*(*z*,0) + *i*·*v*(*z*,0), adică în expresia funcţiei în parametri *x* şi *y* luăm *y* = 0 şi înlocuim *x* cu *z*.

Aplicaţii:

1. Stabiliţi domeniul de olomorfie al funcţiei $f(z)=\dfrac{z}{1+\bar{z}}$.

Rezolvare:

$$f(z)=\frac{x+x^2-y^2}{(x+1)^2+y^2}+i\frac{2xy+y}{(x+1)^2+y^2}$$

$u(x,y)=\dfrac{x+x^2-y^2}{(x+1)^2+y^2}$ şi $v(x,y)=\dfrac{2xy+y}{(x+1)^2+y^2}$

$(C-R)\begin{cases} x^3+2x^2-3xy^2-2y^2+x=0 \\ y^2-3x^2-4x-1=0 \end{cases} \Rightarrow$ funcţia este olomorfă în punctele: $z_1=\dfrac{-1+i}{2}$ şi $z_2=\dfrac{-1-i}{2}$

2, a) Demonstraţi că funcţia $v(x,y)=e^x\sin y$ poate fi parte imaginară a unei funcţii f(z) olomorfe.

b) Determinaţi funcţia f(z) ştiind că f(0)=1.

c) Determinaţi expresia lui f(z) în funcţie de z.

Rezolvare:

a) Pentru ca $v(x,y)=e^x\sin y$ să fie parte imaginară a unei funcţii olomorfe, trebuie să fie funcţie armonică, adică $\Delta v=0$ sau $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$

Se verifică uşor.

b) Determinarea funcţiei f(z) se face folosind condiţiile Cauchy-Riemann, din care se obţine funcţia u(x,y).

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{(t,y_0)}dt+\int_{y_0}^{y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{(x,t)}dt=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\left(e^t\cos y_0\right)dt-\int_{y_0}^{y}e^x\sin t\,dt=e^x\cos y_0-e^{x_0}\cos y_0+$$

$$+e^x\cos y-e^x\cos y_0=e^x\cos y-e^{x_0}\cos y_0.$$

Ultimul termen reprezintă o constantă, deci $u(x,y)=e^2\cos y+C.$

$$f(z)=e^x\cos y+C+ie^x\sin y$$

Din condiţia dată $f(0)=1\Rightarrow e^0+C=1\rightarrow C=0,$ deci $f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y.$

c) $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)=e^xe^{iy}=e^{x+iy}=e^z.$

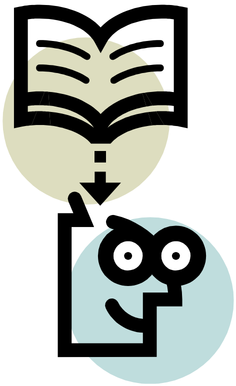
Test de autoevaluare 3.1

1. Stabiliţi domeniul de olomorfie al funcţiei $f(z)=\dfrac{1}{\overline{z}}$.

2. a) Demonstraţi că funcţia $u(x,y)=e^{x}\cos y$ poate fi parte reală a unei funcţii f(z) olomorfe.

b) Determinaţi funcţia f(z) ştiind că f(0)=1.

c) Determinaţi expresia lui f(z) în funcţie de z



De reţinut!

• noţiunea de funcţie olomorfă

• cum se află o funcţie monogenă dacă se cunoaşte partea sa reală sau partea imaginară

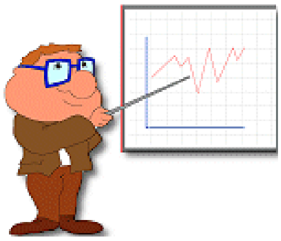
Lucrare de verificare la Unitatea de învăţare nr. 3

1. Stabiliţi domeniul de olomorfie al funcţiei $f(z)=\dfrac{z}{1+z}$.

2. a) Demonstraţi că funcţia $v(x,y)=e^{x}\sin y+\dfrac{y}{x^{2}+y^{2}}$ poate fi parte imaginară a unei funcţii f(z) olomorfe.

b) Determinaţi funcţia f(z) ştiind că f(1)=1.

c) Determinaţi expresia lui f(z) în funcţie de z



Răspunsuri şi comentarii la întrebările din testele de autoevaluare

Test de autoevaluare 3.1

1. $f(z)=\frac{x+iy}{x^2+y^2}$

$$\begin{cases} u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2} \\ v(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Din ecuaţiile Cauchy-Riemann rezultă că funcţia nu este olomorfă.

