prof. Gheorghiță Adrian Ştefan

*Motto: "Cuvintele te învață, exemplul te pune în mișcare"*

*100+* $\int ¿ \, dx$

# *Integrale nedefinite rezolvate amănunțit*

# Cuprins



*Termen de parcurgere a materialului: 40 zile*

# 1. Integrale rezolvate standard

**1.** $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = ?$

***Solutie***: $\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = x - arctg(x) + \wp$

**2.** $\int (x^3+x^2+1)\,dx = ?$

***Solutie***: $\int x^3\,dx + \int x^2\,dx + \int dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x + \wp$

**3.** $\int \frac{1}{2x+1}\,dx = ?$

***Solutie***:

*Observam ca* $\dot{\ln}(2x+1)' = \frac{2}{2x+1}$

$$\int \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \ln(2x+1)'\,dx = \frac{1}{2}\ln(2x+1) + \wp$$

**4.** $\int \frac{1}{4x+5}\,dx = ?$

***Solutie***:

*Se rezolvă în mod similar cu cea de mai sus numai ca, vom pune* $\frac{1}{4}$ *în fața integralei deoarece*

$$4\cdot\frac{1}{4x+5} = (\ln(4x+5))'$$

$$\int \frac{1}{4x+5}\,dx = \frac{1}{4}\int (\ln(4x+5))'\,dx = \frac{1}{4}\ln(4x+5) + \wp$$

**5.** $\int \frac{2x}{\sqrt{(2x^2+3)}}\,dx = ?$

***Solutie***:

*De obicei când întâlnim radicalul la numitor derivam si observam ce forma obtinem*:
*Pentru cazul nostru observam ca*:

$$(\sqrt{2x^2+3})' = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+3}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}$$

*ceea ce reprezinta exact valoarea din integrală*

$$\int \frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}\,dx = \int (\sqrt{2x^2+3})'\,dx = \sqrt{2x^2+3} + \wp$$

**6.** $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2+2}}\,dx = ?$

***Solutie***:

$(\sqrt{5x^2+2})' = \frac{10x}{2\sqrt{5x^2+2}} = \frac{5x}{\sqrt{5x^2+2}}$ *rezultă* $\frac{x}{\sqrt{5x^2+2}} = (\frac{\sqrt{5x^2+2}}{5})'$

$\int \frac{x}{\sqrt{5x^2+2}}\,dx = \frac{1}{5}\int (\sqrt{5x^2+2})'\,dx = \frac{1}{5}\sqrt{5x^2+2} + \wp$

**7.** $\int e^x + \frac{2}{x} - x^2\,dx = ?\ x \in \mathbb{R}_+$

***Solutie***:

$\int e^x + \frac{2}{x} - x^2\,dx = \int e^x\,dx + 2\int \frac{dx}{x} - \int x^2\,dx =$

$= e^x + 2\ln(x) + \frac{x^3}{3} + \wp$

**8.** $\int \cos(3x)\,dx = ?$

***Solutie***:

*Dacă derivăm*, $(\cos(3x))' = -3\sin(3x)$

*Dar* $(\sin(3x))' = 3\cos(3x)$ *rezultă* $\cos(3x) = \left(\frac{\sin(3x)}{3}\right)'$

*Deci* $\int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\int (\sin(3x))'\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x) + \wp$

**9.** $I = \int (x^2 + 2x + \frac{1}{x})\,dx,\ x < 0;\quad I = ?$

***Solutie***:

$I = \int x^2\,dx + \int 2x\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx$

$I = \frac{x^3}{3} + x^2 + \ln(-x) + \wp$

*Observație*: *Rezultatul contine* $\ln(-x)$ *pentru că din ipoteză ştim că* $x < 0$.

**10.** $I = \int (x + \frac{1}{x})\,dx,\ x > 0;\quad I = ?$

***Solutie***:

$I = \int x\,dx + \int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} + \ln(x) + \wp$

*! Observație*: *În acest caz rezultatul conține* $\ln(x)$ *pentru că* $x < 0$.

**11.** $I = \int \frac{x-3}{x^5}\,dx,\ x > 0;\quad I = ?$

***Solutie***:

$I = \int (\frac{x}{x^5} + \frac{3}{x^5})\,dx = \int \frac{dx}{x^4} + 3\int \frac{dx}{x^5}$

$I = \int x^{-4}\,dx + 3\int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-4}+1}{-4+1} + 3\cdot\frac{x^{-5}+1}{-5+1} + \wp$

$I = -\frac{1}{3x^3} - \frac{3}{4x^4} + \wp$

**12.** $I=\int (a\cdot\sin(x)+b\cdot\cos(x))\,dx;\ a,b\in\mathbb{R};\ I=?$

***Solutie***:

$I=a\int \sin(x)\,dx+b\int \cos(x)\,dx=-a\cdot\cos(x)+b\cdot\sin(x)+\wp$

**13.** $I=\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx,\ x\in(0,\frac{\pi}{2});\ I=?$

***Solutie***:

*Scriem* $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ *şi obţinem*:

$I=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

$I=\int \frac{dx}{\sin^2 x}-\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-ctg\,x-tg\,x+\wp$

**14.** $I=\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}},x\in(-\frac{1}{2};\frac{1}{2});\ I=?$

***Solutie***:

$I=\int \frac{dx}{\sqrt{1^2-(2x)^2}}=\frac{1}{2}\arcsin(2x)+\wp$

*Verificare*: $\left(\frac{1}{2}\arcsin(2x)\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1^2-(2x)^2}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{1^2-(2x)^2}}$

**15.** $I=\int\left(\frac{2}{\sin^2(x)}+\frac{1}{\cos^2(x)}\right)dx,\ x\in(0,\frac{\pi}{2});\ I=?$

***Solutie***:

$I=2\int\frac{dx}{\sin^2(x)}+\int\frac{dx}{\cos^2(x)}=-2\,ctg(x)+tg(x)+\wp$

**16.** $I=\int\frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}},\ x\in(-\frac{4}{3},\frac{4}{3});\ I=?$

***Solutie***:

*I se mai poate scrie şi astfel*:

$I=\int\frac{dx}{\sqrt{4^2-(3x)^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}+\wp$

*Verificare*: $\left(\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}\right)'=\frac{1}{3}\ \frac{1}{\sqrt{4^2-(3x)^2}}\ 3=\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}$

**17.** $I=\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}},\ x\in(-2,2);\ I=?$

***Solutie***:

$I=\int\frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}+\wp$

**18.** $I=\int\frac{dx}{x^2+4};\ I=?$

***Solutie***:

$I=\int\frac{dx}{x^2+2^2}=\frac{1}{2}\,artcg\,\frac{x}{2}+\wp$

**19.** $\boldsymbol{I=\int \frac{dx}{4x^2+1}};\ \boldsymbol{I=?}$

***Solutie***:

$$I=\int \frac{dx}{(2x)^2+1^2}=\frac{1}{2}\,arctg(2x)+\wp$$

**20.** $\boldsymbol{I=\int (\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})\,dx,\ x\geqslant 0};\ \boldsymbol{I=?}$

***Solutie***:

$$I=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx+\int x^{\frac{1}{3}}\,dx+\int x^{\frac{1}{4}}\,dx$$

$$I=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{3}}+1}{\frac{1}{3}+1}+\frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}$$

$$I=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}+\wp$$

$$I=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}+\wp$$

$$I=\frac{2}{3}\,x\sqrt{x}+\frac{3}{4}\,x\sqrt[3]{x}+\frac{4}{5}\,x\sqrt[4]{x}+\wp$$

**21.** $\boldsymbol{I=\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)dx,\ x>0};\ \boldsymbol{I=?}$

***Solutie***:

$$I=2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx-3\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx=2\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-3\cdot\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+\wp$$

$$I=\frac{\frac{2\sqrt{x}}{1}}{2}-\frac{\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}}{3}+\wp$$

$$I=4\sqrt{x}-\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+\wp$$

**22.** $\boldsymbol{I=\int (2^x+e^x)\,dx,\ x\in\mathbb{R}};\ \boldsymbol{I=?}$

***Solutie***:

$$I=\int 2^x\,dx+\int e^x\,dx=\frac{2^x}{ln2}+e^x+\wp$$

*! Am observat că* $(2^x)'=2^x\,ln2$, *deci* $2^x=\frac{(2^x)'}{ln2}$

**23.** $\boldsymbol{I=\int (2e^x-3^x)\,dx,\ x\in\mathbb{R}};\ \boldsymbol{I=?}$

***Solutie***:

$$I=2\int e^x\,dx-\int 3^x\,dx=2e^x-\frac{3^x}{ln3}+\wp$$

*Verificare*: $(2e^x-3^x)'=2e^x-\frac{3^x\cancel{ln3}}{\cancel{ln3}}=2e^x-3^x$

**24.** $I=\int \frac{dx}{x^2-1}$ , $x\in(-1,1)$; $I=?$

***Solutie***:

$$I=\int \frac{1}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\wp=\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\wp$$

**25.** $I=\int \frac{dx}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$; $I=?$

***Solutie***:

$$I=\int e^{-x}dx=-e^{-x}+\wp$$

**26.** $I=\int \frac{(x^2-1)^2}{x^4}dx$, $x>0$; $I=?$

***Solutie***:

$$(x^2-1)^2=x^4-2x^2+1$$

$$I=\int \frac{x^4}{x^4}dx-2\int \frac{x^2}{x^4}dx+\int \frac{1}{x^4}dx=\int 1\,dx-2\int \frac{1}{x^2}dx+\int \frac{1}{x^4}dx$$

$$I=\int dx+2\int x^{-2}dx+\int x^{-4}dx=x+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}+\wp$$

**27.** $I=\int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}dx$, $x\in(-1,1)$; $I=?$

***Solutie***:

$$I=\int \left(\frac{1}{1-x^2}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}\right)dx=-\int \frac{dx}{x^2-1}-\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$I=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\arcsin(x)+\wp$$

