

NICOLAE COMAN

Analiză matematică prin exerciții și probleme

Cuprins

O. PRELIMINARII

[0.1. Mulțimi, relații, funcții: 0.1.1 * 0.1.2 * 0.1.3 * 0.1.4 * 0.1.5 * 0.1.6 * 0.1.7 * 0.1.8 * 0.1.9 * 0.1.10 * 0.1.11](#)

[0.2. Mulțimi de numere: 0.2.1 · 0.2.2 · 0.2.3 · 0.2.4 · 0.2.5 · 0.2.6 · 0.2.7 · 0.2.8 · 0.2.9](#)

[0.3. Topologie pe \$\mathbb{R}\$](#)

[0.4 Inegalități](#)

[0.5. Șiruri](#)

1. CALCUL DIFERENTIAL

2. CALCUL INTEGRAL

3. ANEXE

[Notatii utilizate](#)

[Simboluri](#)

[Resurse](#)

[Index](#)

[Note](#)

<u>Cuprins</u>			
<u>Preliminarii</u>	<u>Calcul diferencial</u>	<u>Calcul integral</u>	<u>Anexe</u>
Mulțimi, relații, funcții Mulțimi de numere Topologie pe $\mathbb{R}$ Inegalități Șiruri	Limită a unei funcții Continuitate Derivată		Notatii utilizate Simboluri Resurse Index Note

Preliminarii

Cuprins			
Preliminarii	Calcul diferențial	Calcul integral	Anexe
Mulțimi, relații, funcții * Mulțimi de numere * Topologie pe $\mathbb{R}$ * Inegalități * Șiruri			

Mulțimi, relații, funcții

0.1.1.

Se numește *propoziție* un enunț despre care se poate spune fie că este adevărat, fie fals, însă nu ambele variante simultan. Se notează propozițiile cu litere mici: $p, q, r, \dots$. Unei propoziții p i se atribuie un simbol $|p|$, numit *valoare de adevăr*. Dacă p este falsă, se scrie $|p| = 0$, iar dacă este adevărată, se notează $|p| = 1$.

Cu ajutorul *operatorilor logici*: $\neg$ (negație), $\vee$ (disjuncția), $\wedge$ (conjuncția), $\rightarrow$ (implicația), $\leftrightarrow$ (echivalența) se pot forma *propoziții compuse*. Astfel, dacă p, q sunt două propoziții fixate, definim propozițiile: $\neg p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ prin valorile de adevăr ale acestora conform tabelului:

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

O propoziție compusă se numește *tautologie* dacă este adevărată oricare ar fi valoarea de adevăr a propozițiilor componente.

Să se demonstreze că dacă p și q sunt două propoziții oarecare, atunci propozițiile compuse de mai jos sunt tautologii:

1° $p \vee p \leftrightarrow p$; $p \wedge p \leftrightarrow p$ (*principiul idempotenței*);

2° $p \vee (\neg p)$ (*principiul terțului exclus*);

3° $\neg \neg p \leftrightarrow p$ (*principiul dublei negații*);

4° $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
 $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ } (*principiul dualității sau relațiile lui DE MORGAN*).

Demonstrația se realizează cu ajutorul tabelului, verificându-se fiecare combinație de valori de adevăr.

0.1.2.

Noțiunea de *mulțime* este o noțiune primară, obținută în urma unui proces de abstractizare. Pentru început se poate spune că o mulțime este o colecție de obiecte care au o proprietate comună.

Mulțimea care nu are niciun element se numește *mulțimea vidă* și se notează $\emptyset$.

Dacă elementul a aparține mulțimii A , se va scrie $a \in A$; în caz contrar, $a \notin A$.

Se vor defini următoarele relații între mulțimi (A și B sunt două mulțimi):

- *incluziune (nestrictă)*: $A \subseteq B \Leftrightarrow ((\forall x) x \in A \Rightarrow x \in B)$ (A este inclusă în B);

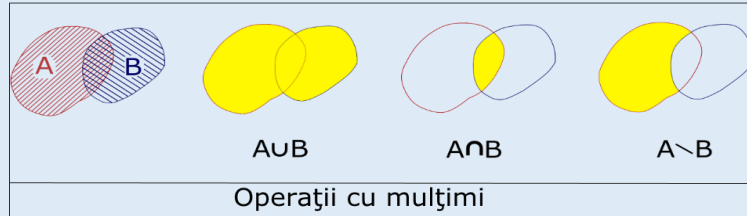
- *egalitate*: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ (A este egală cu B);

- *incluziune strictă*: $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$ (A este inclusă strict în B).

Dacă A este o mulțime, se notează cu $\mathcal{P}(A)$ mulțimea tuturor submulțimilor lui A sau *mulțimea părților* lui A . Avem: $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$ și $M \subset A \Leftrightarrow M \in \mathcal{P}(A)$.

Se definesc următoarele operații cu mulțimi:

- *reuniunea*: $A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$;
- *intersecția*: $A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$;
- *diferența*: $A \setminus B = \{x; x \in B \wedge x \notin A\}$.



Să se demonstreze că, pentru oricare două mulțimi A și B , există relațiile:

$$1^{\circ} A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = A;$$

$$2^{\circ} A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B;$$

$$3^{\circ} A = (A \setminus B) \cup (A \cap B);$$

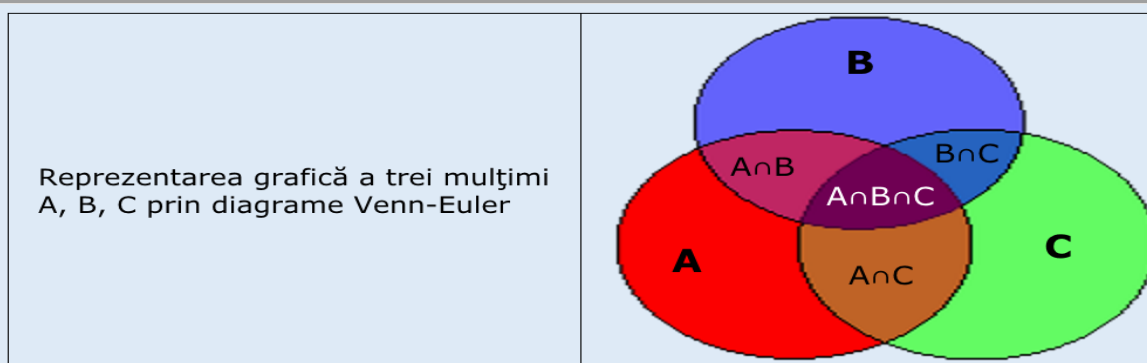
$$4^{\circ} A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A).$$

1^o Evident.

2^o ($\Rightarrow$) $(\forall)x \in A$ avem $x \in A \cup B = A \cap B$, deci $x \in B$ și deci $A \subseteq B$. Analog se arată că $B \subseteq A$, deci $A = B$.

3^o Incluziunea " $\supseteq$ " este evidentă. Reciproc, fie $x \in A$ fixat; dacă $x \notin A \setminus B$, rezultă că $x \in B$, deci $x \in A \cap B$ și deci $A \subseteq (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

$$4^{\circ} A \cup B = (\text{conform } 3^{\circ}) = ((A \setminus B) \cup (A \cap B)) \cup ((B \setminus A) \cup (A \cap B)) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B).$$



■ 0.1.3.

Fie mulțimile A, B . Dacă $A \subseteq B$, mulțimea $B \setminus A$ se numește *complementara* lui A față de B și se notează $\mathcal{C}_B A$ sau $\mathcal{C}A$ dacă nu există nicio posibilitate de confuzie.

Dacă A este fixată, se mai notează $\mathcal{C}_B A = \bar{B}$.

Să se demonstreze că dacă X, Y sunt două submulțimi ale lui A , atunci:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{C}(X \cup Y) &= \mathcal{C}X \cap \mathcal{C}Y \\ \mathcal{C}(X \cap Y) &= \mathcal{C}X \cup \mathcal{C}Y \end{aligned} \right\} \text{(relațiile lui DE MORGAN)}.$$

$$\text{Avem } x \in \mathcal{C}(X \cup Y) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin X \cup Y) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin X \wedge x \notin Y) \Leftrightarrow (x \in A \setminus X \wedge x \in A \setminus Y) \Leftrightarrow x \in \mathcal{C}X \cap \mathcal{C}Y.$$

În mod similar se demonstrează a doua afirmație.

■ 0.1.4. O mulțime de mulțimi $A_i, i \in I$ se numește *familie* de mulțimi "I-indexată" și se notează cu $(A_i)_{i \in I}$. Vom scrie:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} A_i &= \{x; (\exists)i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\} \text{ (reuniunea familiei } (A_i)_{i \in I}); \\ \bigcap_{i \in I} A_i &= \{x; x \in A_i (\forall)i \in I\} \text{ (intersecția familiei } (A_i)_{i \in I}). \end{aligned}$$

Să se demonstreze:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{C}(\bigcup_{i \in I} A_i) &= \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}A_i \\ \mathcal{C}(\bigcap_{i \in I} A_i) &= \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}A_i \end{aligned} \right\} \text{(relațiile lui DE MORGAN generalizate)}.$$

$$x \in \mathcal{C}(\bigcup_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow x \notin A_i (\forall)i \in I \Leftrightarrow x \in \mathcal{C}A_i (\forall)i \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}A_i.$$

A doua afirmație se demonstrează înlocuind A_i cu $\mathcal{C}A_i$.

■ 0.1.5. Se dau mulțimile X, Y . Se definește *produsul cartezian* al acestora mulțimea:

$$X \times Y = \{(x, y); x \in A \wedge y \in B\},$$

unde (x, y) este *pereche ordonată*, adică $(x, y) = (y, x) \Leftrightarrow x = y$.

Să se demonstreze că, dacă A, B, C sunt trei mulțimi, atunci:

$$1^{\circ} (A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B);$$

$2^{\circ} A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C); A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C);$
 $3^{\circ} (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C); (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C);$
 $4^{\circ} A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B.$

$1^{\circ} (x, y) \in (A \times B) \cap (B \times A) \Leftrightarrow ((x, y) \in (A \times B) \wedge (x, y) \in B \times A) \Leftrightarrow ((x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in B \wedge y \in A)) \Leftrightarrow$
 $((x \in A \wedge x \in B) \wedge (y \in A \wedge y \in B)) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap B) \times (A \cap B).$
 În mod similar se demonstrează și celelalte afirmații.

0.1.6. Se numește *relație binară* (relație) de la mulțimea X la mulțimea Y o submulțime $\mathcal{R}$ a produsului cartezian $X \times Y$.

Astfel, dacă $(x, y) \in \rho \subset X \times Y$, se va scrie $x \rho y$ și se spune că x este în relația ρ cu y .

O relație binară f de la mulțimea X la mulțimea Y se numește *funcție* (aplicație) *definită pe X cu valori în Y* , dacă:

1° f este *completă*: $D_f := \{x \in X; (\exists)y \in Y \text{ a.î. } (x, y) \in f\}$ coincide cu X ;

2° f este *univocă*: $(\forall)(x, y) \in f$ și $(x, y') \in f \Rightarrow y = y'$.

X se numește *domeniu de definiție* al funcției, iar Y *codomeniu*.

Se va nota $y = f(x)$ în loc de $(x, y) \in f$ și se va spune că $f(x)$ este *imaginea* lui x prin f sau *valoarea funcției f în x* .

O funcție f definită pe X cu valori în Y se notează astfel:

$$f: X \rightarrow Y; \quad X \xrightarrow{f} Y; \quad X \ni x \mapsto f(x) \in Y; \quad y = f(x), x \in X.$$

Dacă $A \subset X$ se definește *imaginea lui A prin f* mulțimea:

$$f(A) = \{y \in Y; (\exists)x \in A \text{ a.î. } f(x) = y\}.$$

Dacă $B \subset Y$ atunci se definește *preimaginea lui B sau imaginea reciprocă a lui B prin f* :

$$f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\}.$$

Fie $f: X \rightarrow Y$ o funcție. Atunci au loc relațiile:

$1^{\circ} f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B), \quad \forall A, B \subseteq X;$

$2^{\circ} \mathcal{C}_Y f(A) \subseteq f(\mathcal{C}_X A), \quad \forall A \subseteq X, \text{ dcă } f(X) = Y;$

$3^{\circ} f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B), \quad \forall A, B \subseteq Y;$

$4^{\circ} f^{-1}(\mathcal{C}_Y B) = \mathcal{C}_X f^{-1}(B), \quad \forall B \subseteq Y.$

$5^{\circ} f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i); f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i),$

unde $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de submulțimi din X , iar I o familie arbitrară de indici.

$6^{\circ} f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i); f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) \subset \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i),$

unde $(B_i)_{i \in I}$ este o familie de submulțimi din Y , iar I o familie arbitrară de indici.

$1^{\circ} y \in f(A) \setminus f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \wedge y \notin f(B) \Leftrightarrow \exists x \in A \text{ cu } f(x) = y \wedge y \neq f(b) \forall b \in B \Rightarrow \exists x \in A \setminus B \text{ cu } f(x) = y \Leftrightarrow y \in f(A \setminus B).$

2° Rezultă din 1° .

$3^{\circ} x \in f^{-1}(A \setminus B) \Leftrightarrow f(x) \in A \setminus B \Leftrightarrow f(x) \in A \wedge f(x) \notin B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \wedge x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B).$

4° Rezultă din 3° .

5° Avem: $y \in f(\bigcup_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow (\exists x \in \bigcup_{i \in I} A_i \text{ a.î. } y = f(x)) \Leftrightarrow (\exists i_0 \in I \wedge \exists x \in A_{i_0} \text{ a.î. } y = f(x)) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\exists y_0 \in I \text{ a.î. } y \in f(A_{i_0})) \Leftrightarrow y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i).$

$y \in f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \Leftrightarrow \left(\exists x \in \bigcap_{i \in I} A_i \text{ a.î. } y = f(x)\right) \Rightarrow (\exists x \in A, \forall i \in I \text{ a.î. } y = f(x))$

$\Rightarrow (y \in f(A_i), \forall i \in I) \Leftrightarrow y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i).$

6° Similar.

0.1.7. Fie X, Y două mulțimi și o aplicație $f: X \rightarrow Y$. Vom spune că f este:

- *injectivă*: dacă $\forall y \in Y$ există cel mult un $x \in X$ cu $f(x) = y$;
- *surjectivă*: dacă $\forall y \in Y$ există cel puțin un $x \in X$ cu $f(x) = y$;
- *bijectivă*: dacă $\forall y \in Y$ există exact un $x \in X$ cu $f(x) = y$.

Fie $f: X \rightarrow Y$ o aplicație. Atunci:

1° f este *injectivă* $\Leftrightarrow \forall A_1, A_2 \subseteq X$ cu $f(A_1) \subseteq f(A_2)$, rezultă $A_1 \subseteq A_2$;

2° f este *surjectivă* $\Leftrightarrow \forall B_1, B_2 \subseteq Y$ cu $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$, rezultă $B_1 \subseteq B_2$

1°

- $(\Rightarrow)$ Se consideră un element $x_0 \in A_1$ și va trebui să arătăm că, în condițiile din ipoteză, $x_0 \in A_2$.

Din $x_0 \in A_1$ rezultă $f(x_0) \in f(A_1)$, iar din $f(A_1) \subseteq f(A_2)$ rezultă $f(x_0) \in f(A_2)$ adică există un $x_1 \in A_2$ pentru care $f(x_1) = f(x_0)$. Din injectivitatea funcției rezultă că $x_1 = x_0$. Așadar, $x_0 \in A_2$.

- $(\Leftarrow)$ Reciproc, se presupune că pentru orice submulțimi $A_1, A_2 \subseteq X$ cu proprietatea $f(A_1) \subseteq f(A_2)$, există relația

$A_1 \subseteq A_2$ și să demonstrăm că f este injectivă. Fie $x_1, x_2 \in X$ cu $f(x_1) = f(x_2)$. Se consideră $A_1 = \{x_1\}$ și $A_2 = \{x_2\}$. Avem

$f(A_1) = f(A_2)$ și deci, conform ipotezei, $A_1 = A_2$ deci $x_1 = x_2$.

2°

- $(\Rightarrow)$ Se presupune că f este surjectivă și se consideră două submulțimi $B_1, B_2 \subseteq Y$ cu $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

Fie un element $y_0 \in B_1$; deoarece f este surjectivă, există un $x_0 \in X$ a.î. $f(x_0) = y_0$ deci $x_0 \in f^{-1}(B_1)$ și din $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$ rezultă $x_0 \in f^{-1}(B_2)$ deci $f(x_0) \in B_2$. Așadar $y_0 \in B_2$.

- $(\Leftarrow)$ Se presupune valabil faptul că pentru oricare două submulțimi $B_1, B_2 \subseteq Y$ cu proprietatea $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

avem $B_1 \subseteq B_2$ și să considerăm un element arbitrar $y_0 \in Y$ și să demonstrăm că există un $x_0 \in X$ a.î. $y_0 = f(x_0)$.

Într-adevăr dacă $y_0 \in Y$ și dacă presupunem (prin reducere la absurd) că nu există niciun element $x_0 \in X$ pentru care $y_0 = f(x_0)$

ar rezulta că $f^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset$. Atunci am avea pentru orice $y_1 \in f(X)$ relația $f^{-1}(\{y_0\}) \subset f^{-1}(\{y_1\})$. Deci, conform ipotezei, $\{y_0\} \subset \{y_1\}$, ceea ce înseamnă că $y = y_1$. Rezultă că $y \in f(X)$, ceea ce contrazice presupunerea făcută $f^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset$.