2. a) Pentru ca $u(x,y)=e^x\cos y$ să fie parte imaginară a unei funcţii olomorfe, trebuie să fie funcţie armonică, adică $\Delta u=0$ sau $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

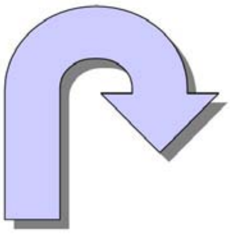
Se verifică uşor.

b) Determinarea funcţiei f(z) se face folosind condiţiile Cauchy-Riemann, din care se obţine funcţia u(x,y).

Obţinem $v(x,y)=e^2\sin y+C.$

Folosim condiţia dată şi obţinem: $f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y.$

c) $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)=e^xe^{iy}=e^{x+iy}=e^z.$



Recapitulare

• Funcţia f(z) =U(x,y) + iV(x,y) este monogenă în $z_0 = x_0 + iy_0$ din D dacă şi numai dacă sunt îndeplinite condiţiile:

$$(C-R)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial V}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial V}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Bibliografie

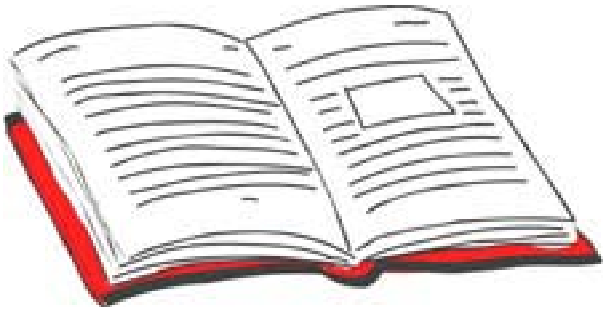
1. Ioan–Mircea Popovici, *Matematici speciale (pentru ingineri şi economişti),*Editura Nautica, Constanţa, 2005
2. I.M. Popovici, D. Popovici, M. Dumitru, A. Costea, *Capitole de matematici:Speciale, probabilităţi şi statistică,* Editura Nautica, Constanţa, 2007
3. I.M. Popovici, E. Constantinescu, F. Memet, D. Popovici, Şt. Szabo, D.M. Popovici, *Probleme de matematici speciale,* 1998
4. R. Cristescu, *Matematici superioare*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.

Unitatea de învăţare nr. 5

Serii complexe

Cuprins **Pagina**

Obiectivele unităţii de învăţare nr. 5	2
5.1 Serii complexe	2
5.2 Serii Taylor. Serii Laurent	5
Lucrare de verificare – unitatea de învăţare nr. 5	7
Răspunsuri şi comentarii la întrebările din testele de autoevaluare	7
Bibliografie – unitatea de învăţare nr. 5	8



OBIECTIVELE unităţii de învăţare nr. 5

Principalele obiective ale Unităţii de învăţare nr. 5 sunt:

- Înţelegerea noţiunilor de serie complexă, serie de puteri
- Aplicarea cu succes a unor elemente simple de calcul

5.1 Serii complexe

Definiţia 5.1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este convergentă $\Leftrightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ este convergentă.

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este convergentă şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ nu este convergentă atunci spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este *semiconvergentă.*

Observaţie: Cu criteriul lui Cauchy se observă că orice serie absolut convergentă este convergentă.

Fie $(u_n(z))_{n\geq 1}, u_n : E \to C, E \subseteq C.$

Notăm $E_c = \{z \in E / (u_n(z))_{n\geq 1}$ este şir convergent $\}$ E_c se numeşte mulţimea de convergenţă a şirului de funcţii.

În general, rapiditatea de convergenţă în E_c diferă de la un punct la altul.