*Dar, ținând cont că* $x\in(-1,1)$, *I va fi*:

$$I=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-\arcsin(x)+\wp$$

**28.** $I=\int \frac{3+\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}dx$, $x\in\mathbb{R}$; $I=?$

***Solutie***:

$$I=\int \left(\frac{3}{x^2+4}+\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}\right)dx=3\int \frac{dx}{x^2+4}+\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$I=\frac{3}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right)+\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+\wp$$

**29.** $I=\int \frac{\cos^2(x)}{\cos^4(x)}dx$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; $I=?$

***Solutie***:

$$I=\int \frac{dx}{\cos^2(x)}=tg(x)+\wp$$

**30.** $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}}$, $x\in\mathbb{R}$; $I=?$

***Solutie***: $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+5^2}\right|+\wp$

# Integrarea prin părți

***Formula:***

$$\boxed{\int f\cdot g'\,dx = f\cdot g - \int f'\cdot g\,dx}$$

***Să se calculeze integralele:***

**1.** $\boldsymbol{\int \ln x\,dx,\ x>0}$

***Solutie*:**

*Alegem* $f(x)=\ln(x),\ g'(x)=1.$ *De aici*:

$$f'(x)=1,\qquad g(x)=x$$

*Folosind formula integrării prin părți, obținem*:

$$\int x\ \ln(x)dx=\int x'\ln(x)dx = x\cdot\ln(x)-\int \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx=$$

$$=x\cdot\ln(x)-x+\wp$$

**2.** $\boldsymbol{\int x\ln(x)dx,\ x>0}$

***Solutie*:**

*Alegem* $f(x)=\ln(x),\ g'(x)=x.$ *În concluzie*:

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=\frac{x^2}{2}$$

*Aplicăm formula integrării prin părți*:

$$\int x\ln(x)\,dx=\int \ln(x)\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)'dx=\ln(x)\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int x^{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{1}{4}\ x^2+\wp$$

**3.** $\boldsymbol{\int \ln^2(x)dx,\ x>0}$

***Solutie*:**

*Notăm* $f(x)=\ln^2(x),\ g'(x)=1.$Deci:

$$f'(x)=\frac{2}{x}\ \ln(x),\ g(x)=x$$

*Găsim*: $\int \ln^2(x)\,dx=\int x'\ln(x)\,dx=xln^2(x)-2\int \frac{\ln(x)}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}\,dx=$

$=xln^2(x)-2\int \ln(x)\,dx$ *Folosind ex* 1. *obținem*:

$$\int \ln^2(x)dx = x\ln^2(x)-2(x\ln(x)-x)+\wp=$$

$$=x(\ln^2(x)-2\cdot\ln(x)+2)+\wp$$

**4.** $\boldsymbol{\int x^2\ \ln(x)dx,\ x>0}$

***Solutie*:**

$f(x)=\ln(x),\ g'(x)=x^2$ *si avem*:

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=\frac{x^3}{3}$$

*Aplicând formula obținem*:

$$\int x^2\ \ln(x)dx=\left(\frac{x^3}{3}\right)'\ln(x)-\frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^3}{3}\ \ln(x)-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+\wp=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ \ln(x)-\frac{1}{9}\ x^3+\wp$$

**5.** $\int \frac{\ln(x)}{x}dx, x>0$

***Solutie***:

$f(x)=\ln(x), g'(x)=\frac{1}{x}$

$f'(x)=\frac{1}{x}, g(x)=\ln(x)$

*Aplicăm formula*:

$\int \frac{\ln(x)}{x}dx=\int (\ln(x))'\cdot\ln(x)dx=\ln^2(x)-\int \frac{1}{x}\ln(x)dx$

*Observăm că* $\int \frac{\ln(x)}{x}dx=\ln^2(x)-\int \frac{\ln(x)}{x}dx$*, deci*

$2\int \frac{\ln(x)}{x}dx=\ln^2(x)+\wp$*, în final*:

$\int \frac{\ln(x)}{x}dx=\frac{1}{2}\ln^2(x)+\wp$

**6.** $\int x^2e^x dx, x\in\mathbb{R}$

***Solutie***:

$f(x)=e^x, g'(x)=x^2$*, atunci*:

$f'(x)=e^x, g(x)=\frac{x^3}{3}$*, deci*:

$\int x^2e^x dx=\int (\frac{x^3}{3})'\cdot e^x dx=\frac{x^3}{3}e^x-\frac{1}{3}\int x^3\cdot e^x dx$

*Observăm că integrala astfel obținută este mult mai complicată*

*Atunci vom alege* $f(x)=x^{2,}g'(x)=e^x$ *cu*

$f'(x)=2\text{x}, g(x)=e^x$

*Deci*: $\int x^2e^x dx=\int x^2(e^x)'dx=$

$=x^2e^x-2\int xe^x dx$

*Aplicăm încă odată formula de integrare prin părți şi alegem*:

$f(x)=x, g'(x)=e^x$ *astfel încât*:

$f'(x)=1, g(x)=e^x$ *si obținem*:

$\int xe^x dx=\int x(e^x)'dx=xe^x-\int e^x\cdot x'dx=xe^x-e^x+\wp$

*În final*:

$\int x^2e^x dx=x^2e^x-2(xe^x-e^x)+\wp=$

$=e^x(x^2-2x+2)+\wp$

**7.** $\int (x^2-2x-1)e^x\,dx,\ x\in\mathbb{R}$

***Solutie*:**

*Considerăm* $f(x)=x^2-2x-1$ *si* $g'(x)=e^x$ *cu*

$f'(x)=2x-2$ *si* $g(x)=e^x$

*Aplicînd formula obținem*:

$$\int (x^2-2x-1)e^x dx=\int (x^2-2x-1)(e^x)'dx=$$
$$=(x^2-2x-1)e^x-2\int (x-1)e^x dx$$

*Luând separat*:

$$\int (x-1)e^x dx=\int xe^x dx-\int e^x dx=(\textit{conform ex6})=$$
$$=xe^x-e^x+\wp$$

*În final*:

$$\int (x^2-2x-1)e^x dx=(x^2-2x-1)e^x-2xe^x+4e^x+\wp=$$
$$=e^x(x^2-4x+3)+\wp$$

**8.** $\int x\sin(x)\,dx,\ x\in\mathbb{R}$

***Solutie*:**

*Notăm* $f(x)=x,\ g'(x)=\sin(x)$ *si avem*:

$f'(x)=1,\ g(x)=-\cos(x)$

*Deci*: $\int x\sin(x)dx=\int x(-\cos(x))'dx=$
$$=-x\cos(x)-\int -\cos(x)dx=$$
$$=-x\cos(x)+\sin(x)+\wp$$

**9.** $\int x^2\sin(x)\,dx,\ x\in\mathbb{R}$

***Solutie*:**

$f(x)=x^2,\ g'(x)=\sin(x)\rightarrow$

$\rightarrow f'(x)=2x,\ g(x)=-\cos(x)$, *integrala devine*:

$$\int x^2\sin(x)dx=\int x^2(-\cos(x)')dx=$$
$$=-x^2\cos(x)-2\int -x\cos(x)dx,\ \textit{notam}\ 2\int -x\cos(x)dx=I'$$
$$I'=2\int x\cos(x)dx=2\mathrm{int}\,x(\sin(x))'dx=$$
$$=2x\sin(x)-2\int x(\sin(x))'dx=$$
$$=2x\sin(x)+2\cos(x)+\wp$$

*Finalizare*:

$$\int x^2\sin(x)dx=-x^2\cos(x)+2x\sin(x)+2\cos(x)+\wp$$

**10.** $\int \sin^2(x)\,dx,\ x\in\mathbb{R}$

***Solutie*:**

*Luăm* $f(x)=\sin^2 x$ *si* $g'(x)=1\rightarrow$

$\rightarrow f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$ *si* $g(x)=x$

$$\int \sin^2(x)dx=\int (x)'\sin^2(x)dx=x\sin^2(x)-\int x\cdot\sin(2x)dx\quad \textit{notam}\ \int x\cdot\sin(2x)dx=I'$$
$$I'=\frac{1}{2}\int x(\cos(2x))'dx=\frac{1}{2}x\cos(2x)-\frac{1}{2}\int\cos(2x)dx=$$
$$=\frac{1}{2}x\cos(2x)-\frac{1}{2}\sin(2x)\cdot\frac{1}{2}+\wp$$

*Finalizare*:

$$\int \sin^2(x)dx=x(\sin^2(x)-\frac{\cos(2x)}{2})-\frac{1}{4}\sin(2x)+\wp$$

**11.** $\int e^x \sin(x)\,dx,\ x \in \mathbb{R}$

***Solutie***:

*Notăm* $f(x) = e^x,\ g'(x) = \sin(x) \rightarrow$

$\rightarrow f'(x) = e^x,\ g(x) = -\cos(x)$

*În concluzie*:

$I = \int e^x \sin(x)\,dx = \int e^x(-\cos(x))\,dx =$

$= -e^x\cos(x) + \int e^x \cos(x)\,dx \quad notam \quad \int e^x \cos(x)\,dx = I'$

$I' = \int e^x \cdot (\sin(x))'\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\,dx \quad dar \quad \int e^x \sin(x)\,dx = I$

*Deci*:

$I = -e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - I + \wp$

$I = \frac{1}{2} e^x(\sin(x) - \cos(x)) + \wp$

**Obs: I'->citim I "prim" şi nu I "derivat"**
**->l-am ales ca pe o notaţie**

**12.** $\int \sqrt{x^2-9}\,dx,\ x > 3$

***Solutie***:

$I = \int^{\sqrt{x^2-9}} \frac{\sqrt{x^2-9}}{1}\,dx = (am\ raționalizat) = \int \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2-9}}\,dx =$

$= \underbrace{\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}\,dx}_{I_1} - 9\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}}_{I_2} \quad unde \quad I = I_1 - I_2$

$I_2 = 9 \cdot \ln\left|x + \sqrt{x^2-9}\right|$

*Pentru a calcula* $I_1$, *notăm* $f(x) = x,\ g'(x) = (\sqrt{x^2-9})'$ *adică* $g'(x) = \cancel{2}\frac{x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-9}} = \frac{x}{x^2-9}$