■ **0.1.8.** Pentru oricare două funcții $f: X \rightarrow Y$ și $g: Y \rightarrow Z$ se definește *compunerea* acestora ca fiind funcția $g \circ f: X \rightarrow Z$,

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Observații:

1° Pentru a putea compune două funcții, este necesar ca domeniul de definiție al celei de-a doua să fie egal cu codomeniul primeia.

2° Compunerea funcțiilor nu este comutativă, adică oricare ar fi funcțiile $f, g: X \rightarrow X$, nu este obligatoriu ca $f \circ g = g \circ f$.

O aplicație $f: A \rightarrow B$ se numește *inversabilă* dacă există o aplicație notată $f^{-1}: B \rightarrow A$ și numită *inversa* lui f și care satisface condițiile: $(f^{-1} \circ f)(x) = x, \forall x \in A$ și $(f \circ f^{-1})(y) = y, \forall y \in B$.

O funcție $f: A \rightarrow A$ este *inversabilă* dacă și numai dacă este bijectivă.

1° $(\Rightarrow)$ Considerăm funcția inversabilă $f: A \rightarrow A$ și să demonstrăm că este bijectivă. Deci există o aplicație $f^{-1}: A \rightarrow A$ cu proprietatea: $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x, \forall x, y \in A$.

Dacă există $x_1, x_2 \in A$ a.î. $f(x_1) = f(x_2)$, atunci, deoarece f^{-1} este funcție, $f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$ (v. proprietatea de *completitudine* de la definiția funcției), de unde rezultă că $x_1 = x_2$. Astfel s-a demonstrat injectivitatea funcției f .

Fie acum un $y_0 \in A$. Folosind proprietatea de *univocitate* de la definiția funcției, rezultă că putem nota $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Astfel s-a demonstrat că există un x_0 pentru care $f(x_0) = y_0$, așadar f este și surjectivă.

2° $(\Leftarrow)$ Considerăm funcție bijectivă $f: A \rightarrow A$ și să demonstrăm că este inversabilă. Vom considera relația f^{-1} definită pe mulțimea A prin relația: $x f^{-1} y \Leftrightarrow f(x) = y, \forall x, y \in A$ și se va demonstra că f^{-1} satisface cele două condiții din definiția funcției.

Fie un $y \in A$. Deoarece f este surjectivă, există un $x \in A$ pentru care $f(x) = y$, deci există $f^{-1}(y)$ și acesta este chiar x .

Presupunem acum că există $x_1, x_2, y \in A$ cu proprietățile: $y f^{-1} x_1$ și $y f^{-1} x_2$. Rezultă $f(x_1) = y = f(x_2)$ și, cum f este injectivă, rezultă $x_1 = x_2$ și astfel s-a demonstrat și a doua condiție din definiția funcției, deci f^{-1} este funcție, fiind chiar inversa lui f .

■ **0.1.9.** O relație definită pe mulțimea A și anume $\mathcal{R} \subset A \times A$ se numește *relație de echivalență* pe mulțimea A dacă este:

- *reflexivă*: $(a, a) \in \mathcal{R}, \forall a \in A$;
- *simetrică*: $(a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R}$;
- *tranzitivă*: $(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$.

Să se demonstreze că egalitatea a două mulțimi este o relație de echivalență.

■ **0.1.10.** Se consideră relația de echivalență $\mathcal{R} \subset A \times A$, unde A este o mulțime. Oricărui element $a \in A$ i se asociază mulțimea:

$$\mathcal{R}_a = \{b \in A ; a \mathcal{R} b\},$$

numită *clasa de echivalență* a elementului a .

Să se demonstreze că mulțimea claselor de echivalență ale unei relații de echivalență $\mathcal{R} \subset A \times A$, mulțime notată $A / \mathcal{R}$, formează o *partiție* a mulțimii A , numită *mulțimea cât (factor)* a lui A prin relația $\mathcal{R}$, deci posedă proprietățile:

- 1^o Elementele acesteia sunt mulțimi nevide;
- 2^o Elementele acesteia sunt mulțimi disjuncte între ele două câte două;
- 3^o Reuniunea acestor mulțimi este chiar mulțimea A .

Avem $A / \mathcal{R} = \{\mathcal{R}_a ; a \in A\}$ și se remarcă faptul că pentru două elemente distincte $a, b \in A$, clasele de echivalență $\mathcal{R}_a, \mathcal{R}_b$ sunt disjuncte sau coincid. De asemenea, datorită proprietății de reflexivitate, orice element $a \in A$ aparține măcar unei clase de echivalență ($a \in \mathcal{R}_a$), deci $\bigcup_{a \in A} \mathcal{R}_a = A$.

■ **0.1.11.** O relație definită pe mulțimea A și anume $\mathcal{R} \subset A \times A$ se numește *relație de ordine* (parțială) pe mulțimea A dacă este:

- *reflexivă*: $(a, a) \in \mathcal{R}, \forall a \in A$;
- *antisimetrică*: $(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{R} \Rightarrow a = b$;
- *tranzitivă*: $(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$.

În acest caz, se spune că mulțimea A este *ordonată*.

Incluziunea nestrictă ($\subseteq$) a două mulțimi este o relație de ordine.

Cuprins			
Preliminarii	Calcul diferențial	Calcul integral	Anexe
Mulțimi, relații, funcții * Mulțimi de numere * Topologie pe $\mathbb{R}$ * Inegalități * Șiruri			

Mulțimi de numere

■ **0.2.1.** Se notează cu $\mathcal{U}$ (*mulțimea-univers*) mulțimea tuturor mulțimilor ce se vor studia ulterior. Se spune că două mulțimi $A, B \in \mathcal{U}$ sunt *echipotente* și se notează $A \sim B$ dacă există o funcție bijectivă $f: A \rightarrow B$.

Relația de echipotență a două mulțimi este o relație de echivalență pe $\mathcal{U}$.

Demonstrația este simplă.

Clasele de echivalență se vor numi *numere cardinale*. Astfel, clasa de echipotență a mulțimii $A \in \mathcal{U}$ se va numi *cardinalul lui A* și se va nota $\bar{A}$ sau *card A*.

■ **0.2.2.** Se definește *mulțimea asociată* unei mulțimi $A \in \mathcal{U}$ ca fiind mulțimea notată: $\tilde{A} := \{(a, A); a \in A\}$.

Dacă $A, B \in \mathcal{U}$ și $A \sim B$, atunci $\tilde{A} \sim \tilde{B}$.

Într-adevăr, dacă $f: A \rightarrow B$ este o bijecție, atunci aplicația $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$, definită prin $\tilde{f}(a, A) = (f(a), B)$ este o bijecție.

■ **0.2.3.** Se definește *reuniunea disjunctă* a două mulțimi $A, B \in \mathcal{U}$ mulțimea notată: $A \vee B = \tilde{A} \cup \tilde{B}$.

Dacă $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{U}$ cu $A_1 \sim A_2$ și $B_1 \sim B_2$, atunci: $A_1 \vee B_1 \sim A_2 \vee B_2$.

Fie $A_1 \neq B_1$, deci $\tilde{A}_1 \cap \tilde{B}_1 = \emptyset$. Bijecțiile $\tilde{f}: \tilde{A}_1 \rightarrow \tilde{A}_2$, $\tilde{g}: \tilde{B}_1 \rightarrow \tilde{B}_2$ determină bijecția:

$$F: \tilde{A}_1 \cup \tilde{B}_1 \rightarrow \tilde{A}_2 \cup \tilde{B}_2 \quad \text{prin } F(a, A_1) = \tilde{f}(a, A_1) \quad \text{și} \quad F(b, B_1) = \tilde{g}(b, B_1).$$

(S-a presupus și $A_2 \neq B_2$.)

■ **0.2.4.** Dându-se o mulțime $A \in \mathcal{U}$, o aplicație $f: A \times A \rightarrow A$ se numește *lege de compoziție internă* sau *operație*.

Dacă operația este notată printr-un simbol $*$, atunci se poate nota: $f((a, b)) := a * b, \forall a, b \in A$.

Dacă $*$: $A \times A \rightarrow A$ este o lege de compoziție pe mulțimea A , spunem că o submulțime $B \subseteq A$ este *parte stabilă* în raport cu legea de compoziție, dacă $\forall x, y \in B \Rightarrow x * y \in B$.

Pe mulțimea numerelor cardinale se poate defini o operație aditivă :

Fie $a = \bar{A}, b = \bar{B}$.

Se numește *sumă a numerelor cardinale* a și b numărul cardinal, notat $a + b$, al mulțimii $A \vee B$.

Oricare ar fi numerele cardinale a, b, c au loc proprietățile:

1^o $a + (b + c) = (a + b) + c$ (*asociativitatea adunării*);

2^o $a + b = b + a$ (*comutativitatea adunării*).

Se aplică exercițiul precedent.

■ **0.2.5.** Fie $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{U}$, astfel încât: $A_1 \sim A_2$ și $B_1 \sim B_2$. Atunci: $A_1 \times A_2 \sim B_1 \times B_2$.

Dacă $f: A_1 \rightarrow A_2$ și $g: B_1 \rightarrow B_2$ sunt două funcții bijective și $f: B_1 \rightarrow A_1$, atunci:

$$f \times g: A_1 \times B_1 \rightarrow A_2 \times B_2,$$

definită prin:

$$(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$$

este o bijecție.

■ **0.2.6.** Se numește *produs al numerelor cardinale* a și b numărul cardinal, notat $a \cdot b$ sau ab , al mulțimii $A \times B$.

Dacă a, b, c sunt trei numere cardinale, atunci:

- 1° $a(b + c) = ab + ac$ (distributivitatea produsului față de adunare);
 2° $a(bc) = (ab)c$ (asociativitatea produsului);
 3° $ab = ba$ (comutativitatea produsului).

Se aplică exercițiul precedent.

■ **0.2.7.** Dacă a, b sunt două numere cardinale, atunci prin a ridicat la puterea b se înțelege numărul cardinal a^b al mulțimii aplicațiilor de la B la A , $\{f: B \rightarrow A\}$.

Dacă $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{U}$ și $A_1 \sim A_2$ și $B_1 \sim B_2$, atunci:

$$\{f: B_1 \rightarrow A_1\} \sim \{g: B_2 \rightarrow A_2\}.$$

Să se deducă de aici că dacă a, b, c sunt trei numere cardinale, atunci:

- 1° $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$;
 2° $a^c \cdot b^c = (ab)^c$;
 3° $(a^b)^c = a^{bc}$.

Fie $h_1: A_1 \rightarrow A_2$, $h_2: B_1 \rightarrow B_2$ două bijecții și $f: B_1 \rightarrow A_1$ o aplicație oarecare. Atunci $F(f) = h_1 \circ f \circ h_2^{-1} \forall f$ este o aplicație bijectivă de la $\{f: B_1 \rightarrow A_1\}$ la $\{g: B_2 \rightarrow A_2\}$.

■ **0.2.8.** Se pune că numărul cardinal $a = \bar{\bar{A}}$ este mai mic sau egal cu numărul cardinal $b = \bar{\bar{B}}$ și se scrie $a \leq b$ dacă există o submulțime $B' \subseteq B$ astfel încât $A \sim B'$. (De asemenea, se va scrie $a < b$ dacă $a \leq b$ și $a \neq b$.) Astfel s-a definit o relație binară $\leq$ pe mulțimea $\mathcal{U}$ | $\sim$ a cardinalilor universului $\mathcal{U}$.

Dacă a, b, c sunt numere cardinale, atunci:

- 1° $a \leq a$;
 2° $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

1° Este evident că $A \sim A$.

2° Din $A \sim B'$, $B' \subset B$, $B \sim C'$, $C' \subset C$ rezultă $A \sim C''$ și $C'' \subset C$.

■ **0.2.9.** (Teorema lui [FELIX BERSTEIN](#)). Dacă $a = \bar{\bar{A}}$, $b = \bar{\bar{B}}$ și se verifică simultan relațiile $a \leq b$ și $b \leq a$, atunci $a = b$.

Prin ipoteză, există aplicațiile bijective $f: A \rightarrow B'$, $B' \subset B$, $g: B \rightarrow A'$, $A' \subset A$.

Definim funcția: $\varphi: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ prin:

$$\varphi(E) = A \cap \overline{g(B \cap \overline{f(E)})}. \quad (1)$$

Se vede că φ are proprietatea de "monotonie":

$$E \subset F \Rightarrow \varphi(E) \subset \varphi(F). \quad (2)$$

Se consideră mulțimea $\mathcal{D} = \{E : E \in \mathcal{P}(A) \wedge E \subset \varphi(E)\}$. Rezultă $\emptyset \in \mathcal{D}$. Fie apoi $D = \bigcup \mathcal{D}$. Cum $E \subset D$, pentru fiecare $E \in \mathcal{D}$, (2) implică $E \subset \varphi(E) \subset \varphi(D)$, $\forall E \in \mathcal{D}$. Deci $D \subset \varphi(D)$.

Se aplică din nou proprietatea (2) funcției φ și se obține $\varphi(D) \subset \varphi(\varphi(D))$. Rezultă $\varphi(D) \in \mathcal{D}$.

Este valabilă și incluziunea inversă $D = \bigcup \mathcal{D} \supset \varphi(D)$. Deci $D = \varphi(D)$. Se aplică (1) și rezultă:

$$D = A \cap \overline{g(B \cap \overline{f(D)})}.$$

Atunci $A \cap \bar{D} = g(B \cap \overline{f(D)})$. Urmează că funcția h definită prin:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pentru } x \in D \\ g^{-1}(x) & \text{pentru } x \in A \setminus D \end{cases}$$

realizează o bijecție a lui A cu B .

■ **0.2.10.**

Pe mulțimea numerelor cardinale, $\leq$ este o relație de ordine.

Se aplică cele două exerciții anterioare.

■ **0.2.11.** Fie $(X, \leq)$ o mulțime ordonată și $A \subseteq X$ o submulțime a sa. Un minorant (respectiv majorant) al mulțimii A și care aparține mulțimii A se numește *prim element*, *cel mai mic element* sau *minim* (respectiv *ultim element*, *cel mai mare element* sau *maxim*) și se notează cu $\min A$ (respectiv $\max A$).

Spunem că $(X, \leq)$ este o mulțime *total ordonată* sau *lanț* (în care caz vom spune că $\leq$ este o *relație de ordine totală*) dacă pentru orice $a, b \in X$ avem $a \leq b$ sau $b \leq a$ (proprietatea de *trihotomie*).

Dacă $(X, \leq)$ este o mulțime total ordonată, se spune că aceasta este *bine ordonată* dacă pentru orice submulțime nevidă $A \subseteq X$ posedă un prim element adică există un element $a \in A$ cu proprietatea $a \leq x, \forall x \in A$.

Orice submulțime a unei mulțimi bine ordonate are un prim element și acesta este unic.

■ **0.2.12.** (Teorema lui **CANTOR**) Fie A o mulțime arbitrară. Atunci $\text{card } A < \text{card } \mathcal{P}(A)$.

Dacă $A = \emptyset$, avem $\text{card } A = 0 < 1 = \text{card } \mathcal{P}(A)$.

Presupunem acum că $A \neq \emptyset$. Deoarece aplicația $A \ni x \mapsto \{x\} \in \mathcal{P}(A)$ este injectivă, avem $\text{card } A \leq \text{card } \mathcal{P}(A)$.

Dacă am avea $\text{card } A = \text{card } \mathcal{P}(A)$, atunci $\exists f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ bijectivă și notăm $f(x)$ prin A_x ($x \in A$). Se consideră mulțimea:

$$M := \{x \in A : x \notin A_x\}.$$

Cum $M \in \mathcal{P}(A)$, $\exists x_0 \in A$ cu $A_{x_0} = M$. Dacă $x_0 \in A_{x_0}$, vom avea $x_0 \notin M = A_{x_0}$, absurd, iar dacă $x_0 \notin A_{x_0}$, avem $x_0 \in M = A_{x_0}$, iarăși absurd.

■ **0.2.13.**

Fie $(A, \leq)$ o mulțime bine ordonată și $a \in A$. Submulțimea:

$$A_a = \{x \in A : x < a\}$$

se numește *semidreaptă* din A determinată de elementul a .

(*Principiul inducției transfinite*). Fie $(A, \leq)$ o mulțime bine ordonată. Dacă A' este o submulțime a lui A cu proprietățile:

1° A' conține primul element din A ;

2° Pentru orice semidreaptă $A_a \subseteq A'$ avem $a \in A'$, atunci mulțimea A' coincide cu mulțimea A .

Să presupunem că submulțimea $A' \subseteq A$ posedă proprietățile 1° și 2° dar că $A' \neq A$.

Atunci $A \setminus A'$ este submulțime nevidă a mulțimii bine ordonate A și care admite un prim element b iar $b \notin A'$. Atunci $A_b \subseteq A'$, dar conform 2°, $b \in A'$, ceea ce este absurd.

■ **0.2.14.** Fie $(A, \leq)$ o mulțime total ordonată cu prim element. Dacă singura submulțime A' a lui A care satisface condițiile 1° și 2° de la exercițiul precedent este chiar A , atunci $(A, \leq)$ este bine ordonată. (reciproca teoremei anterioare)

Presupunem că B este o submulțime nevidă a lui A care nu are prim element. Atunci $A' = A \setminus B$ este o submulțime a lui A care nu conține primul element din A . Dacă A_a este o semidreaptă din A' , atunci $a \in A'$, în caz contrar, a ar fi primul element din B . Conform principiului inducției transfinite, $A' = A$, adică $A \setminus B = A$, deci $B = \emptyset$, ceea ce contrazice presupunerea inițială.

