Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Caraş-Severin

REVISTA DE MATEMATICĂ A ELEVILOR ŞI PROFESORILOR DIN JUDEŢUL CARAŞ-SEVERIN

Nr. 32, An XI – 2010

Editura „Neutrino”
Reşiţa, 2010

Titlul: Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din judeţul Caraş-Severin
I.S.S.N. 1584-9481

Mobil: 0741017700
www.neutrino.ro
E-mail: contact@neutrino.ro

CUPRINS

Gânduri

☺ Nu înceta niciodată să zâmbeşti, nici chiar atunci când eşti trist, pentru că nu se ştie cine se poate îndrăgosti de zâmbetul tău.

Gabriel José García Márquez

☺ Nu mă gândesc niciodată la viitor. Oricum vine destul de repede.

Albert Einstein

☺ Încearcă să fii un om de valoare şi nu neapărat un om de succes.

Albert Einstein

☺ Imaginația e mai importantă decât cunoaşterea.

Albert Einstein

☺ Am învățat că toată lumea vrea să trăiască pe vârful unui munte, fără să ştie că adevărata fericire este felul în care urci pantele abrupte spre vârf.

Gabriel José García Márquez

☺ Pune mâna pe o sobă fierbinte un minut şi ți se va părea o oră. Stai cu o fată frumoasă o oră şi ți se va părea un minut. Asta e relativitatea.

Albert Einstein

☺ Nu am niciun talent anume. Sunt doar extraordinar de curios.

Albert Einstein

☺ Sunt două feluri de a-ți trăi viața: unul: de a crede că nu există miracole, altul : de a crede că totul este un miracol.

Albert Einstein

Matematica...altfel

de Ovidiu Bădescu

Partea II. Ce știm despre cifrele romane?

Că de fapt ele au fost copiate de la etrusci și că era un sistem de numerație acrofonic(se scria inițiala primei litere a cuvântului). La început erau doar următoarele patru simboluri:

I(un simplu deget)

X(două mâini privite „în dungă", deci 10 degete)

⊏(inițiala cuvântului *centum*) și

(I) care simboliza 1 000.

De ce a fost atunci nevoie și de **V, L, D**? În primul rând pentru simplificarea scrierii, însă notarea lor astfel nu este întâmplătoare.

Astfel, 5, **X** tăiat orizontal pe jumătate ne dă doi de **V**, din care unul răsturnat. La fel procedăm și cu ⊏. Observați forma „scrijelită" a lui **C**, adică așa cum se scria atunci, și tăindu-l pe orizontală obținem doi de **L**, unul răsturnat iar **(I)** tăiat pe verticală de astă dată la două litere de **D**, dintre care una „în oglindă". Mai târziu, simbolul **(I)** a fost înlocuit de M(mille).

Ca să putem folosi cifrele romane, trebuie cunoscute câteva reguli:

Regula 1: Sunt doar șapte simboluri care poti fi folosite: **I, V, X, L, C, D, M**. *Simbolurile* **I, X, C** *pot fi consecutive de maximum trei ori, iar* **V, L, D** *doar o dată.*

Regula 2: *Dacă un simbol mic se află după un simbol mare, atunci cel mic se adună la cel mare. În acest caz, după simbolul mare se poate afla maxim trei simboluri cu valoare mai mică.*

Regula 3: *Dacă un simbol mic se află în fața unui simbol mare, atunci cel mic se scade din cel mare. În acest caz, în fața unui simbol mare se poate aflǎ doar un singur simbol cu valoare mai mică.*

Regula 4: *În numerologia romană nu exista cifra 0, deși mai târziu i s-a dat acesteia corespondentul* **N,** *de la nul, fără a-l folosi în formarea altor numere.*

Exemplu: CMXCIII = 1000+100+100 – 10 + 3 = 993

Datorită greutății exprimării numerelor foarte mari, acest sistem a fost greu de folosit și de aceea, în mare parte, abandonat. Se mai folosește la ornarea ceasurilor de perete, sau a pendulelor, la numerotarea capitolelor unor cărți sau a claselor de elevi.