*unde*:

$f'(x) = 1\ si\ g(x) = \sqrt{x^2-9}$

*În concluzie*: $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}\,dx = \int x \cdot (\sqrt{x^2-9})'\,dx =$

$= x\sqrt{x^2-9} - \int \sqrt{x^2-9}\,dx = x\sqrt{x^2-9} - I,\ Dar\ I = I_1 - I_2 \rightarrow$

$\rightarrow I = x\sqrt{x^2-9} - I - 9\ln\left|x + \sqrt{x^2-9}\right| \rightarrow$

$\rightarrow I = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-9} - 9\ln\left|x + \sqrt{x^2-9}\right|) + \wp$

**Formulă generală:**

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right|) + \wp,\ x \in [-a, a], a > 0$$

**13.** $\boldsymbol{I=\int\sqrt{x^2+9}\,dx\,;\quad I=?}$

***Solutie***:

$$I=\int\frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+9}}dx=$$

$$=\underbrace{\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}dx}_{I_1}+9\underbrace{\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}}_{I_2}$$

$$I_2=9\ln(x+\sqrt{x^2+9})+\wp$$

*Temă*: *Calculați* $I_1$ *folosind ex* 12

*Finalizare*: $I=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+9}+9\ln\sqrt{x^2+9})+\wp$

**14.** $\boldsymbol{\int\sqrt{9-x^2}\,dx\,,\ x\in(-3,3)}$

***Solutie***:

$$I=\int\sqrt{9-x^2}\,dx=\int\frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx=$$

$$=9\underbrace{\int\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx}_{I_1}-\underbrace{\int\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx}_{I_2}$$

$$I_1=9\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)+\wp$$

$$I_2=\int x\cdot\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$$

*Observăm că*: $(\sqrt{9-x^2})'=-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

*Deci* $I_2$ *se poate calcula prin părți astfel*:

$$I_2=\int -x(\sqrt{9-x^2})'\,dx=-x\sqrt{9-x^2}+\int\sqrt{9-x^2}\,dx$$

*Finalizare*:

$$I=I_1-I_2=9\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+x\sqrt{9-x^2}-I\rightarrow$$

$$\rightarrow I=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{9-x^2}+9\arcsin\frac{x}{3}\right)+\wp$$

**Formulă generală:**

$$\boxed{\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2+a^2}\cdot arsin\frac{x}{a}\right)+\wp\quad x\in[-a,a],a>0}$$

**15.** $\boldsymbol{\int x e^{2x}dx\,,\ x\in\mathbb{R}}$

***Solutie***:

*Notăm* $f(x)=x$ *si* $g'(x)=e^{2x}\rightarrow f'(x)=1$ *si* $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$$I=\int xe^{2x}dx=\frac{1}{2}\int x(e^{2x})'\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+\wp\rightarrow I=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\wp$$

$$I=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\left(\frac{2x-1}{2}\right)+\wp$$

**16.** $\int x\sqrt{x^2-9}\,dx,\ x>3$

***Solutie***:

$I=\int x\sqrt{x^2-9}\,dx=\int \frac{x(x^2-9)}{\sqrt{x^2-9}}\,dx=$

$=\underbrace{\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-9}}\,dx}_{I_1}-9\underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\,dx}_{I_2}$ *unde* $I_2=9\sqrt{x^2-9}$

*Pentru a calcula* $I_1$ *notăm* $f(x)=x^2$ *si* $g'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\rightarrow$

$\rightarrow f'(x)=2\text{x}$ *si* $g(x)=\sqrt{x^2-9}$

*Deci*:

$I_1=\int x^2(\sqrt{x^2-9})'\,dx=x^2\sqrt{x^2-9}-2\int x\sqrt{x^2-9}\,dx=$

$=x^2\sqrt{x^2-9}-2I$

$I=I_1-I_2=x^2\sqrt{x^2-9}-2\text{I}-9\sqrt{x^2-9}$

$I=\frac{1}{3}(x^2-9)\sqrt{x^2-9}+\wp$

**17.** $\int e^x\cos(x)\,dx,\ x\in\mathbb{R}$

***Solutie***:

*Notăm* $f(x)=\cos(x)$ *si* $g'(x)=e^x\rightarrow f'(x)=-\sin(x)$ *si* $g(x)=e^x$

*Integrala devine*:

$I=\int e^x\cos(x)dx=\int (e^x)'\cos(x)\,dx=$

$=e^x\cos(x)-\int e^x(-\sin(x))\,dx=$

$=e^x\cos(x)+\underbrace{\int e^x\sin(x)dx}_{I}{}'$

*Pentru a calcula integrala* $I'$ *folosim iarăşi formula de integrare prin părți astfel*:

$f(x)=\sin(x)$ *si* $g'(x)=e^x\rightarrow f'(x)=\cos(x)$ *si* $g(x)=e^x$

$I'=\int (e^x)'\sin(x)\,dx=e^x\sin(x)-\int e^x\cos(x)\,dx$

*În concluzie*:

$I=e^x\cos(x)+e^x\sin(x)-I\rightarrow$

$\rightarrow I=\frac{e^x}{2}(\cos(x)+\sin(x))+\wp$

**18.** $\int \arcsin(x)\,dx,\ x\in(-1,1)$

***Solutie***:

*Alegem* $f(x)=\arcsin(x)$ *si* $g'(x)=1\rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *si* $g(x)=x$

*Asadar*:

$I=\int \arcsin(x)\,dx=\int (x)'\arcsin(x)\,dx=$

$=x\cdot\arcsin(x)-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

*Observăm că*: $(\sqrt{1-x^2})'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, *în concluzie*:

$I=x\cdot\arcsin(x)+\int (\sqrt{1-x^2})'\,dx=x\cdot\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+\wp$

**19.** $\boldsymbol{\int \sin^2(x)\,dx,\ x\in\mathbb{R}}$

***Solutie***:

*Met I*: *Notăm* $f(x)=\sin(x)$ *si* $g'(x)=\sin(x)\rightarrow$

$\rightarrow f'(x)=\cos(x)$ *si* $g(x)=-\cos(x)$

$I=\int \sin(x)\cdot\sin(x)\,dx=\int \sin(x)\cdot(-\cos(x))\,dx=$

$=-\sin(x)\cos(x)+\int \cos^2(x)\,dx=$ *Dar* $\cos^2(x)=1-\sin^2(x)$ *deci*:

$\int \cos^2(x)\,dx=\int dx-\int \sin^2(x)\,dx$ *Finalizare*:

$I=-\sin(x)\cos(x)+x-I$, *dar* $\sin(x)\cdot\cos(x)=\dfrac{\sin(2x)}{2}$

*Deci*:

$$I=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin(2x)+\wp$$

*Met II*: *Notăm* $f(x)=\sin^2(x)$ *si* $g'(x)=1\rightarrow$

$\rightarrow f'(x)=2\sin(x)\cos(x)$ *si* $g(x)=x$

$I=\int (x)'\sin^2(x)\,dx=x\cdot\sin^2(x)-\int 2x\cdot\sin(x)\cos(x)\,dx$

$I=x\sin^2(x)-\int x\cdot\sin(2x)\,dx$

***Folosim iarăşi formula de integrare prin părți:***

*Notăm* $f(x)=x$ *si* $g'(x)=\sin(2x)\rightarrow f'(x)=1$ *si* $g(x)=-\dfrac{1}{2}\cos(2x)$

$I=\int x\sin(2x)\,dx=\int x\left(-\dfrac{1}{2}\cos(2x)\right)'dx=-\dfrac{1}{2}x\cos(2x)+\dfrac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx$

$I=x\cdot\sin^2(x)+\dfrac{1}{2}x\cos(2x)-\dfrac{1}{4}\sin(2x)+\wp=$

$=\dfrac{x}{2}(2\sin^2(x)+\cos(2x))-\dfrac{1}{4}\sin(2x)+\wp$

*Dar* $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$, *dec*:

$2\sin^2(x)+\cos(2x)=2\sin^2(x)+\cos^2(x)-\sin^2(x)=1$

*Finalizare*:

$$I=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin(2x)+\wp$$

**20.** $\boldsymbol{\int arctg(x)\,dx,\ x\in\mathbb{R}}$

***Solutie***:

*Folosim notația*: $f(x)=arctg(x)$ *si* $g'(x)=1\rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ *si* $g(x)=x$

*Obținem*:

$I=\int arctg(x)\,dx=\int (x)'\,arctg(x)\,dx=x\,arctg(x)-\int \dfrac{x}{1+x^2}\,dx$

***Printr-o oarecare intuiție matematică observăm că:***

$\left[\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]'=\dfrac{x}{1+x^2}$ *aşadar*:

$$I=x\cdot arctg(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\wp$$

## *Exerciții propuse*

***Calculați integralele:***

1. $\int x\, e^{x}\, dx\ ,\ x \in \mathbb{R}$
2. $\int x^{2}\, e^{3x}\, dx\ ,\ x \in \mathbb{R}$
3. $\int (x-1)^{2}\, e^{x}\, dx\ ,\ x \in \mathbb{R}$
3. $\int (x^{3}-3x+2)\, e^{x}\, dx\ ,\ x \in \mathbb{R}$
5. $\int (x-2)^{2}\, e^{2x}\, dx\ ,\ x \in \mathbb{R}$
6. $\int x \cos(x)\, dx\ ,\ x \in \mathbb{R}$
7. $\int x^{2} \cos(x)\, dx\ ,\ x \in \mathbb{R}$
8. $\int \cos^{2}(x)\, dx\ ,\ x \in \mathbb{R}$
9. $\int e^{2x} \sin(x)\, dx\ ,\ x \in \mathbb{R}$
10. $\int \sqrt{x^{2}-25}\, dx\ ,\ x > 5$
11. $\int \sqrt{x^{2}+196}\, dx\ ,\ x \in \mathbb{R}$
12. $\int \sqrt{36-x^{2}}\, dx\ ,\ x \in (-6,6)$
13. $\int x \sqrt{x^{2}-25}\, dx\ ,\ x > 5$
14. $\int e^{x} (-\cos(x))\, dx\ ,\ x \in \mathbb{R}$
15. $\int \arccos(x)\, dx\ ,\ x \in (-1,1)$
16. $\int arcctg(x)\, dx\ ,\ x \in \mathbb{R}$