Observație. Ultimele două teoreme, care sunt mutual reciproce, arată că principiul inducției transfinite este echivalent cu buna ordonare. Vom spune că teoremele care sunt demonstrate pe baza acestui principiu sunt demonstrate *prin recurență*.

■ **0.2.15.** Două mulțimi total ordonate, (A, ρ) și (B, σ) se numesc *asemenea*, și se scrie $A \approx B$, dacă există o bijecție $f: A \rightarrow B$ cu proprietatea:

$$x\rho y \Rightarrow f(x)\sigma f(y), \forall x, y \in A.$$

Dacă $(A, \leq)$ este o mulțime bine ordonată și $f: A \rightarrow A$ este o asemănare, atunci: $x \leq f(x), \forall x \in A$.

Presupunem că există un $x_0 \in A$ cu proprietatea $f(x_0) < x_0$; fie a cel mai mic element x_0 cu această proprietate.

Avem $f(a) < a$ și, aplicând asemănarea, deducem $(f(a)) < f(a)$. Deci $f(a) = b$ are proprietatea $f(b) < b$ și cum $f(a) < a$, adică $b < a$, rezultă că a nu este cel mai mic element, ceea ce contrazice presupunerea făcută.

■ **0.2.16.** Dacă $(A, \leq)$ și $(B, \leq)$ sunt două mulțimi bine ordonate, atunci:

1° A nu este asemenea cu nicio semidreaptă A_a a sa;

2° $A_x \approx A_y \Rightarrow x = y$;

3° $A \approx B$ implică existența unei singure asemănări $f: A \rightarrow B$.

1° Admitem prin absurd că $f: A \rightarrow A_x$ este o asemănare pentru un $x \in A$.

Conform exercițiului precedent, $x \leq f(x)$. Dar $f(x) \in A_x$, deci $f(x) < x$, contradicție.

2° Din $A_x \approx A_y$, $x \neq y$ putem avea $x < y$, atunci A_y este asemenea cu o semidreaptă A_x a sa, în contradicție cu 1°.

3° Fie $f, g: A \rightarrow B$ două asemănări. Rezultă $f^{-1} \circ g: A \rightarrow A$ este o asemănare. Conform exercițiului precedent:
 $\forall x \in A, x \leq f^{-1} \circ g(x)$.

Atunci $f(x) \leq g(x)$. Schimbând rolul lui f cu g , avem și $g(x) \leq f(x)$.

Deci pentru orice $x \in A$, $f(x) = g(x)$.

■ **0.2.17.** Considerăm un "univers" $\mathcal{U}$ de mulțimi total ordonate. Se observă că relația de asemănare, definită în exercițiul anterior, constituie o relație de echivalență. Clasa de echivalență a unei mulțimi total ordonate $(A, \leq)$ se va nota prin $\text{ord } A$ și se va numi *tipul de ordine* al lui $(A, \leq)$. Dacă $(A, \leq)$ este bine ordonată, aceeași proprietate o va avea orice alt element $(B, \leq)$ din $\text{ord } A$ și se spune că $\text{ord } A$ este *numărul ordinal* al lui $(A, \leq)$.

Notăm cu $\mathbb{Z}$ mulțimea tuturor numerelor ordinale. Pe $\mathbb{Z}$ se poate defini o relație de ordine (parțială) în modul următor:

Fie (A, ρ) și (B, σ) două mulțimi bine ordonate și $\alpha = \text{ord } A$, $\beta = \text{ord } B$. Vom pune $\alpha < \beta$ dacă există $x \in B$ cu proprietatea $A \approx B_x$. Notăm $\alpha \leq \beta$ dacă $\alpha < \beta$ sau $\alpha = \beta$. Se verifică ușor că $\alpha \leq \beta$ depinde numai de numerele ordinale α și β și nu depinde de reprezentanții (A, ρ) , (B, σ) .

Admițând axioma alegerii, putem stabili proprietatea de dihotomie a mulțimii $(\mathbb{Z}, \leq)$.

Axioma alegerii. Pentru orice familie $\mathcal{F}$ nevidă, de mulțimi nevide, disjuncte două câte două, există o mulțime A care are în comun cu fiecare mulțime din $\mathcal{F}$ un element și numai unul.

Axioma alegerii este echivalentă cu fiecare dintre următoarele propoziții:

Lema lui TUKEY.ⁱ Orice familie nevidă de caracter finit are un element maximal.

Principiul de maximalitate al lui HAUSDORFF.ⁱⁱ Orice mulțime nevidă parțial ordonată conține un lanț maximal.

Lema lui ZORN.ⁱⁱⁱ Orice mulțime nevidă parțial ordonată, în care fiecare lanț este mărginit superior, admite un element maximal.

Teorema bunei ordonări a lui ZERMELO.^{iv} Orice mulțime poate fi bine ordonată.

Pentru orice pereche de numere ordinale α și β are loc una și numai una dintre relațiile:

$$\alpha < \beta, \alpha = \beta, \beta < \alpha.$$

Exercițiul anterior confirmă faptul că are loc cel mult una dintre relații. Mai trebuie să demonstrăm că se verifică cel puțin una dintre relații.

Dacă $\alpha = \text{ord } A$, $\beta = \text{ord } B$, (A, ρ) și (B, σ) fiind bine ordonate, fie $\mathcal{F}$ familia tuturor asemănărilor de la semidreptele lui A sau A la semidreptele lui B sau B , avem $\{(a, b)\} \in \mathcal{F}$, a fiind primul element din A și b primul element din B . Deci $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Conform principiului de maximalitate al lui HAUSDORFF, există un lanț maximal $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$. Fie $h = \bigcup \mathcal{L}$. Se verifică ușor că $h \in \mathcal{F}$. Dacă $\text{dom } h$ și $\text{codom } h$ sunt semidreptele A_x și B_y ale lui A și B , respectiv, atunci $h \cup \{(x, y)\}$ poate fi adăugată lui $\mathcal{L}$ și aceasta poate contrazice maximalitatea lui $\mathcal{L}$.

Situația $\text{dom } h \neq A$ și $\text{codom } h \neq B$ este exclusă. Din $\text{dom } h = A$ și $\text{codom } h = B$ urmează $\alpha = \beta$; din $\text{dom } h = A$ și $\text{codom } h = B_y$ rezultă $\alpha < \beta$; ultima posibilitate $\text{dom } h = A_x$ și $\text{codom } h = B$ conduce la $\beta < \alpha$.

■ **0.2.18.** Mulțimea $(\mathbb{Z}, \leq)$ este total ordonată; pentru orice $a \in \mathbb{Z}$, $\text{ord } \mathbb{Z}_a = a$.

Se utilizează exercițiul anterior, fie $a = \text{ord } A$. Se va construi o aplicație $f: \mathbb{Z}_a \rightarrow A$ ce se va dovedi asemănătoare în raport cu ordonările bune subînțelese. Pentru $x \in \mathbb{Z}_a$ are loc $x < a$. Conform ex. 0.2.15, există unic $y \in A$ astfel încât $\mathbb{Z}_x = A_y$; definim $y = f(x)$.

■ **0.2.19.** Pentru orice număr cardinal a există cel puțin un număr ordinal α astfel încât $a = \overline{\mathbb{Z}_\alpha}$.

Fie $\overline{A} = a$. Pe baza axiomei alegerii, există o bună ordonare ρ pe A . Se notează $\alpha = \text{ord } A$ și din teorema precedentă se deduce că (A, ρ) este asemenea cu $(Z_\alpha, \leq)$. Deducem $A = Z_\alpha$ și prin urmare $a = \overline{Z_\alpha}$.

■ **0.2.20.** Se consideră mulțimea-univers $\mathcal{U}$ și familia $\mathcal{U} / \sim$ a cardinalilor acesteia. Atunci ordonarea $\leq$ este totală și bună.

Precizând bune ordonări $\leq_A$ (conform teoremei lui **ZERMELO**) pentru fiecare element A din $\mathcal{U}$, obținem un univers $\mathcal{U}' = \{(A, \leq_A) : A \in \mathcal{U}\}$ de mulțimi bine ordonate. Fie Z mulțimea cardinalilor lui $\mathcal{U}'$. Pentru un număr cardinal a , există, conform teoremei precedente, un ordinal α încât $a = \overline{Z_\alpha}$. Dacă unui alt cardinal b îi corespunde ordinalul β are loc evident $a \leq b \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$. Conform celor două exerciții anterioare, $(\mathcal{U} / \sim, \leq)$ este total și bine ordonată.

■ **0.2.21.** Se numesc *numere naturale*, numerele cardinale ale mulțimilor din șirul de mai jos:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}, \dots, \quad (1)$$

în care fiecare termen, începând cu cel de-al doilea, este mulțimea ale cărei elemente sunt toți termenii precedenți din șir.

Notăm numerele naturale, respectiv, cu: $0, 1, 2, \dots$, iar mulțimea lor cu $\mathbb{N}$.

Din modul de construcție al șirului (1) rezultă că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$n = \overline{\{0, 1, 2, \dots, n-1\}}.$$

Mulțimea $\mathbb{N}$ este bine ordonată.

Se aplică exercițiul precedent.

■ **0.2.22.** Pentru mulțimea $(\mathbb{N}, \leq)$ are loc *principiul inducției transfinite*, anume:

Dacă o mulțime $M \subset \mathbb{N}$ are proprietățile:

1^o $0 \in M$;

2^o Pentru orice semidreaptă $M_n \subset M$, avem $n \in M$,

atunci acea mulțime este chiar mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$.

Se particularizează forma generală a principiului inducției transfinite (Ex. [0.2.12](#))

■ **0.2.23.** Se poate defini *mulțimea numerelor naturale* ca fiind o mulțime notată $\mathbb{N}$, pe care s-a definit o aplicație $\mathbb{N} \ni x \mapsto x^* \in \mathbb{N}$, numită *lege de succesiune* pe $\mathbb{N}$ (unde x^* se numește *succesorul* lui x) și care satisface proprietățile (*Axiomele lui PEANO*):

Axioma I. În $\mathbb{N}$ se distinge un element numit *prim element*, notat cu 1 (sau 0).

Axioma II. Legea de succesiune pe $\mathbb{N}$ este o injecție a mulțimii $\mathbb{N}$ în mulțimea $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Axioma III. Fie $A \subseteq \mathbb{N}$ o mulțime cu proprietățile:

$$\begin{aligned} (i) & 1 \in A \\ (ii) & x \in A \Rightarrow x^* \in A. \end{aligned}$$

Atunci $A = \mathbb{N}$.

Se numește *funcție propozițională* o aplicație care asociază fiecărui număr natural n o propoziție, notată $P(n)$.

Să se demonstreze următoarea teoremă:

(*Principiul inducției matematice*) Fie $n \mapsto P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ o funcție propozițională care satisface proprietățile:

1^o $P(1)$ este adevărată;

2^o $(\forall) n \geq 1$ cu $P(n)$ adevărată, rezultă $P(n+1)$ adevărată.

Atunci $P(n)$ este adevărată $(\forall) n \geq 1$.

Fie $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ este adevărată}\}$. Atunci, conform 1^o, $1 \in A$ și $(\forall) n \in A$ rezultă $n+1 \in A$ conform 2^o. Din axioma III a lui **PEANO** rezultă că $A = \mathbb{N}$ deci $P(n)$ este adevărată $(\forall) n \geq 1$.

Observație. În practică, principiul inducției se aplică sub forma:

1^o $(\exists) n_0 \geq 1$ cu $P(n_0)$ adevărată.

2^o $(\forall) n \geq n_0$ cu $P(n)$ adevărată $\Rightarrow P(n+1)$ adevărată.

Concluzie

■ **0.2.24.** Adunarea și înmulțirea numerelor cardinale induc operațiile de adunare și înmulțire în mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale.

Mai întâi demonstrăm că suma a două numere naturale $m, n \in \mathbb{N}$ este un număr natural $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

Din asociativitatea adunării numerelor cardinale rezultă:

$$m + n^* = m + (n + 1) = (m + n) + 1 = (m + n)^*,$$

unde s-a notat cu $*$ succesorul unui număr natural.

Fixând un număr natural oarecare $m \in \mathbb{N}$, fie M mulțimea acelor numere naturale n pentru care suma de două numere cardinale $m + n$ este un număr natural. Din $m + 0 = m$ rezultă $0 \in M$.

Mai departe, dacă $n \in M$, atunci $m + n \in \mathbb{N}$ și $m + n^* = (m + n)^* \in \mathbb{N}$, deci $n^* \in M$. Aplicând principiul inducției, rezultă că M este chiar $\mathbb{N}$. Cum m a fost ales arbitrar, rezultă: $m + n \in \mathbb{N}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

Să demonstrăm aceeași proprietate și pentru produs. Avem:

$$m \cdot 0 = 0, \quad m \cdot 1 = m, \quad m \cdot n^* = m(n + 1) = m \cdot n + m.$$

Să fixăm un $m \in \mathbb{N}$ și fie $M = \{n \in \mathbb{N} : m \cdot n \in \mathbb{N}\}$. Din $m \cdot 0 = 0$ se deduce $0 \in M$, iar din $m \cdot n \in M$ avem

$$m \cdot n^* = m \cdot n + m \in M.$$

Urmează că $n \in M$ implică $n^* \in M$ și conform principiului inducției, $M = \mathbb{N}$. Cum m a fost ales arbitrar, rezultă că:

$$m \cdot n \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Observație. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\text{card } \{1, 2, \dots, n\} = n$. Cardinalul mulțimii vide este zero: $\text{card } \emptyset = 0$.

■ **0.2.25.** Dacă pe o mulțime A se definește o lege de compoziție internă, notată $\star$, spunem că $(A, \star)$ este un *semigrup* (*monoid*) dacă există proprietățile:

1° $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$, $\forall a, b, c \in A$ (*asociativitate*);

2° $\exists e \in A$ (numit *element neutru*) a.î. $e \star a = a \star e = a$, $\forall a \in A$ (*existență element neutru*);

În plus, dacă este satisfăcută și proprietatea:

3° $a \star b = b \star a$, $\forall a, b \in A$ (*comutativitate*),

monoidul se numește *comutativ*.

Pentru a se pune în evidență și elementul neutru, monoidul se mai notează și $(A, \star, e)$.

Un semigrup $(A, \star, e)$ se numește *grup* dacă orice element al acestuia admite un simetric:

4° $\forall a \in A$, $\exists a^{-1} \in A$ a.î. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Dacă pe o mulțime A sunt definite două operații:

$$\oplus: A \times A \rightarrow A \text{ (operație aditivă)} \quad \otimes: A \times A \rightarrow A \text{ (operație multiplicativă)},$$

unde $(A, \oplus, 0)$ este monoid comutativ, iar $(A, \otimes, 1)$ monoid și mai sunt satisfăcute și proprietățile:

5° $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$, $\forall a, b, c \in A$ (*distributivitatea operației multiplicative față de cea aditivă*);

6° $a \otimes 0 = 0 \otimes a = 0$, $\forall a \in A$ (0 este *absorbant* pentru operația multiplicativă),

atunci $(A, \oplus, \otimes, 0, 1)$ se numește *semi-inel* sau *semidomeniu de integritate*.

Mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale, împreună cu operațiile de adunare și înmulțire, definite în exercițiul anterior, formează un semidomeniu de integritate.

Avem de demonstrat că pentru orice $a, b, c \in \mathbb{N}$:

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a + 0 = a, \quad a + b = b + a;$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad a \cdot 1 = a, \quad a \cdot b = b \cdot a;$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + a \cdot b \text{ și } a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0).$$

Cu excepția ultimei proprietăți, celelalte au fost demonstrate fie la operațiile cu numere cardinale (Ex. [0.2.6](#), [0.2.7](#)) sau în exercițiul anterior.

Pentru a demonstra ultima proprietate, se observă că produsul cartezian a două mulțimi este vid dacă și numai dacă nua din mulțimi este vidă.

■ **0.2.26.** Dacă $m, n \in \mathbb{N}$, atunci $m \leq n$ dacă și numai dacă există un număr $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $m + p = n$.

Fie $m = \overline{M} \leq n = \overline{N}$. Inegalitatea cardinalilor revine la existența unei bijecții $f: M \rightarrow M' \subset N$. Vom pune în evidență mulțimea $P = N \setminus M'$ și cardinalul ei p . Din $P \subset N$ urmează că p este un număr natural iar definiția adunării numerelor naturale asigură că $m + p = n$.

Să presupunem acum că are loc $m + p = n$. Vom arăta că prin inducție completă în raport cu p că o astfel de egalitate implică $m \leq n$. Pentru $p = 0$ deducem $n = m + 0 = n$, deci $m \leq n$. Dacă din $m + k = n$ urmează $m \leq n$, egalitatea $m + k^* = r$ devine $(m + k)^* = r$, deci $n^* = r$, adică $n \leq r$. Din $m \leq n$ și $n \leq r$ urmează $m \leq r$ etc.

Observații.

1° Numărul întreg p , ce există conform teoremei anterioare în ipoteza $m \leq n$, este unic, se notează $n - m$ și se numește *diferența numerelor naturale n, m* .