În cazul în care rapiditatea este aceeaşi, adică $(\forall)\varepsilon > 0, (\exists)N(\varepsilon)$ astfel încât $(\forall)z \in E_c$ şi $(\forall)n \geq N(\varepsilon)$ $|u_n(z) - u(z)| < \varepsilon$ spunem că u_n converge uniform la u.

Scriem $u_n \xrightarrow{c.u.} u.$

Cealaltă convergenţă este convergenţă simplă şi notăm $u_n \xrightarrow{c.s.} u.$

Dacă $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} u_k(z)$ şi $S_n(z) \to S(z)$ spunem că seria de funcţii este convergentă. $S(z) - S_n(z) = R_n(z)$ se numeşte restul seriei şi pe E_c, $R_n(z) \to 0.$

Teorema 5.1. Dacă u_n sunt funcţii continue pe E şi $S_n \xrightarrow{u} S$ pe E atunci

(i) suma seriei S este continuă pe E.

(ii) dacă arcul $AB \subseteq E$ atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{AB} u_n$ este convergentă şi $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{AB} u_n = \int_{AB}\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Definiţia 5.2. O serie de puteri sau serie întreagă este o serie de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{cu} \quad c_n, a, z \in C.$$

Teorema 5.2. (Abel) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ este convergentă în z_0 şi divergentă în z_1, atunci ea este convergentă în interiorul cercului $|z| < |z_0|$ şi divergentă în domeniul $|z| > |z_1|$.

Demonstraţie. Vom nota $R = \sup_{z \in E_c} |z|$ şi numim raza de convergenţă a seriei de puteri. Conform teoremei lui Abel seria de puteri este convergentă în interiorul cercului de convergenţă (cercul de rază R) şi divergenţă în exterior. Pe cerc, în unele puncte avem convergenţă în altele divergenţă.

Pentru calculul razei de convergenţă este suficient să deducem marginea superioară a punctelor de convergenţă de pe semiaxa reală pozitivă R, adică să calculăm raza de convergenţă a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| x^n, x \in R,$ care ştim de la seriile de puteri reale că este:

$$R = \frac{1}{l} \text{ unde } l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|, \quad c_n \neq 0 \text{ sau } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Serii importante

$$1 + z + z^2 + ... + z^n + ... = \frac{1}{1-z}, \text{ cu } R = 1$$

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ... \quad \text{, cu } R = \infty$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{cu } R = \infty$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ cu } R = \infty$$

$$(1+z)^{\lambda} = 1 - \frac{\lambda}{1!} z + \frac{\lambda(\lambda-1)}{21} z^2 + ... + \frac{\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)}{n!} z^n + ..., \ \lambda \in R$$

Aplicaţii:

1. Determinaţi raza de convergenţă a seriei

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2}$$

şi studiaţi comportarea seriei pe cercul de convergenţă.

Rezolvare:

$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1,$ atunci $R=\frac{1}{l}=1.$ Seria este absolut convergentă în domeniul $|z|<1.$

Pe cercul de convergenţă $z=\cos\theta+i\sin\theta$, seria devine

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos k\theta}{k^2}+i\frac{\sin k\theta}{k^2}\right)$$

Cu criteriul comparaţiei, seriile: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\theta}{k^2}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\theta}{k^2}$ sunt convergente deoarece

$\left|\frac{\cos k\theta}{k^2}\right|<\frac{1}{k^2}$, $\left|\frac{\sin k\theta}{k^2}\right|<\frac{1}{k^2}$ şi seria armonică este convergentă. Deci seria converge pe

$|z|\le 1.$

2. Dacă $c_n\in R, c_n \setminus 0$ şi raza de convergenţă a seriei este 1, atunci $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ este convergentă

pe cercul $|z|=1,$ excepţie ar putea să facă z =1 (Rezultatul îi aparţine lui Picard).