# <u>Metoda substituției</u>

## <u>Prima metodă de schimbare de varibilă</u>

***<u>Probleme rezolvate:</u>***
***Să se calculeze, folosind prima metodă de schimbare de variabilă, primitivele următoarelor funcții:***

**1.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+7}}$, $\boldsymbol{x\in\mathbb{R}}$

***Solutie*:**

*Notăm* $x^2+x+7=t$ *si derivăm*:

$$(x^2+x+7)'dx=t'dt \rightarrow (2x+1)dx=dt$$

*Integrala devine*:

$$I=\int\frac{2x+1}{x^2+x+7}dx=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+\wp$$

*Revenind la substituția făcută avem*:

$$I=\ln(x^2+x+7)+\wp$$

**2.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+1}}$, $\boldsymbol{x\in\mathbb{R}}$

***Soltie*:**

*Notam* $x^2+3x+1=t$ *şi derivăm*:

$$(x^2+3x+1)'dx=t'dt \rightarrow (2x+3)'dx=dt$$

*Integrala devine*:

$$I=\int\frac{2\mathrm{x}+3}{x^2+3x+1}dx=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+\wp$$

*În final revenim la substituție*:

$$I=\ln(x^2+3x+1)+\wp$$

**3.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{4x+2}{x^2+x+2}}$ $\boldsymbol{x\in\mathbb{R}}$

***Solutie*:**

*Notam*: $x^2+x+2=t$ *astfel*:

$$(x^2+x+2)'=t'dt \rightarrow (2x+1)'dx=dt\,|\cdot2\rightarrow (4x+2)dx=2dt$$

*Integrala devine*:

$$I=\int\frac{2}{t}dt=2\ln|t|+\wp=\ln t^2+\wp$$

*Finalizare*:

$$I=2\ln(x^2+x+2)^2+\wp$$

**4.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\ x\in\mathbb{R}}$

***Solutie***:

*Notam* $\cos(x)=t$, *derivam*:

$$-\sin(x)dx=dt \rightarrow \sin(x)dx=-dt$$

*Deci*: $I=\int \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx=\int \frac{-dt}{1+t^2}=$

$$=-\boldsymbol{arctg}(t)+\wp$$

*Finalizare*:

$I=-\boldsymbol{arctg}(\cos(x))+\wp$

**5.** $\boldsymbol{f(x)=tg(x),x\in(0,\frac{\pi}{2})}$

***Solutie***:

*Notam* $\cos(x)=t$, *derivam*:

$$-\sin(x)dx=dt \rightarrow \sin(x)dx=-dt$$

*Obs*: *Am folosit faptul că* $\boldsymbol{tg}(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *astfel*:

$I=\int \boldsymbol{tg}(x)dx=\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx=\int \frac{-dt}{t}=-\ln(t)+\wp$

*Finalizare*:

$I=-\ln(\cos(x))+\wp$

**6.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{1+tg^2(x)}{tg(x)},\ x\in(0,\frac{\pi}{2})}$

***Solutie***:

*Met I*:

$$I=\int\left(\frac{1}{tg(x)}+\frac{tg^2(x)}{tg(x)}\right)dx=\int\left(\frac{1}{tg(x)}+tg(x)\right)dx=\underbrace{\int\frac{dx}{tg(x)}}_{I_1}+\underbrace{\int tg(x)dx}_{I_2}$$

$I_1=\int ctg(x)dx=\int\frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx$

*Notam* $\sin(x)=t \rightarrow \cos(x)dx=dt\rightarrow$

$I_1=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+\wp=\ln(\sin(x))+\wp$

$I_2=\int tg(x)dx=\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$

*Penru a rezolva integrala* $I_2$ *vom proceda în mod analog*

***Temă***: *Rezolvați integrala* $I_2$

*Trebuie să găsiți că*: $I_2=\ln(-\cos(x))+\wp$

*Finalizare*:

$I=\ln(\sin(x))-\ln(\cos(x))+\wp$ *sau*

$I=\ln\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)+\wp=\ln(tg\,x)+\wp$

*Met II* :

$$I=\int \frac{1+tg^2(x)}{tg(x)}dx=\int \frac{1}{tg(x)}\cdot(tg(x))'\,dx$$

*Obs* : *Am intuit* foarte simplu *faptul că* :

$$1+tg^2(x)=\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}=(tg(x))'$$

*Aşadar şi prin urmare...*

*Notam* $tg(x)=t \rightarrow (tg(x))'\,dx=dt$

$I=\ln|t|+\wp$

*Finalizare* :

$I=\ln(tg(x))+\wp$

**7.** $\boldsymbol{f(x)=x^3 e^{x^4},\ x\in\mathbb{R}}$

***Solutie*** :

*Notam* $x^3 e^{x^4}=t$ *derivând constatăm* :

$$4\cdot x^3 e^{x^4}=dt \rightarrow x^3 e^{x^4}dx=\frac{dt}{4}$$

*În aceste circumstanţe...*

$$I=\int x^3 e^{x^4}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{4}\ln|t|+\wp$$

*the end...* $I=\frac{1}{4}\ln(e^{x^4})+\wp$

**8.** $\boldsymbol{f(x)=\sin(x)\cdot\cos^2(x),\ x\in\mathbb{R}}$

***Solutie*** :

*Folosim notaţia* $\cos(x)=t \rightarrow -\sin(x)\,dx=dt$

*Utilizăm formula de schimbare de variabilă* :

$$I=\int \sin(x)\cos^2(x)dx=\int -t^2\,dt=-\frac{t^3}{3}+\wp$$

*Revenim la schimbarea de variabilă* :

$$I=-\frac{\cos^3(x)}{3}+\wp$$

**9.** $\boldsymbol{f(x)=\sin^3(x)\cdot\cos^3(x),\ x\in\mathbb{R}}$

***Solutie*** :

*Notam* $\cos(x)=t \rightarrow -\sin(x)\,dx=dt$

$$I=\int \sin^3(x)\cdot\cos^3(x)dx=\int \sin^2(x)\cdot\sin(x)\cdot\cos^3(x)\,dx=$$
$$=\int (1-\cos^2(x))\cdot\sin(x)\cdot\cos^3(x)\,dx=-\int(1-t^2)\cdot t^3\,dt=$$
$$=\int(t^5-t^3)\,dt=\int t^5 dt-\int t^3\,dt=$$
$$=\frac{t^6}{6}-\frac{t^4}{4}+\wp$$

*Finalizare* :

$$I=\frac{\cos^6(x)}{6}-\frac{\cos^4(x)}{4}+\wp$$

**10.** $f(x)=tg(x)+tg^3(x),\ x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$

***Solutie***:

*Amintim din ex 6*:

$$(tg(x))'=\frac{1}{\cos^2(x)}=\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=1+tg^2(x)$$

*Notam* $tg(x)=t \to (1+tg^2(x))\,dx=dt$

$$I=\int tg(x)+tg^3(x)dx=\int tg(x)(1+tg^2(x))dx=$$

$$=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+\wp$$

$$I=\frac{tg^2(x)}{2}+\wp=\frac{1}{2}tg^2(x)+\wp$$

***!Obs:Pentru a beneficia de un punctaj maxim în cazul rezolvării unui exercițiu matematic, trebuie să aducem soluția sub forma cea mai simplă.***

**11.** $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}},\ x\in(0;1)$

***Solutie***:

*Notăm* $x\sqrt{x}=t\ |^2 \to (x\sqrt{x})^2=x^3=t^2$

*Derivăm*, $(x\sqrt{x})'\,dx=dt$

*Dar* $(x\sqrt{x})'=\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}=\frac{3\cdot x}{2\sqrt{x}}$, *deci*:

$$\frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx=dt \to \sqrt{x}\cdot dx=\frac{2}{3}dt$$

*integrala* $I=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}dx$ *devine*

$$I'=\int\frac{2}{3}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=\frac{2}{3}\arcsin(t)+\wp$$

*Revenind la schimbare de variabilă făcută obținem*:

$$I=\frac{2}{3}\arcsin(x\sqrt{x})+\wp$$

**12.** $f(x)=\frac{x}{1+x^4},\ x\in\mathbb{R}$

***Solutie***:

*Notam*: $x^2=t \to 2\cdot x\,dx=dt \to xdx=\frac{dt}{2}$

*Integrala* $I=\int\frac{x}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^4}dx$ *devine prin schimbare de variabila*:

$$I'=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}arctg(t)+\wp$$

*Revenind la schimbarea factuta obtinem*:

$$I=\frac{1}{2}arctg(x^2)+\wp$$

**13.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, x>0, x\in\mathbb{R}}$

***Solutie*** :

*Notam* $\sqrt{x}=t \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt \rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\,dt$

*Integrala devine* :

$I=\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int 2e^t\,dt=2e^t+\wp$

*Revenind la schimbarea factuta obtinem* :

$I=2e^{\sqrt{x}}+\wp$

**14.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}, x<0, x\in\mathbb{R}}$

***Solutie*** :

*Notam* $e^{2x}=t \rightarrow 2e^{2x}dx=dt \rightarrow$

$e^{2x}=t\ |^2 \rightarrow e^{4x}=t^2 \rightarrow e^{2x}\ dx=\frac{dt}{2}$

*În concluzie* : $I=\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{1}{2}\arcsin(t)+\wp$

*Revenind la schimbarea de variabilă obtinem* :

$I=\frac{1}{2}\arcsin(e^{2x})+\wp$

**15.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{e^{tg(x)}}{\cos^2(x)}, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$