2° Această teoremă, precum și următoarea, arată că operațiile de adunare și de înmulțire pe $\mathbb{N}$ sunt compatibile cu structura de bună ordonare a acestei mulțimi.

■ **0.2.27.** Există relațiile:

1° $m \leq n \Leftrightarrow m + p \leq n + p, \forall p \in \mathbb{N}$;

2° $m \leq n \Leftrightarrow mp \leq np, \forall p \in \mathbb{N}^*$

3° $m \leq mn, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(S-a notat $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

1° Din $m \leq n$ și exercițiul precedent rezultă $n = m + q, q \in \mathbb{N}$. Atunci $n + p = (m + p) + q$. Se aplică din nou teorema precedentă și rezultă $m + p \leq n + p$.

Reciproc, $m + p \leq n + p \Rightarrow n + p = (m + r) + p, r \in \mathbb{N}$, care prin inducție implică $n = m + r, r \in \mathbb{N}$. Se aplică din nou exercițiul precedent și se obține $m \leq n$.

2° Demonstrație similară.

3° Dacă $n \neq 0$ există p încât $n = p^*$. Rezultă $mn = mn^* = mp + m$ și deci $m \leq mn$.

Observație. Are loc $m = mn$ dacă și numai dacă $m = 0$ sau $n = 1$.

■ **0.2.28.** (Axioma lui **ARHIMEDE**). Oricare ar fi $m, p \in \mathbb{N}$, cu $m \neq 0$, există un $n \in \mathbb{N}$ așa ca $n \cdot m > p$.

Se aplică inducția după p . Se observă că pentru $p = 0$ proprietatea este verificată cu $n = 1$. Dacă acum $m \neq 0$ este oarecare fixat și $p \neq 0$ și există $n \in \mathbb{N}$ așa ca $mn > p$, atunci $n^*m > p^*$.

■ **0.2.29.** (Teorema împărțirii cu rest în $\mathbb{N}$). Dacă $m, n \in \mathbb{N}$ cu $m \neq 0$, există două numere naturale unice q (numit *cât*) și r (numit *rest*) încât $n = mq + r$ și $r < m$.

Fie $A = \{x : x \in \mathbb{N} \wedge mx \leq n\}$. Conform teoremei precedente, $A \subseteq \mathbb{N}$. Are loc $0 \in A$ și pentru a nu ajunge prin inducție la concluzia $A = \mathbb{N}$ trebuie să existe un $q \in A$ astfel încât $q^* \notin A$. Din $q \in A$ rezultă existența unui r astfel încât $mq + r = n$. Deoarece $q^* \notin A$ rezultă $m(q + 1) > mq + r$ deci $r < m$.

Pentru a dovedi unicitatea lui (q, r) se va presupune că există și $(h, k) \neq (q, r)$ încât $n = mh + k$ și $k < m$. Urmează $h \in A, h^* \notin A$. Dacă, de exemplu, $h < q$ urmează $h^* \leq q$ și deci $mh^* \leq mq \leq n$ în contradicție cu $h^* \notin A$. Analog, din $q < h$ am contrazice $q^* \notin A$. Deci $h = q$. Urmează $n = mq + r = mq + k$ deci $r = k$.

■ **0.2.30.** Se definește o relație binară $\sim$ pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ astfel:

$$(m, n) \sim (m_1, n_1) \Leftrightarrow m + n_1 = m_1 + n.$$

Relația $\sim$ este o relație de echivalență pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Mulțimea claselor sale de echivalență va fi numită *mulțimea numerelor întregi* și se va nota:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim.$$

Într-adevăr, $(m, n) \sim (m, n)$ deoarece $m + n = n + m$.

Din $(m, n) \sim (m_1, n_1) \Rightarrow (m_1, n_1) \sim (m, n)$, deoarece $m + n_1 = m_1 + n \Rightarrow m_1 + n = m + n_1$.

De asemenea, avem $[(m, n) \sim (m_1, n_1) \wedge (m_1, n_1) \sim (m_2, n_2)] \Rightarrow (m, n) \sim (m_1, n_1) \sim (m_2, n_2)$

■ **0.2.31.** Au loc proprietățile:

1° $(m, m) \sim (0, 0), \forall m \in \mathbb{N}$;

2° $(m, n) \sim (m - n, 0)$, pentru $m > n$;

3° $(m, n) \sim (0, n - m)$, pentru $n > m$.

Demonstrațiile sunt simple.

■ **0.2.32.** Dacă $(m, n) \sim (m_1, n_1), (p, q) \sim (p_1, q_1)$, atunci:

1° $(m + p, n + q) \sim (m_1 + p_1, n_1 + q_1)$;

$$2^o (mq + nq, mq + np) \sim (m_1p_1 + n_1q_1, m_1q_1 + n_1p_1).$$

Din $m + n_1 = m_1 + n$, $p + q_1 = p_1 + q$ rezultă c $m + p + n_1 + q_1 = m_1 + p_1 + n + q$. Analog se demonstrează a doua afirmație.

■ **0.2.33.** Aplicațiile $+: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ și $\cdot: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$, definite prin:

$$(m, n) + (p, q) = (m + p, n + q);$$

$$(m, n) \cdot (p, q) = (mp + nq, mq + np)$$

nu depind de reprezentanții aleși ai numerelor întregi respective.

Se aplică teorema precedentă.

Observație. Din teoremele anterioare rezultă că $+$ și $\cdot$ sunt operații binare pe mulțimea $\mathbb{Z}$ și pe care le vom numi *adunarea* și *înmulțirea* numerelor întregi.

■ **0.2.34.** Dacă $A(\oplus, \otimes, 0, 1)$ este un inel, spunem că elementul $x \in A \setminus \{0\}$ este *divizor al lui zero* dacă $\exists y \in A \setminus \{0\}$ a.î. $x \otimes y = y \otimes x = 0$.

Un inel cu element-unitate, comutativ și fără divizori ai lui zero se numește *domeniu de integritate*.

Mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi, împreună cu operațiile de adunare și înmulțire, formează un domeniu de integritate.

1^o $(\mathbb{Z}, +)$ este grup abelian.

Într-adevăr, $(m, n) + [(p, q) + (r, s)] = (m, n) + (p + r, q + s) = [(m, n) + (p, q)] + (r, s)$. Elementul neutru este: $(0, 0)$: $(m, n) + (0, 0) = (m, n)$. Opusul $-(m, n)$ al numărului (m, n) este (n, m) deoarece:

$$(m, n) + (n, m) = (m + n, m + n) = (0, 0). \quad \text{În fine, } (m, n) + (p, q) = (m + p, n + q) = (p, q) +$$

(m, n) .

2^o $(\mathbb{Z}, \cdot)$ este semigrup cu unitate, comutativ.

$$[(m, n) \cdot (p, q)] \cdot (r, s) = (mp + nq, mq + np) \cdot (r, s) =$$

$$= (mpr + nqr + mqs + nps, mps + nqs + mqr + npr) = (m, n) \cdot [(p, q) \cdot (r, s)].$$

$(1, 0)$ este unitate: $(m, n) \cdot (1, 0) = (m, n)$.

În fine, $(m, n) \cdot (p, q) = (mp + nq, mq + np) = (p, q) \cdot (m, n)$.

3^o *Înmulțirea este distributivă față de adunare:* $(m, n) \cdot [(p, q) \cdot (r, s)] = (m, n) \cdot (p + r, q + s) =$

$$= (mp + mr + nq + ns, mq + ms + np + nr) = (m, n) \cdot (p, q) + (m, n) \cdot (r, s).$$

4^o *Absența divizorilor lui zero.* Fie $(m, n) \cdot (p, q) = (0, 0)$; dacă $(m, n) \neq (0, 0)$ are loc $m \neq n$.

Fie $(m, n) \cdot (p, q) = (0, 0)$; dacă $(m, n) \neq (0, 0)$ are loc $m \neq n$. Să presupunem că de exemplu $m > n$, deci există $r \neq 0$ încât $m = n + r$ și deci $(m, n) = (r, 0)$. Egalitatea inițială devine $(r, 0) \cdot (p, q) = (0, 0)$, adică $rp = rq$.

Urmează $p = q$, adică $(p, q) = (0, 0)$.

■ **0.2.35.** Pentru simplificare, vom nota $(0, 0) = 0$, $\mathbb{Z}_+ = \{(m, n): m > n\}$ (numită *mulțimea numerelor întregi pozitive*) și $\mathbb{Z}_- = \{(m, n): m < n\}$ (*mulțimea numerelor întregi negative*).

1^o $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$;

2^o $\forall (m, n) \in \mathbb{Z} \Rightarrow (m, n)$ aparține uneia și numai uneia dintre mulțimile: $\mathbb{Z}_-, \{0\}, \mathbb{Z}_+$.

1^o Afirmație evidentă, conform definiției mulțimilor $\mathbb{Z}_-, \{0\}, \mathbb{Z}_+$.

2^o Fie $(m, n) \in \mathbb{Z}$. Dacă $(m, n) \sim (m', n')$ și $m > n$, atunci $m' > n'$, deoarece $m + n' = n + m'$ și

$$m + n' > n + n' \Rightarrow n + m' > n + n' \Rightarrow m' > n'.$$

Prin urmare proprietatea $m > n$ de depinde de reprezentanții m, n . Aplicând trihotomia numerelor naturale, avem sau $m > n$ și atunci $(m, n) \in \mathbb{Z}_+$, sau $m = n$ și atunci $(m, n) = 0$, sau $m < n$ și atunci $(m, n) \in \mathbb{Z}_-$, dar numai una dintre relații poate avea loc.

■ **0.2.36.** Operația de adunare, $+$, din $\mathbb{Z}$ induce pe $\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ o operație notată tot $+$, iar operația de înmulțire pe $\mathbb{Z}$ induce pe $\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ o operație notată tot $\cdot$; tripletul $(\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, +, \cdot)$ este un semidomeniu de integritate.

Într-adevăr, $\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ este parte stabilă în raport cu $+$ și cu $\cdot$. Atunci restricțiile operațiilor $+$ și $\cdot$ la această submulțime dau o structură de semidomeniu de integritate.

■ **0.2.37.** Vom spune că numărul întreg (m, n) este *mai mic* decât numărul întreg (p, q) dacă diferența $(p, q) - (m, n) \in \mathbb{Z}_+$. Vom nota această relație prin semnul $<$ și vom scrie $(m, n) \leq (p, q)$ dacă $(m, n) < (p, q)$ sau $(m, n) = (p, q)$.

Mulțimea $(\mathbb{Z}, \leq)$ este total ordonată.

Avem, evident, $(m, n) \leq (m, n)$; $(m, n) \leq (p, q)$, $(p, q) \leq (r, s) \Rightarrow (m, n) \leq (r, s)$. Fie acum $(m, n), (p, q) \in \mathbb{Z}$. Conform 0.2.34, $(p, q) - (m, n)$ aparține uneia și numai uneia dintre mulțimile: $\mathbb{Z}_-, \{0\}, \mathbb{Z}_+$. Dacă acest număr aparține lui $\mathbb{Z}_+$, atunci $(m, n) < (p, q)$. Dacă este zero, atunci $(m, n) = (p, q)$. În fine, dacă el este în $\mathbb{Z}_-$, atunci $(p, q) < (m, n)$ și numai una din aceste situații are loc.

■ **0.2.38.** Fie $(A, +, \cdot)$, $(B, +, \cdot)$ două inele. O aplicație $f: A \rightarrow B$ cu proprietățile:

$$1^\circ f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in A;$$

$$2^\circ f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \quad \forall x, y \in A,$$

se numește *morfism de inele*.

Un morfism de inele se numește *izomorfism de inele* dacă este inversabil și inversa este de asemenea morfism de inele.

Mulțimea $\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ este bine ordonată prin relația $\leq$. Mai mult:

$$1^\circ \text{ Există o asemănare unică } f \text{ a mulțimilor ordonate } (\mathbb{N}, \leq) \text{ și } (\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, \leq).$$

$$2^\circ f \text{ este un izomorfism al semidomeniilor de integritate } (\mathbb{N}, +, \cdot) \text{ și } (\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, +, \cdot).$$

În primul rând să arătăm că $(m, n) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ dacă și numai dacă există $p \in \mathbb{N}$ încât $(m, n) = (p, 0)$.

Într-adevăr, $(m, n) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \Rightarrow m \geq n \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}; m + p = n$. Atunci $(m, n) \sim (p, 0)$.

Invers, $(p, 0) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ și $(m, n) = (p, 0)$ aparține acestei mulțimi.

Acum avem $(m, 0) \leq (p, 0) \Leftrightarrow m \leq p$.

Aplicația $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, $f(m) = (m, 0)$ este o bijecție care are proprietatea $m \leq n \Rightarrow f(m) \leq f(n)$. Deci f este o asemănare. Din 0.2.15 rezultă că această asemănare este unică.

2° Se observă că: $f(m + n) = (m + n, 0) = (m, 0) + (n, 0) = f(m) + f(n)$ și $f(m \cdot n) = (mn, 0) = (m, 0) \cdot (n, 0) = f(m) \cdot f(n)$.

Observație. Prin izomorfismul indicat anterior, $\mathbb{N}$ apare ca o submulțime a lui $\mathbb{Z}$, deci $\mathbb{Z}$ poate fi concepută ca o extensie a lui $\mathbb{N}$. Teorema care urmează dezvăluie faptul că această extensie este *minimală*.

■ **0.2.39.** Fie $(A, +, \cdot)$, $(B, +, \cdot)$ două inele. Un morfism $f: A \rightarrow B$ se numește *(h)omomorfism* dacă:

$$f(1_A) = 1_B,$$

unde $1_A, 1_B$ sunt elementele unitare pentru fiecare din cele două operații multiplicative.

Dacă $\mathbb{V} = (V, \oplus, \circ)$ este un inel, $\mathbb{N} \subset V$ și restricțiile operațiilor $\oplus$ și $\circ$ la $\mathbb{N}$ coincid cu operațiile de adunare și înmulțire ale numerelor naturale, atunci există un homomorfism injectiv h de la inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ al întregilor la $\mathbb{N}$.

Demonstrația este imediată punând $h((m, n)) = m \oplus (-n)$, unde $-n$ este opusul lui n în $\mathbb{N}$.

■ **0.2.40.** Inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, ordonat prin $\leq$, este *arhimedian* adică, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}_+$ și $b \in \mathbb{Z}$, există un număr natural $n \in \mathbb{N}$ încât $na > b$.

Putem considera $a = (m, 0)$ cu $m \neq 0$. Dacă $b = (p, q)$, inegalitatea $na > b$ revine la $nm + q > p$. Dacă $p \leq q$, putem lua $n = 0$. În caz contrar, există h încât $p = q + h$ și, deoarece $\mathbb{N}$ este arhimediană, vom găsi n încât $nm > h$.

Observații.

1° Deoarece $\mathbb{Z}$ poate fi privit ca o extensie a lui $\mathbb{N}$, putem nota numerele întregi prin litere mici ale alfabetului latin.

2° În $\mathbb{Z}$ nu există în general inverse în raport cu înmulțirea. În cele ce urmează se va construi o extensie a lui $\mathbb{Z}$ care să aibă această proprietate.

■ **0.2.41.** Fie $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Atunci relația binară $\sim$, definită pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ prin:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc,$$

este o relație de echivalență. Au loc următoarele relații:

$$1^\circ \forall a \in \mathbb{Z}, \forall b, c \in \mathbb{Z}^*, (a, b) \sim (ac, bc);$$

$$2^\circ \forall a \in \mathbb{Z}, \forall b, c, d \in \mathbb{Z}^*, (a, b) \sim (ac, d) \Rightarrow d = bc$$

$3^o \forall a \in \mathbb{Z}, (a, a) \sim (1, 1) \text{ și } (0, a) \sim (0, 1);$

$4^o [(a, b) \sim (c, d) \wedge a \neq 0] \Rightarrow [c \neq 0 \wedge (b, a) \sim (d, c)].$

Faptul că $\sim$ este relație de echivalență și primele trei relații sunt ușor de demonstrat. Pentru 4^o se va ține seama că dacă $(a, b) \sim (c, d)$, $a \neq 0$, atunci $ad = cb$. Dacă $c = 0$, avem contradicția $a = 0$ sau $b = 0$. În consecință $c \neq 0$. Urmează că $(b, a), (d, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dar $ad = cb \Rightarrow (b, a) \sim (d, c)$.

■ **0.2.42.** Mulțimea cât a lui $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ în raport cu relația de echivalență $\sim$ o vom numi *mulțimea numerelor raționale* și se va nota:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \sim.$$

Clasele de echivalență vor fi numite *numere raționale* și vor fi notate cu $\langle a, b \rangle$, $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ fiind un reprezentant al numărului rațional $\langle a, b \rangle$.

Avem proprietățile:

$1^o \langle a, b \rangle = \langle ac, bc \rangle, \forall c \in \mathbb{Z}^*;$

$2^o \langle a, b \rangle = \langle ac, d \rangle \Rightarrow d = bc;$

$3^o \langle a, a \rangle = \langle 1, 1 \rangle$ și $\langle 0, a \rangle = \langle 0, 1 \rangle, \forall a \in \mathbb{Z}^*;$

$4^o [\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \wedge a \neq 0] \Rightarrow [c \neq 0 \wedge \langle b, a \rangle = \langle d, c \rangle].$

Pentru demonstrație, se utilizează teorema precedentă.