Rezolvare:

Să arătăm că $S_n(z)=\sum_{k=0}^{n}c_k z^k$ este şir Cauchy.

$$(z-1)(S_{n+p}(z)-S_n(z)=-c_{n+1}z^{n+1}+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(c_k-c_{k+1})z^{k+1}+c_{n+p}z^{n+p+1}$$

$$|z-1||S_{n+p}(z)-S_n(z)|\le C_{n+1}|z|^{n+1}+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(C_k-C_{k+1})|z|^{k+1}+C_{n+p}|z|^{n+p+1}$$

Cum $|z|=1, z\ne 1,$ deducem că

$$|S_{n+p}(z)-S_n(z)|\le\frac{1}{|z-1|}\left(C_{n+1}+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(C_k-C_{k+1})+C_{n+p}\right)=\frac{2C_{n+1}}{|z-1|}\to 0$$

Test de autoevaluare 5.1

1. Determinaţi raza de convergenţă a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} z^n$.

2. Determinaţi mulţimea de convergenţă a seriei: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1} z^n$.

5.2 Serii Taylor. Serii Laurent

Serii Taylor

Fie f o funcţie olomorfă într-un domeniu D şi $C(\rho, a) \subseteq D$, cercul de centru a şi de rază ρ.

Teorema 5.3. Oricare ar fi z cu $|z-a| = r < \rho$,

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(z)$$

(numită formula lui Taylor a funcţiei f(z) în punctul z = a).

Serii Laurent

Fie f(z) o funcţie olomorfă într-un domeniu multiplu conex D şi o coroană circulară Δ cu centrul în a, Δ: $\rho_2 < |z-a| < \rho_1$ având frontiera formată din cercurile Γ_1 şi Γ_2, de ecuaţii $|u-a| = \rho_1$, $|u-a| = \rho_2$.

Vom presupune că $\Delta, \Gamma_1, \Gamma_2$ sunt conţinute în D, şi f(z) nu este olomorfă în interiorul cercului Γ_1. Căutăm pentru f(z) o dezvoltare în serie, în care vor exista şi puteri negative ale lui z-a, valabilă în coroana circulară Δ. Conform formulei lui Cauchy referitoare la domenii multiplu conexe, pe Δ avem:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(u)}{u-z} du - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(u)}{u-z} du$$

Pentru integrala pe Γ_1, unde avem: $|z-a| < |u-a|$, dezvoltarea în serie geometrică a lui $\frac{1}{u-z}$ decurge ca în cazul seriei Taylor, deci vom obţine şi aici:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(u)du}{u-z} = c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots$$

cu expresii analoage pentru coeficienţi

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(u)du}{(u-a)^{n+1}}$$

valorile c_n neexprimându-se cu ajutorul derivatelor, deoarece f(z) nu este olomorfă în interiorul cercului Γ_1.

Definiţia 5.3. $(\forall)z \in \Delta,\ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ se numeşte seria Laurent a funcţiei f(z) relativă la coroana Δ de centru z = a.

Partea formată cu puterile negative se numeşte partea principală a seriei Laurent, iar cea de-a doua, partea întreagă sau partea tayloriană.

Aplicaţii:

1. Fie $f(z) = \frac{2z-1}{z^2-z-6}$. Dezvoltaţi după puterile lui z în domeniul $|z| < 2$.

Rezolvare:

Descompunând în fracţii simple, avem

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-3}$$

şi pe domeniul $|z| < 2$, folosim dezvoltarea în serie geometrică:

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + ... + ,$$

convergentă pentru $|q| < 1$.

Obţinem astfel seria Taylor

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n .$$

2. Scrieţi seria Taylor în jurul punctului indicat: $f(z) = \frac{z+3}{z^2-8z+15}$, $z = 4$.

Rezolvare:

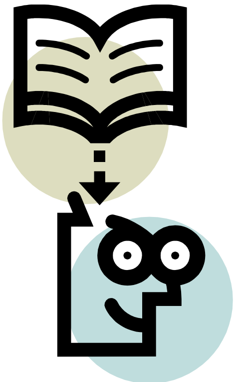
Cu substituţia z – 4 = u, pentru $|u| < 1$ avem

$$f(z) = f(u(z)) = \frac{u+7}{u^2-1} = -(u+7)\frac{1}{1-u^2} = -(u+7)\sum_{u=0}^{\infty} u^{2n} .$$

Test de autoevaluare 5.2

1. Scrieţi seria Taylor în jurul punctului indicat: $f(z)=\dfrac{z-1}{z-2}$, $z=0$.

2. Scrieţi seria Taylor în jurul punctului indicat: $f(z)=(1+z)^{\frac{1}{z}}$, $z=0$.



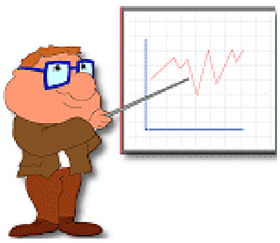
De reţinut!