***Solutie*** :

*Notam* $tg(x)=t \rightarrow \frac{dx}{\cos^2(x)}=dt$

*Prin schimbare de variabilă* :

$I=\int\frac{e^{tg(x)}}{\cos^2(x)}dx=\int e^t\,dt=e^t+\wp$

*Revenind la schimbarea făcută* :

$I=e^{tg(x)}+\wp$

**16.** $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{1+x^2}, x\in\mathbb{R}}$

***Solutie*** :

*Incercam notatia* $1+x^2=t \rightarrow 2x\,dx=dt \rightarrow x\,dx=\frac{dt}{2}$

**Tragem de aici concluzia că în acest caz metoda schimbării de variabilă nu ne prea surâde.Încercăm să folosim metoda integrării prin părți....poate,poate...**

$I=\int\sqrt{1+x^2}dx=\int(x)'\sqrt{1=x^2}dx=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=$

$=x\sqrt{1+x^2}-(\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx) \rightarrow$

$\rightarrow I=x\sqrt{1+x^2}-I+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\wp$

$2\cdot I=x\sqrt{1+x^2}=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\wp$

*Finalizare* :

$I=\frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{x^2+1}))+\wp$

**17.** $f(x)=\frac{\sin(2x)}{\sin^4(x)+3}$, $x\in\mathbb{R}$

***Solutie***:

*Alegem* $\sin^2(x)=t \to 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)\,dx=dt$

*Dar cunoastem faptul ca* $2\sin(x)\cos(x)=\sin(2x)$, *deci*:

$\sin(2x)\,dx=dt$ *iar* $\sin^4(x)=(\sin^2(x))^2=t^2$

*După toate acestea...*

$$I=\int\frac{\sin(2x)}{\sin^4(x)+3}dx=\int\frac{dt}{t^2+3}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot arctg\frac{t}{\sqrt{3}}+\wp$$

*Revenim asupra schimbarii facute*:

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{\sin^2(x)}{\sqrt{3}}\right)+\wp$$

**18.** $f(x)=x\,tg(x^2)$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

***Solutie***:

*Notam* $x^2=t \to 2x\,dx=dt \to x\,dx=\frac{dt}{2}$

$$I=\int x\,tg(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int tg(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\sin(t)}{\cos}(t)\,dt$$

***Folosim o nouă schimbare de variabilă:***

$\cos(t)=a \to -\sin(t)dt=da \to \sin(t)\,dt=-da$

$$I=\frac{-1}{2}\int\frac{da}{a}=\frac{-1}{2}\ln(a)+\wp=-\ln(\sqrt{(a)})+\wp=-\ln(\sqrt{\cos(t)})+\wp$$

*În final* $I=-\ln(\sqrt{\cos(x^2)})+\wp$ *sau* $I=\ln\left(\frac{\sqrt{\cos(x^2)}}{\cos(x^2)}\right)+\wp$

**19.** $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$

***Solutie***:

$$Obs\,ca: x^2+x+1=\left(x^2+\frac{2x\cdot1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+1=$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+2+x+1}}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

*Notam* $x+\frac{1}{2}=t \to dx=dt$

$$I=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\ln\left|t+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right|+\wp$$

***În final:***

$$I=\ln\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]+\wp \quad sau$$

$$I=\ln\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{x^2+x+1}\right]+\wp$$

**20.** $f(x)=\frac{1}{x\ln(2x)}$, $x>1$

***Solutie*:**

*Notam*: $\ln(2x)=t \rightarrow \frac{2}{2x}dx=dt \rightarrow \frac{dx}{x}=dt$

$I=\int\frac{dx}{x\ln(2x)}$;

*I se transformă prin schimbare de variabilă în*:

$I'=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+\wp$ *Revenim la schimbarea făcută*:

$I=\ln(\ln(2x))\wp$

*!Obs*: *Modulul a disparut pentru ca* $x>1$

## Exerciții propuse

**Calculați primitivele următoarelor funcții, folosind prima metodă de schimbare de variabilă:**

1. $f(x)=\frac{3x+1}{x^3+x+2}, x\in\mathbb{R}$
2. $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+6}, x\in\mathbb{R}$
3. $f(x)=\frac{6x+3}{x^2+x+9}, x\in\mathbb{R}$
4. $f(x)=\frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}, x\in\mathbb{R}$
5. $f(x)=ctg(x), x\in(0,\frac{\pi}{2})$
6. $f(x)=\frac{1-tg^2(x)}{tg(x)}, x\in(0,\frac{\pi}{2})$
7. $f(x)=\frac{x}{x^2+5x+12}$, $x>e^{2,}$ $x\in\mathbb{R}$
8. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sin(\sqrt{x})$, $x>0$, $x\in\mathbb{R}$
9. $f(x)=\frac{x^3}{x^8+1}, x\in\mathbb{R}$
10. $f(x)=\frac{e^{-\sqrt{x}}}{-\sqrt{x}}, x>0$, $x\in\mathbb{R}$
11. $f(x)=x^4e^{x^5}, x\in\mathbb{R}$

## *Integrarea funcțiilor raționale*

### *Integrarea funcțiilor raționale simple*

***Probleme rezolvate:***
***Să se calculeze primitivele următoarelor funcții:***

**1.** $f(x)=\frac{1}{x+1},\ x<-1$

***Solutie*:**

$$\int \frac{1}{x+1}dx=\ln|x+1|+\wp=\ln(-x-1)+\wp$$

**2.** $f(x)=\frac{x}{(x+1)(2x+1)},\ x>-1,\ x\in\mathbb{R}$

***Solutie*:**

***Calculul primitivei acestei funcții presupune mai întâi descompunerea ei în funcții raționale simple, adică:***

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x+1}$$

***Dupa ce aducem la acelasi numitor obtinem:***

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)}=\frac{2Ax+A+Bx+B}{(x+1)(2x+1)},\ \textit{de fapt}:$$

$$x+0=x(2\cdot A+B)+A+B$$

***Trecem la identificarea coeficientilor:***

$$\begin{cases}2\cdot A+B=1\\ A+B=0\end{cases}$$ pentru că coeficientul lui x este 1 iar coeficientul liber este 0.

Rezolvând sistemul obținem:

$$A=1\ si\ B=-1$$

*Ajungem la concluzia*: $\frac{x}{(x+1)(2x+1)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}$, *prin urmare*:

$$\int f(x)=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx=$$
$$=\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{2x+1}=$$
$$=\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(2x+1)+\wp=$$
$$=\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\right)+\wp$$

**3.** $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+3},\ x\in\mathbb{R}$

***Solutie*:**

*Calculam radacinile polinomului f.*
*Voi folosi în loc de litera grecesca delta pe D*

$D=b^2-4ac=4-12=-8<0\rightarrow f$ *are radacini complexe.*

Datorită acestui fapt încercăm scrierea lui sub formă de sumă de pătrate.

$$x^2+2x+3=x^2+2x+1+2=(x+1)^2+(\sqrt{2})^2$$

$$\int f(x)=\int\frac{dx}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+\wp$$

**4.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{4x+1}{x(x+1)(x+3)},\ x\in\mathbb{R}_+}$

***Solutie***:

$$\frac{4x+1}{x(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+3}$$

După ce aducem la acelaşi numitor obţinem :

$$4x+1=A(x^2+4x+3)+Bx(x+3)+Cx(x+1)$$
$$4x+1=Ax^2+4Ax+3A+Bx^2+3Bx+Cx^2+Cx$$
$$4x+1=x^2(A+B+C)+x(4A+3B+C)+3A$$

Trecem la identificarea coeficienţilor

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 4A+3B+C=4 \\ 3A=1 \rightarrow A=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B+C=-\frac{1}{3} \\ 3B+C=\frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\textit{prin urmare}: A=\frac{1}{3},\ B=\frac{3}{2},\ C=-\frac{11}{6}$$

$$\textit{iar}\ \frac{4x+1}{x(x+1)(x+3)}=\frac{1}{3x}+\frac{3}{2(x+1)}-\frac{11}{6(x+3)}$$

$$\int\frac{4x+1}{x(x+1)(x+3)}dx=\int\frac{1}{3x}dx+\int\frac{3}{2(x+1)}dx-\int\frac{11}{6(x+3)}dx=$$
$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{11}{6}\int\frac{dx}{x+3}=$$
$$=\frac{1}{3}\ln(x)+\frac{3}{2}\ln(x+1)-\frac{11}{6}\ln(x+3)+\wp$$

**5.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{2x}{x^2-5x+6},\ x>3, x\in\mathbb{R}}$

***Solutie***:

*Calculăm soluţiile ecuaţiei*: $x^2-5x+6=0$

$$D=b^2-4\cdot ac=25-24 \rightarrow D=1$$
$$x_1=\frac{5+1}{2} \rightarrow x_1=3$$
$$x_2=\frac{5-1}{2} \rightarrow x_2=2$$

*În concluzie*:

$$\frac{2x}{x^2-5x+6}=\frac{2x}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$$
$$2x=Ax-2A+Bx-3B$$
$$2x=x(A+B)-2A-3B$$

$$\begin{cases} A+B=2\ |\cdot 2 \\ -2A-3B=0 \end{cases} \rightarrow A=6,\ B=-4$$

$$\int\frac{2x}{x-5x+6}dx=6\int\frac{dx}{x-3}-4\int\frac{dx}{x-2}=$$
$$=6\ln(x-3)-4\ln(x-2)+\wp=$$
$$=\ln\frac{(x-3)^6}{(x-2)^4}+\wp$$

6. $\boldsymbol{f(x)=\frac{6x+21}{x^2+x-2}}$ **,** $\boldsymbol{x>1}$

***Solutie*** :

Calculăm soluțiile ecuației $x^2+x-2=0$ cu scopul de a descompune funcția f(x) în funcții raționale simple.