■ **0.2.43.**

Dacă au loc $(a, b) \sim (a', b')$ și $(c, d) \sim (c', d')$, atunci:

$1^o (ad + bc, bd) \sim (a'd' + b'c', b'd');$

$2^o (ac, bd) \sim (a'c', b'd').$

$1^o (ab' = a'b \wedge cd' = c'd) \Rightarrow ab'dd' + cd'bb' = a'bdd' + c'dbb' \Rightarrow (ad + bc, bd) \sim (a'd' + b'c', b'd').$

$2^o (ab' = a'b \wedge cd' = c'd) \Rightarrow acb'd' = a'c'bd \Rightarrow (ac, bd) \sim (a'c', b'd').$

■ **0.2.44.**

Aplicațiile $+: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$ și $\cdot: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$ definite prin $\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle = \langle ad + bc, bd \rangle$, respectiv $\langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle = \langle ac, bd \rangle$, nu depind de reprezentanții $(a, b), (c, d)$ ai numerelor raționale $\langle a, b \rangle$, respectiv $\langle c, d \rangle$.

Se aplică teorema anterioară.

Observație. Din această teoremă rezultă că $+$ și $\cdot$ sunt operații pe $\mathbb{Q}$. Le numim *adunarea* și *înmulțirea* numerelor raționale.

■ **0.2.45.** Se numește *corp* un triplet $(A, +, \cdot)$, unde $+$ este operația aditivă, iar $\cdot$ este operația multiplicativă, pentru care:

$1^o (A, +)$ este grup abelian, cu elementul neutru 0;

$2^o (A \setminus \{0\}, \cdot)$ este grup cu elementul neutru 1;

3^o Operația multiplicativă este distributivă față de cea aditivă.

Dacă operația multiplicativă este și comutativă adică:

$4^o x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in A,$

atunci corpul este *corp comutativ (câmp)*.

Mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale, împreună cu operațiile de adunare $+$ și înmulțirea $\cdot$, este un corp comutativ.

$1^o (\mathbb{Q}, +)$ este un grup abelian:

$$(\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle) + \langle e, f \rangle = \langle ad + bc, bd \rangle + \langle e, f \rangle = \langle adf + bcf + bde, bdf \rangle = \langle a, b \rangle + (\langle c, d \rangle + \langle e, f \rangle);$$
$$\langle a, b \rangle + \langle 0, 1 \rangle = \langle a, b \rangle, \text{ deci } \langle 0, 1 \rangle \text{ este element neutru al adunării.}$$

Opusul elementului $\langle a, b \rangle$ este numărul rațional $\langle -a, b \rangle$.

În fine, $\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle = \langle c, d \rangle + \langle a, b \rangle$.

$2^o (\mathbb{Q}, \cdot)$ este semigrup abelian cu unitate:

$$(\langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle) \cdot \langle e, f \rangle = \langle ac, bd \rangle \cdot \langle e, f \rangle = \langle a, b \rangle \cdot (\langle c, d \rangle \cdot \langle e, f \rangle)$$

$$\langle a, b \rangle \cdot \langle 1, 1 \rangle = \langle a, b \rangle \text{ și } \langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle = \langle ac, bd \rangle = \langle c, d \rangle \cdot \langle a, b \rangle.$$

$3^o \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{\langle 0, 1 \rangle\}$ și $\cdot$ este grup comutativ:

Avem de arătat că $\langle a, b \rangle \neq \langle 0, 1 \rangle$ are un invers în raport cu înmulțirea. Dar $\langle a, b \rangle \neq \langle 0, 1 \rangle \Rightarrow a \neq 0$.

Atunci $\langle a, b \rangle \cdot \langle b, a \rangle = \langle ab, ab \rangle = \langle 1, 1 \rangle$, (deoarece $ab \neq 0$). Deci, pentru $a \neq 0$, $\langle a, b \rangle^{-1} = \langle b, a \rangle$.

4^o Înmulțirea este distributivă față de adunare:

$$(\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle) \cdot \langle e, f \rangle = \langle ad + bc, bd \rangle \cdot \langle e, f \rangle = \langle ade + bce + bde, bdf \rangle = \langle a, b \rangle \cdot \langle e, f \rangle + \langle c, d \rangle \cdot \langle e, f \rangle.$$

■ **0.2.46.** Se definesc:

$$\mathbb{Q}_+ = \{\langle a, b \rangle : a \in \mathbb{Z}_+, b \in \mathbb{Z}_+\}, \quad \mathbb{Q}_- = \{\langle a, b \rangle : a \in \mathbb{Z}_-, b \in \mathbb{Z}_+\}, \quad 0 = \langle 0, 1 \rangle$$

1^o Mulțimile $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_-$ și $\{0\}$ alcătuiesc o partiție pentru $\mathbb{Q}$;

2^o $\mathbb{Q}_+$ este parte stabilă în $(\mathbb{Q}, +)$;

3^o $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ este grup abelian.

Într-adevăr, conform 0.2.41. 1^o, pentru $c = 1$, $\langle a, b \rangle = \langle -a, -b \rangle$, deci pentru orice număr rațional $\langle a, b \rangle$ se poate determina un reprezentant (a, b) sau $(-a, -b)$ astfel încât al doilea factor al său să fie pozitiv, deci

$$\mathbb{Q} = \{\langle a, b \rangle : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}_+\}.$$

■ **0.2.47.** Se spune că numărul rațional $\langle a, b \rangle$ este *mai mic* decât numărul rațional $\langle c, d \rangle$ și se scrie $\langle a, b \rangle < \langle c, d \rangle$ dacă $\langle c, d \rangle - \langle a, b \rangle \in \mathbb{Q}_+$. Se scrie $\langle a, b \rangle \leq \langle c, d \rangle$ dacă $\langle a, b \rangle < \langle c, d \rangle$ sau $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$.

$(\mathbb{Q}_+, +, \cdot)$ este un câmp total ordonat adică:

Mulțimea $(\mathbb{Q}, \leq)$ este total ordonată și relația de ordine este compatibilă cu operațiile de adunare și înmulțire din $\mathbb{Q}$.

Conform definiției, avem $\langle a, b \rangle \leq \langle a, b \rangle$.

Apoi $\langle a, b \rangle \leq \langle c, d \rangle$ și $\langle c, d \rangle \leq \langle a, b \rangle$, conform exercițiului anterior, 1^o, implică $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$.

Din $\langle a, b \rangle \leq \langle c, d \rangle$, $\langle c, d \rangle \leq \langle e, f \rangle$ avem $\langle c, d \rangle - \langle a, b \rangle \in \mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$, $\langle e, f \rangle - \langle c, d \rangle \in \mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$, care implică $\langle e, f \rangle - \langle a, b \rangle \in \mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$ adică $\langle a, b \rangle \leq \langle e, f \rangle$.

Principiul trihotomiei rezultă imediat aplicând exercițiul anterior, 1^o.

Acum să demonstrăm că:

$$(1) (\langle a, b \rangle \leq \langle c, d \rangle \wedge \langle a_1, b_1 \rangle \leq \langle c_1, d_1 \rangle) \Rightarrow \langle a, b \rangle + \langle a_1, b_1 \rangle \leq \langle c, d \rangle + \langle c_1, d_1 \rangle.$$

$$(2) (\langle a, b \rangle \leq \langle c, d \rangle \wedge \langle e, f \rangle \in \mathbb{Q}_+) \Rightarrow \langle a, b \rangle \cdot \langle e, f \rangle \leq \langle c, d \rangle \cdot \langle e, f \rangle.$$

Într-adevăr, $\langle c, d \rangle - \langle a, b \rangle \in \mathbb{Q}_+$, $\langle c_1, d_1 \rangle - \langle a_1, b_1 \rangle \in \mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$ implică $\langle c, d \rangle + \langle c_1, d_1 \rangle - (\langle a, b \rangle + \langle a_1, b_1 \rangle) \in \mathbb{Q}_+$ și are loc relația (1). Le fel se dovedește și (2).

■ **0.2.48.** Fie $\tilde{\mathbb{Q}} = \{\langle a, 1 \rangle : a \in \mathbb{Z}\}$. Elementele lui $\tilde{\mathbb{Q}}$ se numesc *întregi raționali*.

$(\tilde{\mathbb{Q}}, +, \cdot)$ este domeniu de integritate.

Evident $\emptyset \neq \tilde{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{Q}$. Restricția relației $\leq$ la $\tilde{\mathbb{Q}}$ determină o ordine totală pe $\tilde{\mathbb{Q}}$. De asemenea, se vede ușor că $\tilde{\mathbb{Q}}$ este parte stabilă în raport cu operațiile $+$ și $\cdot$ din $\mathbb{Q}$.

■ **0.2.49.** 1^o Mulțimile $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ sunt asemenea.

2^o Există un izomorfism între omenii de integritate $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ și $(\tilde{\mathbb{Q}}, +, \cdot)$, care este asemănare.

1^o Fie $f: \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{\mathbb{Q}}$ aplicația dată de $f(a) = \langle a, 1 \rangle$. Din $f(a) = f(b)$ se deduce $\langle a, 1 \rangle = \langle b, 1 \rangle$ deci $a = b$, deci f este injectivă.

Fie $\langle a, 1 \rangle$ un element oarecare din $\tilde{\mathbb{Q}}$ și $(a, 1)$ un reprezentant al său; atunci $f(a) = \langle a, 1 \rangle$. Așadar, f este și surjectivă, deci este bijectivă.

Să admitem că $a \leq b$; atunci $f(a) \leq f(b)$, deoarece $\langle b, 1 \rangle - \langle a, 1 \rangle = \langle b, 1 \rangle + \langle -a, 1 \rangle = \langle b - a, 1 \rangle$ și $b - a \geq 0$.

2^o Asemănarea precedentă este și izomorfism, deoarece $f(a + b) = \langle a + b, 1 \rangle = \langle a, 1 \rangle + \langle b, 1 \rangle = f(a) + f(b)$ și $f(a) \cdot f(b) = \langle a, 1 \rangle \cdot \langle b, 1 \rangle = \langle ab, 1 \rangle$.

Observație. În urma acestui rezultat, mulțimile $\mathbb{Z}$ și $\tilde{\mathbb{Q}}$ pot fi identificate și $\mathbb{Q}$ apare ca o extensie a domeniului de integritate $\mathbb{Z}$.

■ **0.2.50.**

Orice număr rațional $\langle a, b \rangle \in \mathbb{Q}$ poate fi scris sub formă de produs al unui întreg rațional prin inversul unui întreg rațional.

Fie $\langle a, b \rangle \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Z}_+$. Dacă $\langle a, b \rangle = 0$, atunci $\langle a, b \rangle = \langle 0, b \rangle \cdot \langle b, 1 \rangle^{-1}$. Dacă $\langle a, b \rangle \neq 0$, atunci $\langle a, b \rangle = \langle a, 1 \rangle \cdot \langle b, 1 \rangle^{-1}$.

■ 0.2.51.

Corpul numerelor raționale $\mathbb{Q}$ este extensie minimală a domeniului de integritate $\mathbb{Z}$.

Orice alt corp $\mathbb{K}$, ce conține o submulțime $\widetilde{K}$ izomorfă cu $\mathbb{Z}$, va conține și inversele elementelor din $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Conform exercițiului anterior, K va conține un subcorp izomorf cu $\mathbb{Q}$ și atunci $\mathbb{Q}$ se identifică cu un subcorp din K .

■ 0.2.52. O mulțime total ordonată $(A, \leq)$ se numește *densă* dacă pentru orice $x, y \in A$, $x \neq y$, există un $z \in A$ a.î. $x < z < y$ sau $y < z < x$.

$(\mathbb{Q}, \leq)$ este o submulțime total ordonată fără prim sau ultim element, densă.

Caracterul total al ordonării $\leq$ a fost demonstrat în 0.2.41.

Pentru orice $x \in \widetilde{Q}$ se poate găsi $x - \langle 1, 1 \rangle < x$ și $x < x + \langle 1, 1 \rangle$ deci nu poate exista prim sau ultim element.

Fie $x = \langle a, b \rangle$ și $y = \langle c, d \rangle$ încât $x < y$, adică $ad < bc$. Proprietatea de densitate afirmă existența unui $z = \langle e, f \rangle$ încât $x < z < y$. Se poate lua $z = \frac{1}{2}(x + y) = \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle ad + bc, 2bd \rangle$ și se poate verifica faptul că $x < z$, $z < y$.

■ 0.2.53. Mulțimea $\mathbb{Q}$ este *arhimediană*, adică pentru orice $\langle a, b \rangle \in \mathbb{Q}_+$ și $\langle c, d \rangle \in \mathbb{Q}$, există un număr natural nenul $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât: $n \cdot \langle a, b \rangle > \langle c, d \rangle$.

Fie numerele întregi $ad > 0$ și cb . Există $n \in \mathbb{N}^*$ încât $nad > cb$. Atunci $\langle n, 1 \rangle \cdot \langle a, b \rangle = \langle n, 1 \rangle \cdot \langle ad, bd \rangle = \langle c, d \rangle$.

Observații.

1^o Identificăm mulțimile $\mathbb{Z}$ și $\widetilde{\mathbb{Q}}$: întregii raționali $\langle a, 1 \rangle$ cu a și inversul lui $\langle b, 1 \rangle$, $b \neq 0$, cu $\frac{1}{b}$. Atunci:

$\langle a, b \rangle = \langle a, 1 \rangle \cdot \langle 1, b \rangle = a \cdot \frac{1}{b}$ se poate nota cu $\frac{a}{b}$. Avem astfel:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

2^o După cum s-a demonstrat, câmpul numerelor raționale $\mathbb{Q}$ este ordonat și arhimedian. De acum înainte se vor nota elementele sale cu: $a, b, \dots, x, y, \dots, \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2^o Relația $\leq$ este o relație de ordine totală pe $\mathbb{Q}$ și este compatibilă cu operațiile de pe această mulțime.

Astfel, pentru orice $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$,

$$\begin{cases} a < b, c \leq d \Rightarrow a + c < b + d; \\ a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc; \\ a < b, c < 0 \Rightarrow bc < ac; \\ a^2 \in \mathbb{Q}_+, \text{ pentru } a \neq 0; 1 \in \mathbb{Q}_+; \\ ab \in \mathbb{Q}_+, a \in \mathbb{Q}_+ \Rightarrow b \in \mathbb{Q}_+ \end{cases}$$

Cu aceleași notații, pentru $a \in \mathbb{Q}^*$, avem $a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{Q}^*$. De asemenea:

$$0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$$

■ 0.2.54. Fie funcția $|\cdot|: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$, numită *valoare absolută* sau *modul*.

Avem proprietățile: $\forall x, y \in \mathbb{Q}$,

$$1^o |x| = |-x|; \quad 2^o |x \cdot y| = |x| \cdot |y|; \quad 3^o |x + y| \leq |x| + |y| \quad 4^o ||x| - |y|| \leq |x| + |y|.$$

Pentru a demonstra 3^o, se va ține seama că: $x \leq |x|, y \leq |y| \Rightarrow x + y \leq |x| + |y|$. Analog, $-(x + y) \leq |x| + |y|$.

■ 0.2.55. Se numește *șir* o funcție $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$. Se vor nota termenii șirului $f(n) \stackrel{\text{def}}{=} a_n$. Un șir mai poate fi notat simplificat $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sau, mai simplu, (a_n) .

Șirul (a_n) se numește *mărginit* dacă există un $b \in \mathbb{Q}_+$ a.î. $|a_n| < b$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Fie $\mathcal{B}$ mulțimea șirurilor mărginite.

Șirul (a_n) se numește *șir CAUCHY* dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ există un număr natural $N(\varepsilon)$ (deci care depinde de ε) astfel încât $|a_p - a_q| < \varepsilon$, pentru toți $p, q > N(\varepsilon)$. Notăm cu $\mathcal{C}$ mulțimea tuturor șirurilor **CAUCHY**.

Șirul (a_n) se numește *șir nul* dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ există un număr natural $N(\varepsilon)$, astfel încât $|a_p| < \varepsilon$, pentru toți $p > N(\varepsilon)$. Notăm cu $\mathcal{N}$ mulțimea tuturor șirurilor nule.

Avem: $\mathcal{N} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{B}$.

Este clar că $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}$. Fie $(a_n) \in \mathcal{C}$; atunci $p, q > N(1) \Rightarrow |a_p - a_q| < 1$. Dacă b este cel mai mare dintre numerele raționale $|a_1|, \dots, |a_{N(1)}|, |a_{N(1)}| + 1$, atunci $|a_p| < b$ pentru toți $p \in \mathbb{N}^*$.

■ **0.2.56.** Pe mulțimea $\mathcal{S}$ a șirurilor de elemente din $\mathbb{Q}$ definim operațiile:

$$\begin{cases} (a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) \\ (a_n)(b_n) = (a_n b_n) \end{cases}$$

Atunci $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ este inel comutativ cu unitate.

■ **0.2.57.** Avem următoarele proprietăți:

1° $\mathcal{C}$ este *parte stabilă* în $\mathcal{S}$ în raport cu operațiile $+$ și $\cdot$;

2° $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ este inel comutativ cu unitate;

3° $\mathcal{N} \neq \mathcal{C}$;

4° $\mathcal{N}$ este ideal în $\mathcal{C}$.

1° Fie $(a_n), (b_n) \in \mathcal{C}, N(e)$ și $M(e)$ întregii din $\mathbb{Z}_+$ asociați acestor șiruri. Dacă $p, q \geq \max\{N\left(\frac{e}{2}\right), M\left(\frac{e}{2}\right)\}$, atunci :

$$|a_p + b_p - (a_q + b_q)| < e.$$

Deci $(a_n) + (b_n) \in \mathcal{C}$.