- convergenţa unei serii
- serii Laurent
- dezvoltarea în serie Taylor

Lucrare de verificare la Unitatea de învăţare nr. 5

1. Determinaţi raza de convergenţă a seriei $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n!)^3}{(3n)!}z^n$.

2. Scrieţi seria Taylor în jurul punctului indicat: $f(z)=\sin\dfrac{z}{z-1}$, $z=1$.



Răspunsuri şi comentarii la întrebările din testele de autoevaluare

Test de autoevaluare 5.1

1. $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n+3}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow R=2$

2. $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)(n^2+1)}{(n^2+2n+2)(n+1)}=1\Rightarrow R=1$. Deci seria converge pe $|z|\le 1$.

Test de autoevaluare 5.2

1. $f(z)=1+\frac{1}{z-2}=1-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$

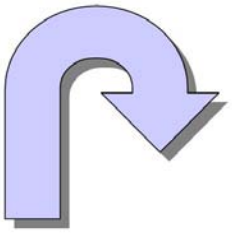
2. $f(z)=e^{\frac{1}{z}\ln(1+z)}=e^{\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}...\right)}=e\cdot e^{\left(-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^2}{3}+...\right)}=$

$$=e\left(1+\frac{1}{1!}\left(-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}-\frac{z^3}{4}+...\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}-\frac{z^3}{4}+...\right)^2...\right)=$$

$$=e\left(1-\frac{z}{2}+\frac{11}{24}z^2...\right),\ |z|<1$$

Am ţinut cont de faptul că

$\ln(1+z)=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+...,$ şi $e^z=1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+...$



Recapitulare

- Seria $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ este convergentă $\Leftrightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ este convergentă.
- Oricare ar fi z cu $|z-a|=r<\rho$,

$$f(z)=f(a)+\frac{z-a}{1!}f'(a)+...+\frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(z)$$

- $(\forall)z\in\Delta,\ f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$ se numeşte seria Laurent a funcţiei f(z) relativă la coroana Δ de centru z = a.

Bibliografie

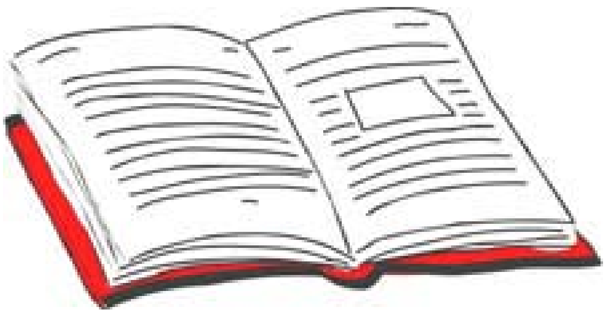
1. Ioan–Mircea Popovici, *Matematici speciale (pentru ingineri şi economişti),*Editura Nautica, Constanţa, 2005
2. I.M. Popovici, D. Popovici, M. Dumitru, A. Costea, *Capitole de matematici:Speciale, probabilităţi şi statistică,* Editura Nautica, Constanţa, 2007
3. I.M. Popovici, E. Constantinescu, F. Memet, D. Popovici, Şt. Szabo, D.M. Popovici, *Probleme de matematici speciale,* 1998
4. R. Cristescu, *Matematici superioare*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.