$x^2+x+2=0$

$D=1+8=9 \rightarrow D=1 \rightarrow x_1=1 \;\; si \;\; x_2=-2$

*Observam ca* :

$$\frac{6x+21}{x^2+x-2}=\frac{6x+21}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

$6x+21=Ax+2A+Bx-B$

$6x+21=x(A+B)+2A-B$

*Indentificam coeficientii* :

$$\begin{cases} A+B=6 \\ 2A-B=21 \end{cases}$$

$3A=27 \rightarrow A=9 \;\; si \;\; B=-3$

*Astfel am aflat ca* :

$$I=\int\frac{6x+21}{x^2+x-2}dx=9\int\frac{dx}{x-1}-3\int\frac{dx}{x+2}= =9\ln(x-1)-3\ln(x+2)+\wp$$

$$I=\ln\frac{(x-1)^9}{(x+2)^3}+\wp$$

7. $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{(x+2)(x^2+5x+6)}}$ **,** $\boldsymbol{x>-1}$

***Solutie*** :

Pentru a descompune funcția aflăm mai întâi soluțiile ecuației: $x^2-5x+6=0$

$D=25-24=1$

$x_1=3, \;\; si \;\; x_2=2$

*Aşadar* :

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+5x+6)}=\frac{1}{(x+2)(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x-2}$$

*Indentificam coeficientii* :

$1=A(x-3)(x-2)+B(x+2)(x-2)+C(x+2)(x-3)$

$1=A(x^2-5x+6)+B(x^2-4)+C(x^2-x-6)$

$1=x^2(A+B+C)+x(-5A-C)+6A-4B-6C$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -5A-C=0 \rightarrow C=-5A \\ 6A-4B-6C=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4A+B=0 \mid \cdot 4 \\ 36A-4B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16A+4B=0 \\ 36A-4B=1 \end{cases}$$

$$A=\frac{1}{20}, \;\; B=\frac{1}{5}, \;\; C=-\frac{1}{4}$$

După ce înlocuim coeficienții aflați, obținem:

$$\int f(x)dx=\int\left(\frac{1}{20(x+2)}+\frac{1}{5(x-3)}-\frac{1}{4(x-2)}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{20}\ln(x+2)+\frac{1}{5}\ln(x+3)-\frac{1}{4}\ln(x-2)+\wp$$

**8.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{2}{(2x+5)(5x+2)}}$ **,** $\boldsymbol{x\in\mathbb{R}_+}$

***Solutie*** :

$$\frac{21}{(2x+5)(5x+2)}=\frac{A}{2x+5}+\frac{B}{5x+2}$$
$$21=5Ax+2A+2Bx+5B$$
$$21=x(5A+2B)+2A+5B$$

$$\begin{cases}5A+2B=0\,|-2\\2A+5B=21\,|\,5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-10A-4B=0\\10A+25B=105\end{cases}$$

*în conluzie*:

$A=-2$ *si* $B=5$

$$\int f(x)\,dx=-2\underbrace{\int\frac{dx}{2x+5}}_{I_1}+5\underbrace{\int\frac{dx}{5x+2}}_{I_2}$$

Pentru a intui rezultatul integralei $I_1$ observăm că:

$$(\ln(2x+5))'=\frac{2}{2x+5}\rightarrow\frac{1}{2x+5}=\frac{(\ln(2x+5))'}{2}$$

$$\text{În mod analog pt } I_2\rightarrow\frac{1}{5x+2}=\frac{(\ln(2x+5))'}{2}$$

*Datorită acestor indicii*:

$$\int f(x)\,dx=-2\int\frac{(\ln(2x+5))'}{2}dx+5\int\frac{(\ln(5x+2))'}{2}dx=$$
$$=-\ln(2x+5)+\ln(5x+2)+\wp=$$
$$=\ln\left(\frac{5x+2}{2x+5}\right)+\wp$$

**9.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{x^3+x+2}{x^3+x^2+x+1}}$**,** $\boldsymbol{x\in\mathbb{C}}$

***Solutie*** :

Amintim:

În cazul ecuației de gradul III, de obicei, cercetăm dacă soluția se află printre divizorii termenului liber.
În cazul nostru $D_1$={-1,1} şi observăm că $x_1$=-1 este soluție.

Folosind Schema lui Horner:

| | $x^3$ | $x^2$ | x | 1 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | 1 |
| -1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

$$x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+1),\ \textit{unde } x^2+1=0 \textit{ admite soluții complexe}$$

**Obținem:**

$$\frac{x^2+x+2}{x^3+x^2+x+1}=\frac{x^2+x+2}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$
$$x^2+x+2=Ax^2+A+Bx^2+Bx+Cx+C$$
$$x^2+x+2=x^2(A+B)+x(B+C)+A+C$$

$$\begin{cases}A+B=1\\B+C=1\\A+C=2\end{cases}\rightarrow A=1,\ B=0,\ C=1$$

$$\frac{x^2+x+2}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2+1}$$
$$\int f(x)\,dx=\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}=$$
$$=\ln(x+1)+arctg(x)+\wp$$

**10.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x},\ x>2}$

***Solutie*:**

***Deoarece gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului efectuăm împărțirea:***

$(x^5+x^4-8):(x^3-4x)=x^2+x+4,\quad r=4x^2+16x-8,\ astfel:$

$$\begin{cases} x^5+x^4-8=(x^3-4x)(x^2+x+4)+4x^2+16x-8 \\ vom\,scrie:\ f(x)=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} \end{cases}$$

$$\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$$
$$4x^2+16x-8=Ax^2-4A+Bx^2+2Bx+Cx^2-2Cx$$
$$\begin{array}{l} A+B+C=14 \\ 2B-2C=16 \\ -4A=-8 \end{array} \Leftrightarrow \quad A=2,\ B=5,\ C=-3$$

*În concluzie*:

$$\int f(x)\,dx=\int(x^2+x+4)\,dx-2\int\frac{dx}{x}+7\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{dx}{x+2}=$$
$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln(x)+5\ln(x-2)-3\ln(x+2)+\wp$$

**11.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{x^4-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2},\ x>2}$

***Solutie*:**

***Deoarece gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului efectuăm împărțirea:***

$(x^4-6x^2+11x-6):(x^2-3x+2)=x^2+3x+1\qquad r=8x-8$

$$Astfel:\ \frac{(x^4-6x^2+11x-6)}{(x^2-3x+2)}=\frac{(x^2+3x+1)\cancel{(x^2-3x+2)}}{\cancel{(x^2-3x+2)}}+\frac{8(x-1)}{x^2-3x+2}$$

***Încercăm să descompunem funcția*** $\frac{x-1}{x^2-3x+2}$ ***în funcții raționale simple.Pentru a face acest lucru căutăm mai întâi rădăcinile ecuației***

$x^2-3x+2=0.$

$D=9-8=1,\ x_1=2;\ x_2=1$

$$\frac{x-1}{x^2-3x+2}=\frac{x-1}{(x-2)(x-1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}$$
$$x-1=Ax-A+Bx-2B$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -A-2B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad A=1,\ B=0 \qquad De\ fapt:\frac{x-1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-2}$$

$$Finalizare:\ \int f(x)\,dx=\int(x^2+3x+1)\,dx=8\int\frac{dx}{x-2}=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+x+8\ln(x-2)+\wp$$

## *Integrarea funcțiilor raționale pentru care numitorul are rădăcini reale multiple*

***Să se calculeze primitivele următorelor funcții:***

1. $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x(x+1)^2},\ x>0}$

***Solutie*:**

*În acest caz funcția admite descompunerea*:

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$1=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx$$

$$1=x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B+C=0 \\ A=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad A=1,\ B=C=-1$$

*Deci*: $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$ *iar*,

$$\int f(x)\,dx=\ln(x)-\ln(x+1)-\int (x+1)^{-2}\,dx$$

*Pt a calcula* $\int \frac{dx}{(x+1)^2}$ *not* $x+1=t \rightarrow dx=dt$ *si* $(x+1)^2=t^2$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2}=\int \frac{dt}{t^2}=\int t^{-2}\,dt=-\frac{1}{t}+\wp$$

*Finalizare*:

$$\int f(x)\,dx=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)-\left(-\frac{1}{x+1}\right)+\wp=$$

$$=\frac{1}{x+1}+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\wp$$

2. $\boldsymbol{f(x)=\frac{x}{(x-1)(x+2)^2},\ x>1}$

***Solutie*:**

*Funcția se va descompune* cu ajutorul nostru *astfel*:

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

$$x=A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)+C(x-1)$$

$$x=x^2(A+B)+x(4A+B+C)+4A-2B-C$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 4A+B+C=1 \\ 4A-2B-C=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad A=\frac{1}{9}\ B=-\frac{1}{9},\ C=\frac{6}{9}$$

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{1}{9(x+2)}+\frac{6}{9(x+2)^2}$$

***Pentru că am ajutat funcția f(x) să se descompună...***

$$\int f(x)\,dx=\frac{1}{9}\Big(\underbrace{\int\frac{dx}{x-1}}_{I_1}-\underbrace{\int\frac{dx}{x+2}}_{I_2}+6\underbrace{\int\frac{dx}{(x+2)^2}}_{I_3}\Big)$$

***$I_1$ şi $I_2$ se rezolvă uşor.***

***Pentru a se rezolva $I_3$ apelăm la metoda schimbării de variabilă:***

*Notăm* $x+2=t\,|^2$

$(x+2)^2=t^2$ *si* $dx=dt$

$$I_3=6\int\frac{dx}{(x+2)^2}\quad devine\ I'_3=6\int\frac{dt}{t^2}=6\frac{t^{-1}}{-1}+\wp=-\frac{6}{t}+\wp$$