Fie acum c și d cu proprietatea $|a_n| < c, |b_n| < d, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $p, q > \max\{N\left(\frac{e}{2}\right), M\left(\frac{e}{2}\right)\}$, atunci:

$$|a_p b_p - a_q b_q| = |a_p b_p - a_p b_q + a_p b_q - a_q b_q| \leq |a_p| \cdot |b_p - b_q| + |b_q| \cdot |a_p - a_q| < \frac{ce}{2c} + \frac{de}{2d} = e.$$

Deci $(a_n) \cdot (b_n) \in \mathcal{C}$.

2° $(\mathcal{C}, +, \cdot)$, după 1° și conform observației, $(a_n), (b_n) \in \mathcal{C} \Rightarrow (a_n) - (b_n) \in \mathcal{C}$, este subinel al inelului comutativ $\mathcal{S}$.

Șirul constant $(1, 1, \dots)$ este șir din $\mathcal{C}$ și este unitate în raport cu produsul din $\mathcal{C}$.

3° Proprietatea este evidentă deoarece $(1, 1, \dots) \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{N}$.

4° Dacă $(a_n), (b_n) \in \mathcal{N}$, atunci evident $(a_n) - (b_n) \in \mathcal{N}$, deci $(\mathcal{N}, +)$ este subgrup $(a_n) \in \mathcal{N}$ și $(b_n) \in \mathcal{C}$; să arătăm că $(a_n) \cdot (b_n) \in \mathcal{N}$. Cum însă (b_n) este mărginit, există $c \in \mathbb{Q}_+$ încât $|b_n| < c, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Fie apoi $e \in \mathbb{Q}_+$ oarecare. Există $N\left(\frac{e}{c}\right)$ așa ca pentru $\forall p > N\left(\frac{e}{c}\right)$ să avem $|a_p| < \frac{e}{c}$. Deci, pentru $p > N\left(\frac{e}{c}\right)$, avem $|a_p b_p| < |a_p| \cdot c < e$. Urmează că $(a_n) \cdot (b_n) \in \mathcal{N}$.

■ **0.2.58.** Mulțimea $\mathbb{R} = \mathcal{C} / \mathcal{N}$ se numește *mulțimea numerelor reale*. Numerele reale sunt deci elementele mulțimii factor $\mathcal{C} / \mathcal{N}$, deci au forma $\alpha = (a_n) + \mathcal{N}$. Se notează $\bar{0} = (0_n) + \mathcal{N} = \mathcal{N}, (0_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*)$ și $\bar{1} = (1_n) + \mathcal{N}, (1_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\bar{0}$ se numește numărul real zero, iar $\bar{1}$ unitatea din $\mathbb{R}$.

Dacă $\alpha = (a_n) + \mathcal{N}$ și $\beta = (b_n) + \mathcal{N}$ sunt numere reale arbitrare, atunci:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = ((a_n) + \mathcal{N}) + ((b_n) + \mathcal{N}) = ((a_n) + (b_n)) + \mathcal{N} = (a_n) + (b_n) + \mathcal{N} \\ \alpha \cdot \beta = ((a_n) + \mathcal{N}) \cdot ((b_n) + \mathcal{N}) = (a_n) \cdot (b_n) + \mathcal{N} = (a_n b_n) + \mathcal{N} \end{cases}$$

depind numai de numerele α, β și nu de reprezentanții $(a_n), (b_n)$ ai acestora.

Într-adevăr, dacă $\alpha = (a_n) + \mathcal{N} = (a'_n) + \mathcal{N}, \beta = (b_n) + \mathcal{N} = (b'_n) + \mathcal{N}$, atunci fie $(a_n) - (a'_n) = (c_n) \in \mathcal{N}$ și $(b_n) - (b'_n) = (d) \in \mathcal{N}$. Urmează că:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= ((a_n) + \mathcal{N}) + ((b_n) + \mathcal{N}) = ((a'_n) + (c_n) + \mathcal{N}) + ((b'_n) + (d_n) + \mathcal{N}) = \\ &= ((a'_n) + \mathcal{N}) + ((b'_n) + \mathcal{N}). \end{aligned}$$

De asemenea:

$$\alpha \cdot \beta = ((a_n) + \mathcal{N}) \cdot ((b_n) + \mathcal{N}) = ((a'_n) + (c_n) + \mathcal{N})((b'_n) + (a_n) + \mathcal{N}) = ((a'_n) + \mathcal{N})((b'_n) + \mathcal{N}).$$

■ **0.2.59.** Se consideră pe $\mathbb{R}$ operațiile definite la 0.2.55:

$+: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cdot: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, unde:

$$+: (\alpha, \beta) \rightarrow \alpha + \beta \text{ și } \cdot: (\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \cdot \beta.$$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este un câmp.

Conform teoremei anterioare, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este inel comutativ, cu unitate. Mai trebuie demonstrat că orice $\alpha \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ are invers în $\mathbb{R}$ în raport cu înmulțirea.

Fie $\alpha = (a_n) + \mathcal{N} \neq \mathcal{N}$, adică $(a_n) \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{N}$. Va trebui să determinăm un șir **CAUCHY** (b_n) încât $\beta = (b_n) + \mathcal{N}$ să aibă proprietatea $\alpha \cdot \beta = \bar{1}$ adică $(a_n b_n) + \mathcal{N} = (1_n) + \mathcal{N}$ sau încă $(a_n b_n) - (1_n) \in \mathcal{N}$.

Cum (a_n) nu este un şir nul, există un număr rațional $e \in \mathbb{Q}_+$ astfel încât pentru orice $r \in \mathbb{N}^*$, există numere naturale $s > r$ pentru care $|a_n| > e$. Pentru toți $p, q > N\left(\frac{e}{2}\right)$ avem $|a_p - a_q| < \frac{e}{2}$.

Fie $s > N\left(\frac{1}{2}e\right)$ astfel că $|a_s| \geq e$. Atunci, pentru p arbitrar, $p \geq N\left(\frac{e}{2}\right)$, avem:

$$e \leq |a_s| = |a_s - a_p + a_p| \leq |a_s - a_p| + |a_p| < \frac{1}{2}e + |a_p|.$$

Deci $|a_p| > \frac{e}{2}$, dacă $p \geq N\left(\frac{e}{2}\right)$. Notăm $m = N\left(\frac{e}{2}\right)$ și fie $b_1 = b_2 = \dots = b_{m-1} = 1$ și $b_p = \frac{1}{a_p}$ dacă $p \geq m$.

Avem: $(a_n b_n) = (a_1, \dots, a_{m-1}, 1, 1, \dots)$ și deci $(a_n b_n - 1_n) = (a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_{m-1} - 1, 0, 0, \dots) \in \mathcal{N}$.

Să arătăm acum că şirul $(b_n) \in \mathcal{C}$. Dacă $p, q \geq N\left(\frac{e}{2}\right)$, atunci:

$$|b_p - b_q| = \left| \frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_q} \right| = \frac{1}{|a_p|} \cdot \frac{1}{|a_q|} \cdot |a_p - a_q| < \frac{2}{e} \cdot \frac{2}{e} \cdot |a_p - a_q|.$$

În consecință, dacă c este arbitrar în $\mathbb{Q}_+$, luând $p, q \geq \max\left\{N\left(\frac{e}{2}\right), N\left(\frac{e^2 \cdot c}{2}\right)\right\}$ avem $|b_p - b_q| < c$.

■ **0.2.60.** Se spune că elementul $\alpha = (a_n) + \mathcal{N}$ din $\mathbb{R}$ este *pozitiv* și notăm $\alpha \in \mathbb{R}_+$ dacă există $r \in \mathbb{Q}_+$ și un număr natural $P(r)$, încât $n > P(r) \Rightarrow a_n > r$.

Se spune că α este *negativ* dacă există $r \in \mathbb{Q}_+$ și un număr natural $P(r)$, încât $n > P(r) \Rightarrow a_n < -r$; notăm acum $\alpha \in \mathbb{R}_-$.

1° $\mathbb{R}_+$ și $\mathbb{R}_-$ sunt submulțimi disjuncte ale lui $\mathbb{R}$.

2° $\alpha \in \mathbb{R}_- \Rightarrow -\alpha \in \mathbb{R}_+$;

3° $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-) = \{\bar{0}\}$;

4° $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{R}_+$ și $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}_+$.

Demonstrațiile decurg pe baza definiției.

Observație. Se observă că definițiile pentru număr real pozitiv și negativ sunt independente de reprezentantul (a_n) pentru $\alpha \in \mathbb{R}$.

■ **0.2.61.** Să se demonstreze următoarele:

1° $\alpha^2 \in \mathbb{R}_+$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{\bar{0}\}$;

2° $\bar{1} \in \mathbb{R}_+$;

3° $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \beta \in \mathbb{R}_+$.

1° Dacă $\alpha \in \mathbb{R}_+$, atunci $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2 \in \mathbb{R}_+$, dacă $\alpha \in \mathbb{R}_-$, atunci $-\alpha \in \mathbb{R}_+$ și $(-\alpha) \cdot (-\alpha) = \alpha^2 \in \mathbb{R}_+$.

2° $\bar{1} = \bar{1} \cdot \bar{1} \in \mathbb{R}_+$.

3° Dacă $\beta \notin \mathbb{R}_+$, putem avea $\beta = \bar{0}$ și $\alpha \cdot \beta \notin \mathbb{R}_+$ sau $\beta \in \mathbb{R}_-$ și $-\beta \in \mathbb{R}_+$, astfel că $\alpha(-\beta) = -(\alpha \cdot \beta) \in \mathbb{R}_+$, contrar ipotezei.

■ **0.2.62.** Pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ scriem $\alpha < \beta$ dacă $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$ și $\alpha \leq \beta$ dacă $\alpha < \beta$ sau $\alpha = \beta$. Astfel se introduce relația binară $\leq$ pe $\mathbb{R}$.

Mulțimea $(\mathbb{R}, \leq)$ este total ordonată și relația de ordine $\leq$ este compatibilă cu operațiile din câmpul $\mathbb{R}$.

Avem $\alpha \leq \alpha$ conform definiției. Dacă $\alpha \leq \beta$, $\beta \leq \alpha$, avem $\alpha = \beta$. În caz contrar, $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$ și $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$, $-(\beta - \alpha) \in \mathbb{R}_+$, ceea ce este absurd.

Proprietatea de tranzitivitate este imediată.

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; atunci $\beta + \alpha$ este în $\mathbb{R}_+$, în $\{\bar{0}\}$ sau în $\mathbb{R}_-$ și numai una din aceste mulțimi, deci avem $\alpha < \beta$ sau $\alpha = \beta$ sau $\beta < \alpha$ și numai una dintre aceste relații. Așadar, $(\mathbb{R}, \leq)$ este o mulțime total ordonată.

Să arătăm acum că:

$$\alpha < \beta, \gamma \leq \delta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta,$$

$$\alpha < \beta, \gamma > \bar{0} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma.$$

Într-adevăr, din $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$, $\delta - \gamma \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ rezultă $\beta + \delta - (\alpha + \gamma) \in \mathbb{R}_+$.

De asemenea, $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$, $\gamma \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow (\beta - \alpha)\gamma = \beta \cdot \gamma - \alpha \cdot \gamma \in \mathbb{R}_+$.

Așadar, $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ este un câmp ordonat.

■ **0.2.63.** Câmpul numerelor reale $\mathbb{R}$ conține un subcâmp asemenea cu câmpul numerelor raționale $\mathbb{Q}$.

Mai întâi se observă că $n \cdot \bar{1} \neq \bar{0}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Într-adevăr, $\bar{1} + \bar{1} + \dots + \bar{1} = n \cdot \bar{1} \in \mathbb{R}_+$.

Așadar $\mathbb{R}$ este de caracteristică zero.

Considerăm aplicația $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f\left(\frac{m}{n}\right) = (m \cdot \bar{1}) \times (n \cdot \bar{1})^{-1} \cdot f$ este morfism de grupuri, deoarece:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) &= f\left(\frac{mq + pn}{nq}\right) = [(mq + pn)\bar{1}] \cdot [(nq)\bar{1}]^{-1} = \\ &= (m \cdot \bar{1})(n \cdot \bar{1})^{-1} + (p \cdot \bar{1})(q \cdot \bar{1})^{-1} = f\left(\frac{m}{n}\right) + f\left(\frac{p}{q}\right). \end{aligned}$$

În mod analog, $f\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot f\left(\frac{p}{q}\right)$.

Dacă arătăm că f este aplicație injectivă, va rezulta că imaginea lui $\mathbb{Q}$ prin f este subcâmp în $\mathbb{R}$. În acest scop este ușor să arătăm că f are proprietatea $f(m) = f(n) \Rightarrow m = n$ numai pentru întregi raționali. Dar $f(m) = f(n) \Rightarrow m \cdot \bar{1} = n \cdot \bar{1} \Rightarrow m = n$.

Așadar, $f: \mathbb{Q} \rightarrow f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$ este izomorfism de câmpuri. Să arătăm că f este asemănare. În acest scop să observăm că pentru $\frac{m}{n}, m > 0, n > 0$ avem $\frac{m}{n} > 0$ și $f\left(\frac{m}{n}\right) = (m \cdot \bar{1}) \cdot (n \cdot \bar{1})^{-1}$ cu $m \cdot \bar{1} \in \mathbb{R}_+, n \cdot \bar{1} \in \mathbb{R}_+$. Deci $f\left(\frac{m}{n}\right) \in \mathbb{R}_+$. Dacă $a < b$ în $\mathbb{Q}$, atunci $b - a \in \mathbb{Q}_+$ și $f(b - a) = f(b) - f(a) \in \mathbb{R}_+$, deci $f(a) < f(b)$.

Observație. Pe baza acestei teoreme putem nota: $\bar{a} = f(a), \forall a \in \mathbb{Q}$.

■ 0.2.64. Câmpul numerelor reale $\mathbb{R}$ este arhimedian.

Fie $\alpha \in \mathbb{R}_+$ și $\beta \in \mathbb{R}$ două numere reale. Să arătăm că există $n \in \mathbb{N}$ așa ca $n \cdot \alpha > \beta$, ($n \cdot \alpha$ fiind $\alpha + \alpha + \dots + \alpha$, n termeni).

Dacă $\beta < \alpha$, atunci existența lui n este evidentă.

Fie $\bar{0} < \alpha < \beta$. Se vede ușor că există $e \in \mathbb{Q}_+$ așa ca $\bar{e} = (e, e, \dots) + \mathcal{N}$ are proprietatea $0 < e < \alpha$. Fie $\beta = (b_n) + \mathcal{N}$. Șirul (b_n) fiind mărginit, există $d \in \mathbb{Q}$ încât $\beta < \bar{d}$. Numerelor raționale $e > 0$ și d le putem aplica axioma lui

ARHIMEDE: există $n \in \mathbb{N}^*$ încât $ne > d$; urmează $n\bar{e} > \bar{d}$. Atunci $n\alpha > n\bar{e} > \bar{d} > \beta$.

■ 0.2.65. Se spune că șirul $(a_n) \in \mathbb{Q}$ are limită $b \in \mathbb{Q}$ și scriem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ sau $a_n \rightarrow b$, dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ există un număr natural $N(\varepsilon)$ încât $|a_n - b| < \varepsilon$, pentru toți $n \geq N(\varepsilon)$.

Orice șir de numere raționale, care are limită, este șir **CAUCHY**.

Demonstrația este elementară.

Observații.

1^o Se construiesc ușor exemple de șiruri **CAUCHY** de numere raționale care nu au limită. Din acest motiv se spune despre $\mathbb{Q}$ că nu este “complet”.

2^o Noțiunile de valoare absolută, șir **CAUCHY** și de șir cu limită se extind imediat la $\mathbb{R}$. Cu noțiunile astfel extinse, se formulează teorema următoare.

■ 0.2.66. Câmpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale este “complet” adică orice șir **CAUCHY** de numere reale admite limită în $\mathbb{R}$.

Fie (α_p) un șir **CAUCHY** în $\mathbb{R}$. Pentru fiecare indice p fixat din $\mathbb{N}^*$, α_p este deci un număr real pentru care putem alege un reprezentant $(a_{p,n})$, șir **CAUCHY** în $\mathbb{Q}$. Să considerăm acum pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ numărul rațional $b_n = a_{n,n}$. Pe baza unor detalii tehnice pe care le oțim, constatăm că șirul (b_n) de numere raționale este **CAUCHY** și reprezintă deci un număr real β . Se demonstrează în final că are loc $\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_p = \beta$.

Observații.

1^o Aplicând câmpului $\mathbb{R}$ aceeași construcție pe care am aplicat-o lui $\mathbb{Q}$ ca să obținem $\mathbb{R}$, se determină un câmp $\bar{\mathbb{R}}$, care însă este asemenea cu $\mathbb{R}$. Urmează că extensia lui $\mathbb{Q}$, obținută pe calea indicată anterior, este unică până la un izomorfism.

2^o O consecință a acestei teoreme este rezultatul numit *axioma marginii superioare*:

Orice submulțime nevidă majorată a lui $\mathbb{R}$ posedă un cel mai mic majorant.

■ 0.2.67. Se definește mulțimea numerelor complexe ca fiind:

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}, \text{ cu proprietatea } i^2 = -1$$

și pentru care operațiile de adunare și de înmulțire se definesc astfel:

$$\forall z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C},$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2), \quad z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1).$$

$\{\mathbb{C}, +, \cdot\}$ este câmp.