Pol și polară față de cerc

Definiție

Fie A, B, C, D patru puncte coliniare. Spunem că C și D sunt conjugate armonic față de punctele A și B dacă $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$.

Observații

1) Dacă E este mijlocul segmentului (AB), iar F cel al lui (CD), se verifică ușor că C și D sunt conjugate armonic față de A și B dacă și numai dacă $EF^2=\frac{1}{4}\cdot\left(AB^2+CD^2\right)$.

2) Dacă C și D sunt conjugate armonic față de A și B, punctele C și D sunt separate de A și B, astfel încât exact unul dintre punctele C și D aparține segmentului (AB), celălalt fiind în afara segmentului (AB).

Definiție

Fie $\mathcal{C}=\mathcal{C}(O;r)$ un cerc, iar $P\in \mathrm{Int}(\mathcal{C})$, $Q\in \mathrm{Ext}(\mathcal{C})$. Spunem că P și Q sunt conjugate armonic față de cercul $\mathcal{C}$ dacă P și Q sunt conjugate armonic față de punctele de intersecție ale dreptei PQ cu cercul $\mathcal{C}$.

Definiție

Două cercuri secante $\mathcal{C}_1(O_1,r_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_2,r_2)$ se numesc ortogonale dacă tangentele duse la $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ într-un punct de intersecție sunt perpendiculare. Mai general, unghiul dintre două cercuri secante este unghiul dintre tangentele la cele două cercuri într-un punct de intersecție.

Observație

O condiție necesară și suficientă ca două cercuri $\mathcal{C}_1(O_1,r_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_2,r_2)$ să fie ortogonale este dată de egalitatea $O_1O_2{}^2=r_1^2+r_2^2$.

Propoziție

Fie $\mathcal{C}=\mathcal{C}(O;r)$ un cerc, iar $P\in \mathrm{Int}(\mathcal{C})$ și $Q\in \mathrm{Ext}(\mathcal{C})$ două puncte în plan. Atunci P și Q sunt conjugate armonic față de cercul $\mathcal{C}$ dacă și numai dacă cercul de diametru $[PQ]$ este ortogonal cercului $\mathcal{C}$.

Demonstrație:
Fie $PQ \cap \mathcal{C} = \{V, W\}$, S - mijlocul segmentului (PQ), iar U mijlocul segmentului (VW). Atunci au loc egalitățile:

$SP^2 = \frac{1}{4} \cdot PQ^2$, $UV^2 = \frac{1}{4} \cdot VW^2 = r^2 - OU^2$, $SO^2 = SU^2 + OU^2$.

Prin urmare P, Q - conjugate față de $\mathcal{C}$ $\Leftrightarrow$ P, Q - conjugate față de V, W

$\Leftrightarrow SU^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(PQ^2 + VW^2\right) \Leftrightarrow SO^2 - OU^2 = SP^2 + r^2 - OU^2 \Leftrightarrow$

$SO^2 = SP^2 + r^2 \Leftrightarrow \mathcal{C}(O, r)$ și $\mathcal{C}\left(S, |SP|\right)$ - ortogonale.

Proprietatea demonstrată mai sus permite extinderea definiției noțiunii de pereche de puncte armonic conjugate față de un cerc la perechi oarecare de puncte din plan.

Definiție
Fie $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$ un cerc, iar P și Q două puncte în plan. P și Q se numesc armonic conjugate față de cercul $\mathcal{C}$ dacă cercul de diametru $[PQ]$ și cercul $\mathcal{C}$ sunt ortogonale.