Unitatea de învăţare nr. 6

Teoreme şi formule Cauchy

Cuprins **Pagina**

Obiectivele unităţii de învăţare nr. 6	2
6.1 Teorema lui Cauchy pentru domenii simplu conexe	2
6.2 Teorema lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe	3
Lucrare de verificare – unitatea de învăţare nr. 6	6
Răspunsuri şi comentarii la întrebările din testele de autoevaluare	7
Bibliografie – unitatea de învăţare nr. 6	8



OBIECTIVELE unităţii de învăţare nr. 6

Principalele obiective ale Unităţii de învăţare nr. 6 sunt:

- Înţelegerea noţiunii de domeniu simplu şi multiplu conex
- Aplicarea cu succes a teoremelor lui Cauchy

6.1 Teorema lui Cauchy pentru domenii simplu conexe

Dacă AB este un arc de curbă plană, dat prin ecuaţiile parametrice :

$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t);\ t \in [a, b] \end{cases}$, unde x(t), y(t) sunt funcţii de clasă $C^1[a,b]$ sau de clasă C^1 pe porţiuni, iar f(z) o funcţie continuă pe AB, atunci există integrala curbilinie:

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{AB} U(x,y)dx - V(x,y)dy + i\int_{AB} V(x,y)dx + U(x,y)dy$$

Dacă extremităţile A şi B ale arcului coincid, atunci avem o curbă închisă şi putem scrie:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma} Udx - Vdy + i\oint_{\Gamma} Vdx + Udy .$$

Definiţia 6.1. Un domeniu $D \subset C (D \subset R^2)$ este simplu conex dacă orice curbă simplă închisă Γ conţinută în D are proprietatea că domeniul mărginit, Δ care are ca frontieră curba Γ, este inclus în D.

Un domeniu este multiplu conex dacă nu este simplu conex. Unui domeniu multiplu conex i se poate asocia un domeniu Δ simplu conex dacă se introduc un număr suficient de tăieturi.

Astfel, dacă D este un domeniu triplu conex (fig.1) atunci sunt necesare şi suficiente două tăieturi T_1 şi T_2 pentru a obţine un domeniu Δ simplu conex, $\Delta = D - (T_1 ... T_2)$

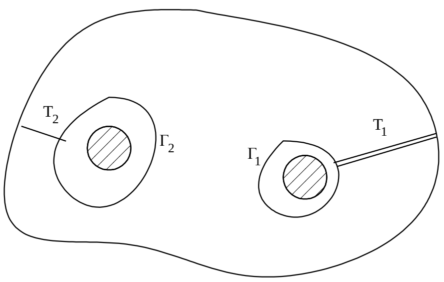


Figura 1

Teorema 6.1 (Cauchy) Dacă $f : D \to C$ este o funcţie olomorfă pe domeniul simplu conex D, atunci $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$, oricare ar fi curba închisă Γ situată în întregime în D.

Consecinţă. Dacă A şi B sunt două puncte situate în domeniul D în care f(z) este olomorfă, iar AMB şi $AM'B$ două arce de curbură ale căror puncte aparţin lui D, atunci

$$\int_{AMB} f(z)dz = \int_{AM'B} f(z)dz .$$

Aplicaţii:

1. Calculaţi cu ajutorul teoremei lui Cauchy integrala $\int_C \frac{e^{z^2+1}}{z^3}dz$, unde C: $|z-2i|=1$.

Rezolvare:

$|z-2i|=1 \Rightarrow x^2+(y-2)^2=1$, deci domeniul este $C((0,2);1)$

$z=0$ pol de ordin 3, nu este în interiorul domeniului, ceea ce înseamnă că domeniul este simplu conex$\Rightarrow I=0$

Test de autoevaluare 6.1

1. Calculaţi cu ajutorul teoremei lui Cauchy integrala $\int_C \frac{dz}{z^2+1}$, unde C: $|z|=R$, $R<1$

2. Calculaţi cu ajutorul teoremei lui Cauchy integrala $\int_C \frac{1}{z(z-3)(z+1)}dz$, unde C: $|z-2|=\frac{2}{3}$

6.2 Teorema lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe

Teorema 6.2 (Cauchy pentru domenii multiplu conexe)

Dacă Γ este o curbă situată în domeniul D multiplu conex ce traversează cele n tăieturi necesare pentru a obţine domeniul $\Delta = D-(T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_n)$, simplu conex, iar Γ_i, $\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}}$ o curbă ce traversează numai tăietura T_i o singură dată (în sens direct) atunci:

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{n}\oint_{\Gamma_i} f(z)dz$$

Menţionăm că $\int_{\Gamma_i} f(z_0)dz = K_i$ dacă Γ_i traversează tăietura T_i o singură dată în sens direct.