Se demonstrează ușor că $\mathbb{C}$ este inel comutativ cu unitate. Mai trebuie dovedit că pentru orice $a + ib \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, unde $0 = 0 + i \cdot 0$, există un invers și acesta este din $\mathbb{C}$.

Se poate demonstra că acesta este $\frac{a}{a^2+b^2} - i \cdot \frac{b}{a^2+b^2}$.

Observație. Pentru numărul complex $z = a + ib \in \mathbb{C}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, a se numește *partea reală*, iar b se numește *partea imaginară* a numărului complex considerat.

■ **0.2.68.** Câmpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe conține un subcâmp izomorf cu câmpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale.

Aplicația $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definită prin $f(a) = a + 0 \cdot i$ are proprietățile:

$$f(a + b) = f(a) + f(b), \quad f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

și este injectivă.

■ **0.2.69.** Nu există o relație de ordine totală pe $\mathbb{C}$ compatibilă cu operațiile din $\mathbb{C}$.

Dacă se presupune că ar exista o astfel de relație, pe care o notăm cu $\leq$, atunci avem fie $0 < i$ sau $i < 0$.

Cum $\leq$ este compatibilă cu operațiile, din $0 < i$ rezultă $i \cdot 0 < i^2$ sau $0 < -1$, ceea ce este absurd deoarece restricția lui $\leq$ la numerele de forma $a + 0 \cdot i$ dă relația de totală ordonare pe $\mathbb{R}$.

Dacă $i < 0$, atunci $-i > 0$ și $(-i) \cdot (-i) > 0 \Rightarrow -1 > 0$, de asemenea absurd.

■ **0.2.70.** Mulțimea $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ este un câmp algebric închis, adică orice ecuație algebrică cu coeficienți din $\mathbb{C}$ are rădăcinile în $\mathbb{C}$.

Cuprins			
Preliminarii	Calcul diferențial	Calcul integral	Anexe
Mulțimi, relații, funcții * Mulțimi de numere * Topologie pe $\mathbb{R}$ * Inegalități * Șiruri			

Topologie pe $\mathbb{R}$

■ **0.3..** Să se demonstreze următoarele proprietăți ale mulțimii numerelor reale:

$$1^o \forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x;$$

$$2^o \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \Leftrightarrow -x \leq 0;$$

$$3^o \forall x, y, x_1, y_1 \in \mathbb{R}, x \leq x_1 \wedge y \leq y_1 \Rightarrow x + y \leq x_1 + y_1;$$

$$4^o \forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq 0 \wedge y \leq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0;$$

$$5^o \forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y \wedge z \leq 0 \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z.$$

1^o Fie $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x \leq y$. Adunând în ambii membri $(-x)$ avem:

$$x + (-x) \leq y + (-x) \Rightarrow 0 \leq y - x.$$

Adunând apoi în cei doi membri $(-y)$, se obține:

$$-y \leq y - x + (-y) \Rightarrow -y \leq -x.$$

În mod similar se demonstrează și implicația inversă.

2^o Fie $x \in \mathbb{R}, 0 \leq x$. Adunând elementul $(-x)$ în ambii membri ai inegalității de mai sus, se obține:

$$-x \leq x + (-x) \Rightarrow -x \leq 0.$$

În mod similar se demonstrează și cealaltă implicație.

3^o Fie $x, y, x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ cu $x \leq x_1$ și $y \leq y_1$. În prima inegalitate adunăm y , iar în cea de-a doua adunăm x_1 și se obține:

$$x + y \leq x_1 + y \text{ și } y + x_1 \leq y_1 + x_1 \Leftrightarrow x_1 + y \leq x_1 + y_1.$$

Din tranzitivitatea relației de ordine avem: $x + y \leq x_1 + y_1$.

4^o

5^o

■ **0.3..** Fie $X(\leq)$ o mulțime ordonată și o submulțime $A \subseteq X$. Vom spune că $M \in X$ (respectiv $m \in X$) este un *majorant* (respectiv *minorant*) al mulțimii A dacă $x \leq M$ (respectiv $m \leq x$), $\forall x \in A$.

O mulțime care posedă majoranți și minoranți se numește *mărginită*.

Orice submulțime nevidă minorată a lui $\mathbb{R}$ posedă margine inferioară.

Mulțimea $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, fiind minorată, rezultă că $(-A)$ este majorată și se aplică axioma marginii superioare: Există $\sup(-A)$ cu proprietățile:

$$\begin{cases} a) -a \leq \sup(-A), \forall a \in A \\ b) \forall \varepsilon > 0 \exists (-a_\varepsilon) \in (-A) \text{ a.î. } (-a_\varepsilon) > \sup(-A) - \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} a') a \geq -\sup(-A), \forall a \in A \\ b') \forall \varepsilon > 0 \exists a_\varepsilon \in A \text{ a.î. } a_\varepsilon < -\sup(-A) + \varepsilon \end{cases}$$

Din $a')$ și $b')$ rezultă $\exists \inf A = -\sup(-A)$.

Corolar. Orice mulțime mărginită de numere reale posedă (în $\mathbb{R}$) margine superioară și margine inferioară.

■ **0.3..** Mulțimea $\mathbb{Q}$ este densă în sensul ordinii pe $\mathbb{R}$.

Fie $a, b \in \mathbb{Q}$ cu $a < b$. Trebuie să arătăm că există un $c \in \mathbb{Q}$ a.î. $a < c < b$. Luăm $c = \frac{a+b}{2}$.

■ **0.3..** Orice număr real este egal cu marginea superioară a mulțimii numerelor raționale mai mici decât acesta.

Trebuie să demonstrăm că $\forall x \in \mathbb{R}, x = \sup\{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}$.

Fie $x \in \mathbb{R}$ fixat și $A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}$. Pentru elementul $(-x) \in \mathbb{R}$, conform axiomei lui **ARHIMEDE**, există un $n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $n_0 > -x$, ceea ce este echivalent cu $-n_0 < x$.

Deoarece $n_0 \in \mathbb{N}$ rezultă că $(-n_0) \in \mathbb{N}$ rezultă că $(-n_0) \in \mathbb{Z}$ deci $(-n_0) \in A$, adică $A \neq \emptyset$. Mulțimea A fiind majorată (x este un majorant) conform axiomei marginii superioare, rezultă că există un $a \in \mathbb{R}$, $a = \sup A$, ($a \leq x$). Prin reducere la absurd, presupunem că $a \neq x$, adică $a < x$, ceea ce este echivalent cu $x - a > 0$. Conform problemei anterioare, există un $s \in \mathbb{Q}$ a.î. $0 < s < x - a$. Din teorema de caracterizare a marginii superioare, pentru $\varepsilon = s$, rezultă existența unui element $r_s \in A$ a.î. $r_s > a - s$, ceea ce este echivalent cu $r_s + s > a$.

Din relația $r_s + s < a + (x - a) = x$ și $r_s + s \in \mathbb{Q}$ rezultă că $r_s + s \in A$ deci $r_s + s \leq a$, inegalitate opusă celei obținute mai sus. Deci presupunerea făcută este falsă. Rezultă că $a = x$ deci $x = \sup A$.

■ 0.3..

■ 0.3..

■ 0.3..

■ 0.3..

Cuprins			
Preliminarii	Calcul diferențial	Calcul integral	Anexe
Mulțimi, relații, funcții * Mulțimi de numere * Topologie pe $\mathbb{R}$ * Inegalități * Șiruri			

[Inegalități](#)

■ 0.4..

■ 0.4..

■ 0.4.. Inegalitatea lui **CAUCHY-BUNIAKOWSKI-SCHWARZ**. Fie $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Atunci :

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}.$$

■ 0.4..

■ 0.4..

Cuprins			
Preliminarii	Calcul diferențial	Calcul integral	Anexe
Mulțimi, relații, funcții * Mulțimi de numere * Topologie pe $\mathbb{R}$ * Inegalități * Șiruri			

Șiruri

■ 0.5.. Se numește *șir de numere reale* o funcție reală definită pe mulțimea numerelor naturale: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, se va nota șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sau $(a_n)_{n \geq 1}$ dacă $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$.

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ se numește *convergent* cu limita $a \in \mathbb{R}$ dacă în orice vecinătate a lui a se află toți termenii șirului cu excepția unui număr finit. În acest caz, se notează $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ sau $a_n \rightarrow a$ pentru $n \rightarrow \infty$.

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este convergent cu limita $a \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă:
 $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ are loc inegalitatea $|a_n - a| < \varepsilon$.

Demonstrația este evidentă.

■ 0.5.. (Unicitatea limitei unui șir) Limita unui șir real, dacă există, este unică.

Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Presupunem prin absurd că a, b sunt limite ale acestuia și că $a \neq b$. De aici rezultă că există o vecinătate V_a a lui a și o vecinătate V_b a lui b astfel încât $V_a \cap V_b \neq \emptyset$. Din teorema anterioară rezultă că există $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $a_n \in V_a$, $\forall n \geq n_a$ și $a_n \in V_b$, $\forall n \geq n_b$. Deci $a_n \in V_a \cap V_b$, $\forall n \geq n_a + n_b$, ceea ce contrazice faptul că $V_a \cap V_b \neq \emptyset$.

■ 0.5.. 1^o Limita șirului definit prin $a_n = \frac{3n+1}{4n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ este $\frac{3}{4}$. Să se determine un rang începând de la care diferența dintre limita șirului și a termenului general să fie mai mică decât 1/100.

2^o Limita șirului $a_n = \frac{2^n + (-1)^n}{5^n}$ este zero.

1^o Să considerăm un număr $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, arbitrar, momentan fixat.

Vom determina un rang $n_0(\varepsilon)$ a.î.

$$\left| \frac{3n+1}{4n+1} - \frac{3}{4} \right| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon).$$

Inegalitatea de mai sus se mai poate scrie: $\frac{1}{4(4n+1)} < \varepsilon$ sau, în mod echivalent: $n > \frac{1-4\varepsilon}{16\varepsilon}$.

Notând:

$$n_0(\varepsilon) = \begin{cases} \left\lceil \frac{1-4\varepsilon}{16\varepsilon} \right\rceil + 1, & \text{dacă } 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4} \\ 0, & \text{dacă } \varepsilon > \frac{1}{4} \end{cases}$$

rezultă că pentru $n \geq n_0(\varepsilon)$ avem: $\left| a_n - \frac{3}{4} \right| < \varepsilon$, unde $a_n = \frac{3n+1}{4n+1}$.

Pentru a determina rangul începând de la care diferența dintre limita șirului și termenul general este mai mică decât $1/100$, calculăm $n_0(1/100) = 7$. Deci termenii $a_7, a_8, \dots$ diferă de limita $3/4$ cu mai puțin de $1/100$.

2^o Avem: $\left| \frac{2^n + (-1)^n}{5^n} \right| \leq \frac{2^n + 1}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

Pentru un $\varepsilon > 0$ fixat, impunem condițiile $(2/5)^n < \varepsilon/2$ și $(1/5)^n < \varepsilon/2$.

Prima inegalitate este verificată pentru $n \geq \widetilde{n}_0(\varepsilon)$, unde:

$$\widetilde{n}_0(\varepsilon) = \begin{cases} \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)} \right\rceil + 1, & \text{dacă } 0 < \varepsilon \leq 2 \\ 0, & \text{dacă } \varepsilon > 2 \end{cases}$$

A doua inegalitate se verifică de îndată ce $n \geq \widetilde{n}_0(\varepsilon)$, unde:

$$\widetilde{n}_0(\varepsilon) = \begin{cases} \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{\ln 5} \right\rceil + 1, & \text{dacă } 0 < \varepsilon \leq 2 \\ 0, & \text{dacă } \varepsilon > 2 \end{cases}$$

Luând $n_0(\varepsilon) = \max\{\widetilde{n}_0(\varepsilon), \widetilde{n}_0(\varepsilon)\}$ rezultă că $\left| 2^n + \frac{(-1)^n}{5^n} \right| < \varepsilon$ pentru $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$.

■ 0.5..

■ **0.5..** Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limita $+\infty$ ($-\infty$) dacă orice vecinătate a punctului $+\infty$ ($-\infty$) conține toți termenii șirului cu excepția a eventual unui număr finit al acestora.

■ **0.5..** Un șir care nu este convergent se numește *divergent*.

Șirul $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ este divergent.

Presupunem că $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și fie x limita sa.

Atunci există un $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \frac{1}{2}$, $\forall n \geq N$.

Luând n par (respectiv impar), $n \geq N$, obținem: $|1 - x| < \frac{1}{2}$, respectiv $|-1 - x| < \frac{1}{2}$, de unde rezultă $x > \frac{1}{2}$ respectiv $x < -\frac{1}{2}$, ceea ce este absurd.

■ **0.5..** Fie $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Atunci $x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci conform axiomei lui **ARHIMEDE**, există un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu $n_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$, deci $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$ și deci $x_n \rightarrow 0$.

■ 0.5..

■ 0.5..

■ 0.5..

<u>Cuprins</u>			
<u>Preliminarii</u>	<u>Calcul diferencial</u>	<u>Calcul integral</u>	<u>Anexe</u>
Mulțimi, relații, funcții Mulțimi de numere Topologie pe $\mathbb{R}$ Inegalități Șiruri	Limită a unei funcții Continuitate Derivată		Notatii utilizate Simboluri Resurse Index Note

Calcul diferențial

Cuprins			
Preliminarii	Calcul diferențial	Calcul integral	Anexe
Limită a unei funcții * Continuitate * Derivată			

Limită a unei funcții

■ **2.1..** Fie o funcție $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, unde $A \subseteq \mathbb{R}$ și un punct $x_0 \in A'[\overline{\mathbb{R}}]$. Spunem că f are limită în x_0 egală cu l și vom scrie $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ dacă:

$\forall (x_n)_{n \geq 1}$ un șir din $A \setminus \{x_0\}$, $x_n \rightarrow x_0$, rezultă $f(x_n) \rightarrow l$.

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'[\overline{\mathbb{R}}]$ un punct, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow (\exists)/(\forall) V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{A \cap V}(x) = l$.

■ **2.1..**

■ **2.1..**

■ **2.1..**

■ **2.1..**

■ **2.1..**

<u>Cuprins</u>			
<u>Preliminarii</u>	<u>Calcul diferențial</u>	<u>Calcul integral</u>	<u>Anexe</u>
<u>Limită a unei funcții</u> ★ <u>Continuitate</u> ★ <u>Derivată</u>			

Continuitate

<u>Cuprins</u>			
<u>Preliminarii</u>	<u>Calcul diferențial</u>	<u>Calcul integral</u>	<u>Anexe</u>
<u>Limită a unei funcții</u> ★ <u>Continuitate</u> ★ <u>Derivată</u>			

[Derivată](#)

<u>Cuprins</u>			
<u>Preliminarii</u>	<u>Calcul diferencial</u>	<u>Calcul integral</u>	<u>Anexe</u>
Mulțimi, relații, funcții Mulțimi de numere Topologie pe $\mathbb{R}$ Inegalități Șiruri	Limită a unei funcții Continuitate Derivată		Notatii utilizate Simboluri Resurse Index Note

Calcul integral

Cuprins			
Preliminarii	Calcul diferencial	Calcul integral	Anexe
Mulțimi, relații, funcții Mulțimi de numere Topologie pe $\mathbb{R}$ Inegalități Șiruri	Limită a unei funcții Continuitate Derivată		Notatii utilizate Simboluri Resurse Index Note

Anexe

Cuprins			
Preliminarii	Calcul diferențial	Calcul integral	Anexe
Notatii utilizate * Simboluri * Resurse * Index * Note			

Notatii utilizate

- $\vee \wedge \rightarrow \leftrightarrow$ operatori logici (conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența)
- $p \Rightarrow q$ propoziția $p \rightarrow q$ este adevărată;
- $p \Leftrightarrow q$ propoziția $p \leftrightarrow q$ este adevărată;
- $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \vee B$ reuniunea, intersecție, diferența, reuniunea disjunctă a mulțimilor A, B ;
- $(\forall)$ cuantificatorul universal (*oricare ar fi*);
- $(\exists)$ cuantificatorul universal (*există*);
- $\mathcal{P}(A)$ mulțimea părților mulțimii A ;
- $\bar{A}$ complementara mulțimii A ;
- $A \sim B$ mulțimile A, B sunt echipotente;
- $\bar{\bar{A}}, \text{card } A$ cardinalul mulțimii A ;
- $A \approx B$ mulțimile A, B sunt asemenea;
- $\mathbb{Z}$ mulțimea numerelor ordinale;
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mulțimea numerelor, respectiv, naturale, întregi, raționale, reale, complexe;
- n^* succesorul numărului natural n ;
- $A / \approx$ mulțimea cât (factor) a mulțimii A prin relația de echivalență $\approx$;

Cuprins			
Preliminarii	Calcul diferențial	Calcul integral	Anexe
Notatii utilizate * Simboluri * Resurse * Index * Note			