*Revenind la schimbarea facuta ,*

$$I_3=\frac{-6}{x+2}+\wp$$

*Finalizare :*

$$\int f(x)\,dx=\frac{1}{9}\left(\ln(x-1)-\ln(x+2)-\frac{6}{x+2}\right)+\wp=$$

$$=\frac{1}{9}\left(-\frac{6}{x+2}+\ln\frac{x-1}{x+2}\right)+\wp$$

**3.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{x}{(x+1)(x+3)^2}\,,\ x>-1}$

***Solutie*** :

*Descompunem funcția* $f(x)$ *în funcții raționale simple* :

$$\frac{x}{(x+1)(x+3)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2}$$

$$x=A(x^2+6\mathrm{x}+9)+B(x^2+4\mathrm{x}+3)+C(x+1)$$

$$x=x^2(A+B)+x(6A+4B+C)+9A+3B+C$$

$$\begin{cases}A+B=0\\ 6A+4B+C=1\\ 9A+3B+C=0\end{cases}\iff\quad A=-\frac{1}{4},\ B=\frac{1}{4,}\ C=-\frac{6}{4}$$

$$\int f(x)\,dx=\frac{1}{4}(-\ln(x+1)+\ln(x+3)+\int\frac{-6}{(x+3)^2}\,dx)$$

$$Dar\ ,\ -\int\frac{6}{(x+3)^2}\,dx=\frac{6}{(x+3)}+\wp$$

$$\int f(x)\,dx=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{x+3}{x+1}+\frac{6}{x+3}\right)+\wp$$

**4.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}\,,\ x>-1}$

***Solutie*** :

*Descompunem funcția* $f(x)$

$$\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

$$x^2=A(x+2)^2+B(x+1)(x+2)+C(x+1)$$

$$\begin{cases}A+B=1\\ 4A+3B+C=0\\ 4A+2\mathrm{B}+C=0\end{cases}\iff\quad A=1,\ B=0,\ C=-4$$

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{dx}{x+1}-4\int\frac{dx}{(x+2)^2}=$$

$$=\ln(x+1)+\frac{4}{x+2}+\wp$$

## *Integrarea unor funcții raționale care au numitorul cu rădăcini complexe simple*

***Calculați primitivele următoarelor funcții:***

**1.** $f(x) = \frac{1}{x^3+1}, x>0$

***Solutie***:

*Descompunem functia*:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

***Observăm că numitorul*** $x^2+1$ ***admite rădăcini complexe. Datorită acestui fapt în descompunerea făcută întâlnim mai nou termenul „Bx+C" în loc de obişnuitul "B+C"***

$$1 = A(x^2+1) + x(Bx+C)$$

$$A+B=0$$

$$C=0$$

$$A=1 \rightarrow B=-1$$

$$\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -arctg\, x + \ln(x) + \wp$$

**2.** $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$, $x>0$

***Solutie***:

***Observăm că numitorul acestei fracții are rădăcini complexe (D=-4<0)***

***!Descompunerea universală pentru funcția*** $\frac{1}{x^2+bx+c}$ *cu* $b^2-4c<0$ ***este:***

$$x^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\right)^2 \text{ adica:}$$

$$\frac{1}{x^2+bx+c} = \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\right)^2}$$

***Am reuşit astfel să scriem numitorul ca o sumă de pătrate.***

$$x^2+2x+2 = \left(x+\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{8-4}}{2}\right)^2 =$$

$$= (x+1)^2 + 1^2$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1^2} = arctg(x+1) + \wp$$

**3.** $f(x) = \frac{4x+5}{(x+2)(x^2+x+1)}$, $x>0$

***Solutie***:

$$\frac{4x+5}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$4x+5 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x+2)$$

$$4x+5 = A(x^2+x+1) + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C$$

$$\begin{cases} A+B=0 \to B=-A \\ A+2B+C=4 \\ A+2C=5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -A+C=4 \\ A+2C=5 \end{cases} \Longleftrightarrow A=-1,\ B=1,\ C=3$$

$$\int f(x)=-\int \frac{dx}{x+2}+\int \frac{x+3}{x^2+x+1}dx=$$

$$=-\ln(x+2)+I',\ unde \quad I'=\int \frac{x+3}{x^2+x+1}dx$$

***Observăm că*** $(x^2+x+1)'=2x+1$ ***,aşadar pentru a efectua o schimbare de variabilă modificăm puțin forma integralei*** $I'$ ***.***

$$I'=\frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+x+1}dx=\underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx}_{I_1'}+\underbrace{\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}}_{I_2'}$$

***Pentru a rezolva integrala*** $I_1'$ ***efectuăm schimbarea de variabilă:***

$x^2+x+1=a$

$(2x+1)'dx=da$

$$I_1'=\frac{1}{2}\int \frac{da}{a}=\frac{1}{2}\ln(a)+\wp$$

$$I_1'=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\wp$$

$$I_2'=\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot arctg\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\wp$$

$$=\sqrt{3}\cdot arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\wp$$

*Finalizare*:

$$\int f(x)dx=-\ln(x+2)+I_1'+I_2'=$$

$$=-\ln(x+2)+\ln\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3}\cdot arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\wp=$$

$$=\ln\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+2}+\sqrt{3}\,arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\wp$$

**4.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{2x^3-3x^2+2x}{(x^2+4)(x^2+1)}}$

***Solutie***:

*Descompunem funcția*:

$$\frac{2x^3-3x^2+2x}{(x^2+4)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{x^2+1},\ Aducem\ la\ acelasi\ numitor\ si\ obtinem:$$

$2x^3-3x^2+2x=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+4C)x+B+4D$. *Prin identificare rezultă sistemul*:

$$\begin{cases} A+C=2 \\ B+D=-3 \\ A+4C=2 \\ B+4D=0 \end{cases}$$

$$De\ \ aici\ \ obtinem\ \ solutiile: A=2,\ B=-4\ \ ,C=0,\ D=1$$

***După descompunerea funcției putem integrala capătă forma:***

$$\int f(x)\,dx=\int \frac{2\mathrm{x}-4}{x^2+4}\,dx+\int \frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\int \frac{2\mathrm{x}\ dx}{x^2+4}-4\int \frac{dx}{x^2+2^2}+\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$Prin\ \ schimabarea\ \ de\ \ variabila\ \ x^2+4=a \rightarrow 2\mathrm{x}\ dx=da\ \ \ obtinem:$$

$$\int \frac{2\mathrm{x}}{x^2+4}\,dx=\int \frac{da}{a}=\ln(a)+\wp=\ln(x^2+4)+\wp$$

$$Finalizare:$$

$$\int f(x)\,dx=\ln(x^2+4)+4\cdot\frac{1}{2}\,arctg\,\frac{x}{2}+arctg\,x+\wp=$$

$$=\ln(x^2+4)+2\cdot arctg\,\frac{x}{2}+arctg\,x+\wp$$

*Exerciții propuse:*

***Să se calculeze primitivele următoarelor funcții:***

1. $f(x)=\frac{1}{3x+5}$
2. $f(x)=\frac{1-3x}{2x+3}$
3. $f(x)=\frac{1}{(x+2)(x+3)}$
4. $f(x)=\frac{1}{x(x+3)}$
5. $f(x)=\frac{1}{3x^2+5}$
6. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$
7. $f(x)=\frac{1}{3x^2+x+1}$
8. $f(x)=\frac{1}{2x^2-x-3}$
9. $f(x)=\frac{4x-3}{2x^2-3x+1}$
10. $f(x)=\frac{5x-2}{x^2+4}$
11. $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+10}$
12. $f(x)=\frac{x^3}{1+x^8}$
13. $f(x)=\frac{x}{(x-1)^{10}}$
14. $f(x)=\frac{x-4}{(x-2)\cdot(x-5)}$
15. $f(x)=\frac{x^2+5x+7}{x+3}$
16. $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$
17. $f(x)=\frac{5}{x^2+x+1}$
18. $f(x)=\frac{2x}{x^2-6x+5}$
19. $f(x)=\frac{5}{x(x+1)(x+3)}$
20. $f(x)=\frac{x^2+x+2}{(x+1)(x^2+1)}$
21. $f(x)=\frac{x^3-2x^2+4}{x^2(x-2)^2}$
22. $f(x)=\frac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)}$

## *Integarea funcțiilor trigonometrice*

**În caculul integralelor trigonometrice putem folosi fie formula integrării prin părți, fie metoda substituției. În utimul caz, putem apela la substituțiile:**

**1.Dacă funcția este impară în sin x,**
**R(-sin x, cos x)= -R(sin x, cos x), atunci cos x=t.**

**2.Dacă funcția cos x,**
**R(sin x,-cos x)= -R(sin x, cos x), atunci sin x=t.**

**3.Dacă funcția este pară în raport cu ambele variabile**
**R(-sin x, -cos x), atunci tg x=t.**

**4.Dacă o funcție nu se încadrează în cazurile 1,2,3 atunci se utilizează substituțiile universale:**

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad unde\ t=tg\frac{x}{2}$$

**5.Mai putem folosi şi alte formule trigonometrice:**

$$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x,\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

**Să se calculeze primitivele următoarelor funcții:**

**1.** $f(x)=\cos^3 x\cdot\sin x$

***Solutie*:**

*Notăm* $\cos x=t\rightarrow -\sin x\,dx=dt\rightarrow \int\cos^3 x\cdot\sin x\,dx=-\int t^3\,dt=-\frac{t^4}{4}+\wp=-\frac{\cos^4 x}{4}+\wp$

**2.** $f(x)=\cos^3 x\cdot\sin 2x$

***Solutie*:**

*Notam* $\cos x=t\rightarrow -\sin x\,dx=dt$

$$\int\cos^3 x\cdot\sin 2x\,dx=\int\cos^3 x\cdot 2\sin x\cos x\,dx=2\int\cos^4 x\sin x\,dx='$$

$$=-2\int t^4\,dt=-2\cdot\frac{t^5}{5}+\wp=-\frac{2}{5}\cos^5 x+\wp$$

**3.** $f(x)=\sin^3 x\cdot\cos^2 x$

***Solutie*:**

$$\int\sin^3 x\cdot\cos^2 x\,dx=\int\cos^2 x\cdot\sin^2 x\cdot\sin x\,dx=\int\cos^2 x\cdot(1-\cos^2 x)\cdot\sin x\,dx$$

*Notam* $\cos x=t\rightarrow -\sin x\,dx=dt$

$$\int\cos^2 x\cdot(1-\cos^2 x)\cdot\sin x\,dx=-\int t^2(1-t^2)dt=-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+\wp=$$

$$=\int\cos^2 x\cdot(1-\cos^2 x)\cdot\sin x\,dx=\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+\wp$$