Numărul K_i se numeşte *constantă ciclică*.

Dacă Γ_i traversează tăietura T_i de m_1 ori în sens direct şi de m_2 ori în sens invers, atunci

$$\oint_{\Gamma_i} f(z)dz = (m_1 - m_2)K_i$$

Definiţia 6.2. Funcţia $\Phi(z)$ este o primitivă a funcţiei f(z) într-un domeniu D, dacă $\Phi(z)$ este olomorfă în D şi $\Phi'(z) = f(z)$ în orice punct $z \in D$.

Fie f(z) = 0 o funcţie olomorfă de domeniul D şi $A(a) \in D$ un punct fix iar $M(z) \in D$ un punct oarecare. Atunci

$$\int_{AB} f(z)dz = F(z) \qquad (1)$$

nu depinde de arcul de curbă situat în D şi care uneşte punctele A şi M.

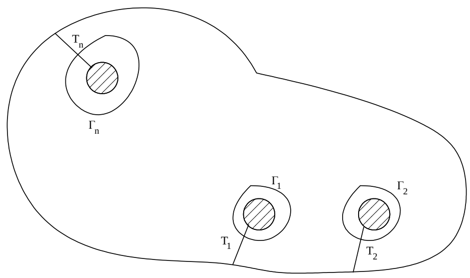


Figura 2.

Teorema 6.3. Dacă f(z) este o funcţie olomorfă pe domeniul simplu conex D, atunci ea admite primitive. O primitivă a lui f(z) este

$$F(z) = \int_{AM} f(z)dz$$

Funcţia F(z) este olomorfă în domeniul D. Dacă F(z) este o primitivă a funcţiei f(z), atunci şi $\Phi(z) = F(z) + C$ este o primitivă a lui f(z).

Teorema 6.4. Dacă f(z) este o funcţie olomorfă pe domeniul D, iar Γ o curbă simplă închisă, rectificabilă situată în domeniul D şi z_0 un punct din interiorul domeniului Δ mărginit de curba Γ, atunci

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

Observaţia:

i) Dacă punctul $z_0 \in \Gamma$, atunci

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = i\pi f(z_0),$$

dacă Γ admite tangentă unică în z_0. Această egalitate se numeşte *formula semireziduului.*

Dacă în z_0 curba Γ admite două semitangente care formează între ele unghiul φ, atunci

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = i\pi(\pi-\varphi) f(z_0)$$

şi se numeşte *valoarea principală a integralei* în sensul lui Cauchy pe curba Γ.

ii) Dacă domeniul D este triplu conex (fig.3) atunci

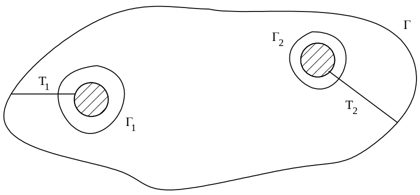


Figura 3

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz - \oint_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0}dz - \oint_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{z-z_0}dz\right]$$

Generalizarea pentru un domeniu multiplu conex este evidentă.

Teorema 6.5 (formula integrală a lui Cauchy). Dacă f(z) este o funcţie olomorfă pe domeniul D, iar Γ o curbă simplă închisă, rectificabilă situată în domeniul D, iar z_0 un punct din interiorul domeniului Δ mărginit de curba Γ, atunci f(z) admite derivate de orice ordin în z_0 şi derivata de ordinul n este

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

Aplicaţii:.

1. Calculaţi cu ajutorul teoremei lui Cauchy integrala $\int_C \frac{1}{z^2(z-3)(z+1)}dz$, unde C: $|z| = \frac{1}{2}$.

<u>Rezolvare:</u>

$z=0$ pol de ordin 2

$z=-1$ pol de ordin 1

$z=3$ pol de ordin 1

Se deseneaza cercul şi se trec singularitatile pe grafic.