Simboluri

!!	!!	...	...	::	::	:	:	:	:
\above	⊕	\acute	´	\aleph	ℵ	\alpha	α	\Alpha	A
\aoint	⧻	\approx	≈	\asmash	⤵	\ast	*	\asymp	≈
\atop									
\bar	-	\Bar	=	\because	∴	\begin	⎵	\below	⊣
\Beta	B	\beth	⋈	\bigcap	∩	\bigcup	∪	\bigodot	⊙
\bigoplus									
\bigotimes	⊗			\bigsqcup	⊔	\bigvee	∨	\bigwedge	∧
\binomial									
\bowtie	⋈	\box	□	\boxdot	⊠	\boxminus	⊖	\boxplus	⊕
\bra	⟨	\break	↵	\breve	˘	\bullet	·		
\cap	∩	\cases	Ⓒ	\cbrt	∛	\cdot	·	\cdots	...
\circ	°	\close	┘	\clubsuit	♣	\coint	⧻	\cong	≅
								\coprod	∐
								\cup	∪
\dalet	⌞	\daleth	⌞	\dashv	⊣	\dd	ℳ	\Dd	ℳ
\ddot	¨	\ddots	⋮	\defeq	≐	\degC	°C	\degF	°F
\degree	°								
\delta	δ	\Delta	Δ						
\Deltaeq	≐	\diamond	◊	\diamondsuit	♠	\div	÷	\dot	·
\doteq	≐	\dots	...						
\doubleA	A	\doubleB	B	\doubleZ	Z	\downarrow	↓	\Downarrow	⇓
\dmsmash	⇓								
\ee	@	\ell	ℓ	\emptyset	∅	\emsp		\end	⌋
\ensp									
\epsilon	ε	\Epsilon	E	\eqarray	■	\equiv	≡	\eta	η
\Eta	H	\exists	∃	\forall	∀	\fraktur	α		
\frakturA	ℳ	\frakturB	ℳ	\frakturC	ℳ	\frakturZ	ℳ		
\frown	⋈	\funcapply	⌈						
\G	Γ	\Gamma	Γ	\ge	≥	\geq	≥	\gets	←
\gg	≫	\gimel	ℵ	\grave	˘				
\hookleftarrow	↵	\hookrightarrow	→						
\hsmash	↔	\hvec	→						
\identitymatrix	(■(1&0&0@0&1&0@0&0&1))	\ii	ℳ	\iiiint	∫∫∫∫	\iiint	∫∫∫	\iint	∫∫
\int	∫	\Im	ℳ	\imath	I	\in	∈	\inc	Δ
\integral	1/2π ∫_0^2π ∫ dθ/(a+b sin θ)=1/√(a^2-b^2)	\iota	ι	\lota	I	\lota	I	\lota	I
\j	j	\jmath	ℳ	\jmath	ℳ				
\kappa	κ	\Kappa	K	\ket	⟩				
\lambda	λ	\Lambda	Λ	\langle	⟨	\lbrack	⌊	\lbrace	{
\lbrack	[	\lceil	⌈						
\ldivide	/	\ldots	...	\le	≤	\left	⌊	\leftarrow	←
\Leftarrow	←	\Leftrightarrow	↔	\Leftrightarrow	↔	\leq	≤	\lfloor	⌊
\lhvec	→	\limit	lim_(n→∞)	\ll	≪	\lmoust	⌋	\Longleftarrow	⇐
\Longleftarrow	⇐	\Leftrightarrow	↔	\Longleftarrow	⇐	\Longleftarrow	⇐		

$\Longrightarrow$ $\Rightarrow$??? $\Lrhrar$ $\lvec$

$\mapsto$ $\rightarrow$ $\matrix$ $\blacksquare$ $\medsp$ $???$ $\mid$ $\middle$ $\mathfrak{M}$ $\models$ $\mp$ μ
 $\Mu$ M

∇ ∇ $\nbsp$ $\neq$ $\nearrow$ $\neg$ $\neq$ $\ni$ $\ni$ $\|$
 $\not\subset$ $\notin$ $\notin$ ν N $\nwarrow$

$\circ$ $\circ$ $\odot$ $\odot$ $\oint$ $\oint$ $\oint$ $\oint$ ω Ω
 $\ominus$ $\open$ $\oplus$ $\otimes$ $\overline{}$ $\overbrace{}$ $\overbrace{}$
 $\overline{}$ $\overparen{}$ $\overset{\sim}{}$

$\parallel$ ∂ $\perp$ ϕ Φ $\pm$ $\pmatrix$ $\prime$
 $\prime$ $\prime$ $\prec$ $\preceq$ $\prime$ $\prod$ $\propto$ ψ
 Ψ Ψ

$\sqrt[4]{}$ $\text{quadratic } x=(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/2a$

$\rangle$ $\rangle$ $:$ $\}$ $]$ $\lceil$ $\dots$ $\Re$
 $\mathfrak{R}$ $\square$ $\lfloor$ ρ ρ $\vec{}$ $\rightarrow$
 $\rightarrow$ $\Rightarrow$ $\rightarrow$ $\rightarrow$
 $\l$ $\sqrt{x}$

$\scripta$ $\scriptA$ $\scriptb$ $\scriptB$ $\scriptc$ $\scriptC$ $\dots$ $\scriptz$
 $\scriptZ$ $\div$ $\div$ $\searrow$ $\setminus$ σ Σ
 $\sim$ $\simeq$ $\smash$ $\smile$ $\spadesuit$ $\sqcap$ $\sqcup$
 $\sqrt{}$ $\subseteq$ $\star$ $\subset$ $\subseteq$ $\succ$
 $\succeq$ $\sum$ $\supset$ $\supseteq$ $\swarrow$

τ T $\therefore$ θ Θ $\thicksp$ $\sim$
 $\times$ $\rightarrow$ T $\leftrightarrow$

$\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$ $\underbrace{}$ $\underbrace{}$ $\underline{}$
 $\underparen$ $\uparrow$ $\Uparrow$ $\uplus$ $\uplus$ Υ

ε φ ϱ ς ϑ $\bar{}$ $\vdash$
 $\vdots$ $\vec{}$ $\vee$ $\vert$ $\|$ $\matrix$ $\mathfrak{n}$ $\thicksp$

$\wedge$ $\wp$ $\wr$

ξ Ξ

ζ Z $\zwnj$

$\sim$ $+$ $-$ $+$ $<$ $<$ $=$ $-$ $>$ $=$ $>$

Simboluri pe categorii

- Alfabetul grec: α α $\Alpha$ A β β $\Beta$ B Γ Γ Γ Γ
 δ δ Δ Δ η η $\Eta$ H ϵ ϵ ι ι ι I
 κ κ $\Kappa$ K
- λ λ Λ Λ μ μ $\Mu$ M ν ν Nu N ρ ρ $\Rho$ P σ σ
 Σ Σ θ θ τ τ Tau T Θ Θ υ υ Υ Υ ψ ψ Ψ Ψ ϕ ϕ
 Φ Φ Φ Φ E χ χ X X ξ ξ Ξ Ξ

[illegible]

<u>Cuprins</u>			
<u>Preliminarii</u>	<u>Calcul diferențial</u>	<u>Calcul integral</u>	<u>Anexe</u>
<u>Notatii utilizate</u> * <u>Simboluri</u> * <u>Resurse</u> * <u>Index</u> * <u>Note</u>			

Resurse

- [Mădălina Roxana Buneci - Curs](#)
- Matepedia.ro
- <http://math.etc.tuiasi.ro/apletea/>
- [Teoreme de Analiză Matematică - I \(teorema Weierstrass-Bolzano\)](#)
- [Teoreme de Analiză Matematică - II \(teorema Borel - Lebesgue\)](#)
- [Bogdan Marcel – Analiză complexă](#)

<u>Cuprins</u>			
<u>Preliminarii</u>	<u>Calcul diferențial</u>	<u>Calcul integral</u>	<u>Anexe</u>
Mulțimi, relații, funcții Mulțimi de numere Topologie pe $\mathbb{R}$ Inegalități Șiruri	Limită a unei funcții Continuitate Derivată		Notatii utilizate Simboluri Resurse Index Note

[0.1.1](#) * [0.1.2](#) * [0.1.3](#) * [0.1.4](#) * [0.1.5](#) * [0.1.6](#) * [0.1.7](#) * [0.1.8](#) * [0.1.9](#) * [0.1.10](#) * [0.1.11](#)
[0.2.1](#) * [0.2.2](#) * [0.2.3](#) * [0.2.4](#) * [0.2.5](#) * [0.2.6](#) * [0.2.7](#) * [0.2.8](#) * [0.2.9](#) * [0.2.10](#) * [0.2.11](#) * [0.2.12](#) * [0.2.13](#) * [0.2.14](#) * [0.2.15](#) ·
[0.2.16](#) · [0.2.17](#) · [0.2.18](#) · [0.2.19](#) · [0.2.20](#) · [0.2.21](#) · [0.2.22](#) · [0.2.23](#) · [0.2.24](#) · [0.2.25](#) · [0.2.26](#) · [0.2.27](#) · [0.2.28](#) · [0.2.29](#) ·
[0.2.30](#) · [0.2.31](#) · [0.2.32](#) · [0.2.33](#) · [0.2.34](#) · [0.2.35](#) · [0.2.36](#) · [0.2.37](#) · [0.2.38](#) · [0.2.39](#) · [0.2.40](#) · [0.2.41](#) · [0.2.42](#) · [0.2.43](#) ·
[0.2.44](#) · [0.2.45](#) · [0.2.46](#) · [0.2.47](#) · [0.2.48](#) · [0.2.49](#) * [0.2.50](#) · [0.2.51](#) * [0.2.52](#) * [0.2.53](#) · [0.2.54](#) · [0.2.55](#) · [0.2.56](#) · [0.2.57](#) ·
[0.2.58](#) · [0.2.59](#) · [0.2.60](#) · [0.2.61](#) · [0.2.62](#) · [0.2.63](#) · [0.2.64](#) * [0.2.65](#) * [0.2.66](#) * [0.2.67](#) * [0.2.68](#) *****

.. . . .

0.3.1 · 0.3.2 · 0.3.3 · 0.3.4 · 0.3.5 · 0.3.6 · 0.3.7 ·Type equation here.

Cuprins			
Preliminarii	Calcul diferențial	Calcul integral	Anexe
Notatii utilizate * Simboluri * Resurse * Index * Note			

[Index](#)

A

- aplicație: [0.1.6](#)
- **ARHIMEDE**, axioma lui $\sim$: [0.2.27](#)
- arhimediană, mulțime $\sim$: [0.2.52](#)
- asemănarea a două mulțimi: [0.2.14](#)
- axioma alegerii: [0.2.16](#)
- axioma lui **ARHIMEDE**: [0.2.27](#)
- [axioma marginii superioare](#):
- axiomele lui **PEANO**: [0.2.22](#)

B

- **BERNSTEIN**, teorema lui $\sim$: [0.2.9](#)

C

- cardinalul unei mulțimi: [0.2.1](#)
- câmp: [0.2.44](#)
- cel mai mic element: [0.2.11](#)
- clasă de echivalență: [0.1.10](#)
- codomeniul unei funcții: [0.1.6](#)
- complementara unei mulțimi: [0.1.3](#)
- compunerea a două funcții: [0.1.8](#)
- corp: [0.2.44](#)

D

- **DE MORGAN**, relațiile lui $\sim$: [0.1.1](#), [0.1.3](#)
- densă, mulțime $\sim$: [0.2.51](#)
- diferența a două numere naturale: [0.2.25](#)
- divizor al lui zero: [0.2.33](#)
- domeniu de definiție al unei funcții: [0.1.6](#)
- domeniu de integritate: [0.2.33](#)

E

- echipotență: [0.2.1](#)
- element neutru: [0.2.24](#)

F

- familie de mulțimi: [0.1.4](#)
- funcție: [0.1.6](#)
- funcție inversabilă: [0.1.8](#)

G

- grup: [0.2.24](#)

H

- **HAUSDORFF**, principiul de maximalitate al lui $\sim$: [0.2.16](#)
- homomorfism de inele: [0.2.38](#)

I

- imaginea unei mulțimi printr-o funcție: [0.1.6](#)
- imaginea reciprocă a unei mulțimi printr-o funcție: [0.1.6](#)
- inducție completă: [0.2.21](#)
- inversa unei funcții: [0.1.8](#)
- inducție matematică: [0.2.21](#), [0.2.22](#)
- inel: [0.2.33](#)
- izomorfism de inele: [0.2.37](#)

L

- lege de compoziție internă: [0.2.4](#)
- lema lui **TUCKER**: [0.2.16](#)
- lema lui **ZORN**: [0.2.16](#)
- limită a unui șir: [0.2.64](#)

M

- modul: [0.2.53](#)
- monoid: [0.2.24](#)
- morfism de inele: [0.2.37](#)
- mulțime: [0.1.2](#)
- mulțimea părților unei mulțimi: [0.1.2](#)
- mulțime asociată unei mulțimi: [0.2.2](#)
- mulțimea numerelor complexe: [0.2.66](#)
- mulțimea numerelor întregi: [0.2.29](#)
- mulțimea numerelor naturale: [0.2.20](#), [0.2.21](#)
- mulțimea numerelor raționale: [0.2.41](#)
- mulțimea părților unei mulțimi: [0.1.2](#)
- mulțime arhimediană: [0.2.52](#)
- mulțimea vidă: [0.1.2](#)
- mulțime bine ordonată: [0.2.11](#)
- mulțime densă: [0.2.51](#)
- mulțime factor (cât) a unei mulțimi printr-o relație de echivalență: [0.1.10](#)
- mulțime ordonată: [0.1.11](#)
- mulțime total ordonată: [0.2.11](#)
- mulțimi asemenea: [0.2.14](#)
- mulțimi echipotente: [0.2.1](#)

N

- număr cardinal: [0.2.1](#)
- număr complex: [0.2.66](#)
- număr întreg: [0.2.29](#)
- număr natural: [0.2.20](#), [0.2.21](#), [0.2.22](#)
- număr ordinal: [0.2.16](#)
- număr rațional: [0.2.41](#)

O

- omomorfism de inele: [0.2.38](#)

- operator logic: [0.1.1](#)
- operație: [0.2.4](#)

P

- parte stabilă (față de o operație): [0.2.4](#)
- **PEANO**, axiomele lui $\sim$: [0.2.22](#)
- preimaginea unei mulțimi printr-o funcție: [0.1.6](#)
- prim element: [0.2.11](#)
- principiul de maximalitate **HAUSDORFF**: [0.2.16](#)
- principiul inducției: [0.2.21](#), [0.2.22](#)
- principiul inducției transfinite: [0.2.12](#), [0.2.21](#)
- produs a două numere cardinale: [0.2.6](#)
- produs cartezian: [0.1.5](#)
- propoziție: [0.1.1](#)

R

- relație binară: [0.1.6](#)
- relație de echivalență: [0.1.9](#)
- relație de ordine (parțială): [0.1.11](#)
- relație de ordine totală: [0.2.11](#)
- relațiile lui **DE MORGAN**: [0.1.1](#), [0.1.3](#)
- reuniune disjunctă a două mulțimi: [0.2.3](#)
- ridicarea la putere a unui număr cardinal: [0.2.7](#)

S

- semidomeniu de integritate: [0.2.24](#)
- semidreaptă: [0.2.12](#)
- semigrup: [0.2.24](#)
- semi-inel: [0.2.24](#)
- succesorul unui număr natural: [0.2.22](#)
- suma a două numere cardinale: [0.2.4](#)

Ș

- șir: [0.2.54](#)
- șir **CAUCHY**: [0.2.54](#)

T

- tautologie: [0.1.1](#)
- teorema bunei ordonări a lui **ZERMELO**: [0.2.16](#)
- teorema împărțirii cu rest: [0.2.28](#)
- teorema lui **FELIX BERNSTEIN**: [0.2.9](#)
- tipul de ordine a unei mulțimi: [0.2.16](#)
- trihotomie: [0.2.11](#)
- **TUCKER**, lema lui $\sim$: [0.2.16](#)

V

- valoare absolută: [0.2.53](#)
- **ZERMELO**, teorema bunei ordonări a lui $\sim$: [0.2.16](#)



- **ZORN**, lema lui $\sim$: [0.2.16](#)

Cuprins			
Preliminarii	Calcul diferențial	Calcul integral	Anexe
Notatii utilizate ★ Simboluri ★ Resurse ★ Index ★ Note			

Note

ⁱ - John Wilder Tuckey (1915 - 2000), statistician american, vezi: [pagina de la Wikipedia](#).

ⁱⁱ - Felix Hausdorff (1868 - 1942), matematician german, vezi: [pagina la Wikipedia](#).

ⁱⁱⁱ - Max August Zorn (1906 - 1993), matematician german, vezi: [pagina la Wikipedia](#).

^{iv} - Ernst Zermelo (1871 - 1953), matematician german, vezi: [pagina la Wikipedia](#).

Cuprins			
Preliminarii	Calcul diferencial	Calcul integral	Anexe
Mulțimi, relații, funcții Mulțimi de numere Topologie pe $\mathbb{R}$ Inegalități Siruri	Limită a unei funcții Continuitate Derivată		Notatii utilizate Simboluri Resurse Index Note

0.2.6 $\leftarrow$ 0.2.25

0.2.7 $\leftarrow$ 0.2.24

0.2.13 $\leftarrow$ 0.2.22

0.2.16 $\leftarrow$ 0.2.18

0.2.42 $\leftarrow$ 0.2.46 , 0.2.52

0.2.56 $\leftarrow$ 0.2.59

0.2.18 $\rightarrow$ 0.2.16

0.2.22 $\rightarrow$ 0.2.13

0.2.25 $\rightarrow$ 0.2.6 , 0.2.7

0.2.46 $\rightarrow$ 0.2.42

0.2.52 $\rightarrow$ 0.2.42

0.2.59 $\rightarrow$ 0.2.56