**4.** $\boldsymbol{f(x)=e^x+\frac{2}{x}+3^x+\cos x,\ x>0}$

***Solutie***:

$$\int f(x)\,dx=\int \left(e^x+\frac{2}{x}+3^x+\cos x\right)dx=\int e^x\,dx+\int 3^x\,dx+2\int\frac{dx}{x}+\int \cos x\,dx$$

*Imi aduc aminte ca*:

$$(e^x)'=e^x,\ (\ln x)'=\frac{1}{x},\ (3^x)'=3^x\cdot\ln 3,\ (\sin x)'=\cos x$$

*Din aceasta amintire am ajuns la concluzia*:

$$\int f(x)\,dx=e^x+\frac{3^x}{\ln 3}+2\cdot\ln x+\sin x+\wp$$

**5.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{\sin^3 x}{\cos x}}$

***Solutie***:

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{\sin^3 x}{\cos x}=\int\frac{(1-\cos^2 x)\cdot\sin x}{\cos x}\,dx$$

*Notam* $\cos x=t\to -\sin x\,dx=dt$

$$\int\frac{(1-\cos^2 x)\cdot\sin x}{\cos x}\,dx=-\int\frac{1-t^2}{t}\,dt=$$

$$=\frac{t^2}{2}-\ln t+\wp=\frac{\cos^2 x}{2}-\ln(\cos x)+\wp$$

**6.** $\boldsymbol{f(x)=\sin^3 x}$

***Solutie***:

$$\int\sin^3 x\,dx=\int\sin x\cdot\sin^2 x\,dx=\int\sin x(1-\cos^2 x)\,dx=$$

$$=-\int(1-t^2)\,dt=-t+\frac{t^3}{3}+\wp=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+\wp$$

**7.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}$

***Solutie***:

*Notam* $\arcsin x=t$ *pentru ca* $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\to\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=dt$

$$\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+\wp=\frac{(\arcsin x)^2}{2}+\wp$$

**8.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}}$

***Solutie***:

*Notam* $\sin x=t\to\cos x\,dx=dt$

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx=\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=arctg(t)+\wp=arctg\ sinx+\wp$$

**9.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{5-3\cos x},\ x\in(0,\frac{\pi}{2})}$

***Solutie***:

*Notam* $t=tg\frac{x}{2}$. *Cum* $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, *integrala asociata este*:

$$I'=\int\frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{5-\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\cdot 2\,arctg(2\mathrm{t})+\wp=\frac{1}{2}arctg(2\mathrm{t})+\wp$$

*Finalizare*:

$$\int f(x)\,dx=\frac{1}{2}arctg(2\,tg\frac{x}{2})+\wp$$

**10.** $\boldsymbol{f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x+\cos^2 x},\ x\in(0,\frac{\pi}{2})}$

***Solutie***:

*Notam* $\cos x=t\rightarrow-\sin x\,dx=dt$

$$\int f(x)\,dx=-\int\frac{dt}{1+t+t^2}$$

*dar*, $\frac{1}{t^2+t+1}=\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$$\int\frac{dt}{1+t+t^2}=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

*Finalizare*:

$$\int f(x)\,dx=-\frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2\cos x+1}{\sqrt{3}}+\wp$$

**11.** $\boldsymbol{f(x)=tg^4 x,\ x\in(0,\frac{\pi}{2})}$

***Solutie***:

*Notam* $tg\,x=t$ *si obtinem o integrala asociata de forma*:

$$I'=\int t^2\frac{t^2}{1+t^2}\,dt=\int\frac{(t^2+1)(t^2-1)+1}{t^2+1}\,dt=\int\left(t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=\frac{t^3}{3}-t+arctg\,t+\wp$$

*Finalizare*:

$$\int f(x)\,dx=\frac{tg^3}{3}-tg\,x+x+\wp$$

**12.** $\boldsymbol{f(x)=\cos^2 ax,\ x\in\mathbb{R}}$

***Solutie***:

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{1}{2}(1+\cos 2\mathrm{ax})\,dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4\mathrm{a}}\sin 2\mathrm{ax}+\wp$$

### *Exerciții propuse:*

***Să se calculeze primitivele următoarelor funcții:***

1. $f(x)=\sin^3 x\cdot\cos x$
2. $f(x)=\sin^3 x\cdot\cos 2x$
3. $f(x)=\cos^3 x\cdot\sin^2 x$
4. $f(x)=\dfrac{\cos^3 x}{\sin x}$
5. $f(x)=\cos^3 x$
6. $f(x)=e^x\cdot\cos x$
7. $f(x)=\sin^2 ax$
8. $f(x)=(tg\,x+tg^3 x)$
9. $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$
10. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}$
11. $f(x)=\dfrac{x}{1-\cos x}$
12. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x-4}$
13. $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-(\cos^2 x)^2}}$
14. $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$
15. $f(x)=\sin^{10} x\cdot\cos^3 x$
16. $f(x)=\dfrac{1}{5-3\sin x},\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$
17. $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x+\sin x+1}$
18. $f(x)=\dfrac{1}{\cos x+\sin x+3},\ x\in(0,2\pi)$
19. $f(x)=ctg^4 x,\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$
20. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x},\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$
21. $f(x)=\sin^5 x$
22. $f(x)=\dfrac{\sqrt{\sin x}}{\cos x},\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$
23. $f(x)=tg^5 x,\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$
24. $f(x)=\dfrac{2-\sin x}{2+\cos x},\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$

# *Tabel Derivate*

1) $a' = 0$ , $\forall\, a \in R$
2) $x' = 0$
3) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
5) $\sqrt{x}\,' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6) $\sqrt[n]{x}\,' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
7) $(a^x)' = a^x \ln a$
8) $(e^x)' = e^x$
9) $\ln x' = \frac{1}{x}$
10) $\lg_a x' = \frac{1}{x} \lg_a e$
11) $\sin x' = \cos x$
12) **$\cos x' = -\sin x$**
13) $\mathrm{tg}\, x' = \frac{1}{\cos^2 x}$
14) $\mathrm{ctg}\, x' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
15) $[f(x)+g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
16) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
17) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
18) $\sqrt{f(x)}\,' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

Omul învață cu un randament de:

- ✔ 10% atunci când citeşte cu privirea
- ✔ 20% atunci când citeşte cu voce tare
- ✔ 40% atunci când citeşte cu voce tare şi scrie
- ✔ 60% atunci când discută cu altcineva
- ✔ 90% atunci când învață pe altul

Reguli pentru o învățare rapidă

1. *Fii atent în clasă*. Cu cât înțelegi mai multe în clasă, cu atât se va reduce timpul de învățat acasă.
2. *Pune întrebări profesorului.* Nu lăsa lucruri nelămurite. Acasă e mult mai greu de lămurit decât în prezența profesorului.
3. Drumul de la şcoală până acasă să fie cel *mai scurt şi mai rapid posibil.*
4. Înainte de a te apuca de învățat *fă-ți un plan de învățare,* începe să înveți cu obiectele cele mai grele şi sfârşeşte cu cele mai uşoare.
5. După ce ți-ai făcut planul de lecții poți *să spui o rugăciune* ca Dumnezeu să te ajute la lecții.
6. Odată ce începi să înveți, opreşte televizorul, casetofonul şi orice altă sursă de distragere a atenției. Cu cât eşti mai atent, cu atât scurtezi *timpul acordat lecțiilor.*
7. *Nu învăța în continuu* mai mult de două-trei ore; după acest timp este bine-venită o pauză pentru odihna creierului tău.
8. *Nu lăsa un exercițiu neterminat* până nu te-ai asigurat că ai făcut tot posibilul pentru al rezolva.
9. Nu spune niciodată *„nu ştiu”* la prima vedere a temei.
10. Fă tot posibilul *să nu înveți noaptea.* Dacă ziua îți vine să dormi când înveți, o spălare cu apă rece pe ochi îndepărtează somnul.
11. Obişnuieşte-te să te trezeşti în fiecare zi la *ora 7* , chiar sâmbăta sau duminica.
12. Înainte de a învăța este foarte important să fie *ordine* la biroul la care lucrezi.
13. Roagă-l pe unul din *părinți* să te asculte şi să-ți verifice lecțiile.
14. Învață nu doar din caiet , ci şi din *manual*. Ceea ce-ți dă profesorul în caiet este doar rezumatul lecției.
15. Când citeşti, o poți face *cu voce tare*. Cu cât stimulezi mai mulți analizatori, cu atât vei reține mai uşor.
16. Nu lăsa niciodată *învățatul* pe ultimul moment.
17. *Împarte lecția* în mai multe părți. La sfârşitul unei părți fă o recapitulare a acesteia.
18. Nu lăsa nici o zi de şcoală şi nici o sâmbătă fără să înveți. Duminica este ziua de *odihnă.*
19. Este bine ca atunci când *recapitulezi* să o faci cu cu creionul în mână. Scriind lecția se va întipări mai mult mai bine în minte.
20. Discută probleme cu colegii de şcoală. Astfel, te vei ajuta pe tine, dar şi pe ei. *Explicând* altuia ca tine vei înțelege mult mai bine ce ai învățat.
21. *Nu mânca prea mult* înainte de a învăța. Cu burta plină se învață mult mai greu.
22. Orice problemă ai, nu ezita s-o discuți cu părinții. *Experiența* lor este oricum mai bogată de cât a ta.
23. Nu te culca pe *laurii succesului.* Dacă ai o nota mai bună la un obiect, nu însemană că nu trebuie să mai înveți.
24. Redu la minimum timpul în care nu faci *nimic folositor.*
25. Gândeşte-te tot timpul cât înveți că *înveți pentru tine* şi nu pentru părinți sau profesori. Orice înveți la şcoală este folositor vreodată în viață.
26. Înlătură din gândirea ta *copiatul*. Cel păgubit în primul rând eşti tu.