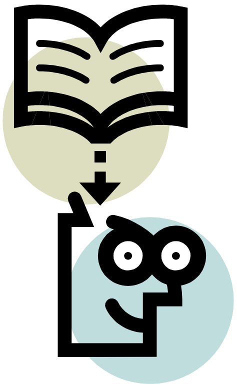
În interiorul domeniului este doar $z = 0 \Rightarrow I = 2\pi \cdot i f'(0)$, unde $f(z) = \dfrac{1}{(z-3)(z+1)}$

$\Rightarrow I = \dfrac{4\pi \cdot i}{9}$

Test de autoevaluare 6.2

1. . Calculaţi cu ajutorul teoremei lui Cauchy integrala $\int_C \dfrac{e^{z^2}}{z^2 - 4z} dz$, unde C: $|z-2| = 5$.

2. . Calculaţi cu ajutorul teoremei lui Cauchy integrala $\int_C \dfrac{e^{z^2+1}}{z^3} dz$, unde C: $|z-2i| = \dfrac{\pi}{2} + 1$



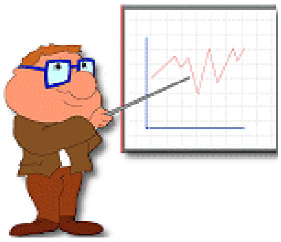
De reţinut!

- teorema lui Cauchy pentru domenii simplu conexe
- teorema lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe

Lucrare de verificare la Unitatea de învăţare nr. 6

.1. Calculaţi cu ajutorul teoremei lui Cauchy integrala $\int_C \dfrac{e^z}{(z-1)^n} dz$, unde C: $|z-1| = R$

2. Calculaţi cu ajutorul teoremei lui Cauchy integrala $\int_C \dfrac{\cosh \frac{\pi \cdot z}{2}}{z+i} dz$, unde C: $|z+2i| = 2$



Răspunsuri şi comentarii la întrebările din testele de autoevaluare

Test de autoevaluare 6.1

1. $|z| = R \Rightarrow C((0,0); R)$

$z = i$ pol de ordin 1

$z = -i$ pol de ordin 1

$R < 1 \Rightarrow$ domeniul este simplu conex, rezultă că integrala este zero.

2. $|z-2| = \frac{2}{3} \Rightarrow C\left((2,0); \frac{2}{3}\right)$

Domeniul este simplu conex $\Rightarrow I = 0$

Test de autoevaluare 6.2

1. $|z-2| = 5 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 25$, deci domeniul este $C((2,0);5)$

$z = 0$ pol de ordin 1

$z = 4$ pol de ordin 1

Ambele puncte sunt în interiorul domeniului (domeniul este triplu conex), rezultă că $I = I_1 + I_2$, unde $I_1 = 2\pi \cdot i f(0)$ şi $I_2 = 2\pi \cdot i f(4)$

$$\Rightarrow I = \pi \cdot i\left(\frac{e^{16}}{2} - \frac{2}{3}\right)$$

2. $|z-2i| = \frac{\pi}{2} + 1 \Rightarrow \left(C(0,2); \frac{\pi}{2} + 1\right)$

$z = 0$ pol de ordin 3, este în interiorul domeniului

$I = \frac{2\pi \cdot i}{2!} f''(0)$, unde $f(z) = e^{z^2+1} \Rightarrow I = 2\pi \cdot ei$

Recapitulare

• Dacă $f : D \to C$ este o funcţie olomorfă pe domeniul simplu conex D, atunci $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$, oricare ar fi curba închisă Γ situată în întregime în D.

• Dacă f(z) este o funcţie olomorfă pe domeniul D, iar Γ o curbă simplă închisă, rectificabilă situată în domeniul D, iar z_0 un punct din interiorul domeniului Δ mărginit de curba Γ, atunci f(z) admite derivate de orice ordin în z_0 şi derivata de ordinul n este

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

Bibliografie

1. Ioan–Mircea Popovici, *Matematici speciale (pentru ingineri şi economişti),*Editura Nautica, Constanţa, 2005
2. I.M. Popovici, D. Popovici, M. Dumitru, A. Costea, *Capitole de matematici:Speciale, probabilităţi şi statistică,* Editura Nautica, Constanţa, 2007
3. I.M. Popovici, E. Constantinescu, F. Memet, D. Popovici, Şt. Szabo, D.M. Popovici, *Probleme de matematici speciale,* 1998
4. R. Cristescu, *Matematici superioare*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.