Propoziție
Două puncte P, Q din plan sunt armonic conjugate față de cercul $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$ dacă și numai dacă $OP^2 + OQ^2 = PQ^2 + 2r^2$. (*)

Demonstrație:
Notând cu S mijlocul segmentului (PQ), din teorema medianei avem că $OS^2 = \frac{1}{4} \cdot \left[2 \cdot \left(OP^2 + OQ^2\right) - PQ^2\right]$. Atunci P, Q - conjugate armonic față de $\mathcal{C}$ $\Leftrightarrow$

$SO^2 = \frac{1}{4} \cdot PQ^2 + r^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(OP^2 + OQ^2\right) - \frac{1}{4} \cdot PQ^2 = \frac{1}{4} \cdot PQ^2 + r^2 \Leftrightarrow$

$OP^2 + OQ^2 = PQ^2 + 2r^2$.

Observație
Din relația (*) de mai sus se vede că centrul O al cercului $\mathcal{C}$ nu poate fi conjugat armonic față de $\mathcal{C}$ cu niciun punct din plan.

Definiție
Fie $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O; r)$ un cerc, iar P un punct în plan, diferit de centrul O al cercului $\mathcal{C}$. Locul geometric al punctelor din plan care sunt conjugate armonic cu P față de cercul $\mathcal{C}$, $\pi_P = \left\{Q \in \mathcal{P} \mid OP^2 + OQ^2 = PQ^2 + 2r^2\right\}$ se numește polara punctului P față de cercul $\mathcal{C}$.

Propoziție
Fie $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O; r)$ un cerc, iar P un punct în plan, diferit de centrul O al cercului $\mathcal{C}$. Atunci polara π_P a punctului P față de cercul $\mathcal{C}$ este o dreaptă perpendiculară pe OP într-un punct P' care este inversul punctului P față de cercul $\mathcal{C}$.
(P' se numește inversul lui P față de cercul $\mathcal{C}$ dacă $P' \in (OP$ și $OP \cdot OP' = r^2$)

Demonstrație:
Fie P' inversul punctului P față de cercul $\mathcal{C}$. Atunci
$OP^2 + OP'^2 = \left(OP - OP'\right)^2 + 2 \cdot OP \cdot OP' = PP'^2 + 2r^2$, astfel că $P' \in \pi_P$.
Atunci, notând cu d dreapta perpendiculară în P' pe OP au loc relațiile:
$Q \in \pi_P \Leftrightarrow OQ^2 - PQ^2 = OP'^2 - PP'^2 \Leftrightarrow$
$\left(\overline{OQ} - \overline{PQ}\right) \cdot \left(\overline{OQ} + \overline{PQ}\right) = \left(\overline{OP'} - \overline{PP'}\right) \cdot \left(\overline{OP'} + \overline{PP'}\right) \Leftrightarrow$
$\overline{OP} \cdot \left(\overline{OQ} + \overline{PQ} - \overline{OP'} - \overline{PP'}\right) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \overline{OP} \cdot \overline{P'Q} = 0 \Leftrightarrow OP \perp P'Q \Leftrightarrow$
$Q \in d$.
Rezultă că $\pi_P = d$, ceea ce demonstrează afirmațiile din enunț.

Observație
Din definiția polarei unui punct față de un cerc rezultă imediat echivalențele următoare: $Q \in \pi_P \Leftrightarrow P, Q$ - conjugate față de cercul $\mathcal{C}$ $\Leftrightarrow$ $P \in \pi_Q$

Observație
Dacă M este mijlocul unui segment $[AB]$, M nu este conjugat armonic cu niciun punct al dreptei AB față de punctele A, B. Totuși, dacă dreptei AB

i s-ar adăuga un “punct la infinit”, care să fie la distanță infinită față de orice punct al dreptei AB, acest punct P_∞ ar verifica egalitatea $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}(=1)=-\frac{\overline{AP_\infty}}{\overline{P_\infty B}}$ și ar fi astfel conjugatul punctului M față de A, B.

Observație

Prin adăugarea de puncte la infinit fiecărei drepte putem înlocui relația $d_1 \parallel d_2$ cu “d_1 și d_2 au același punct la infinit”. Cu alte cuvinte, două drepte paralele “se intersectează la infinit”.

Observație

În acest mod, fiecare punct la infinit corespunde nu doar unei drepte, ci unui întreg fascicol de drepte paralele.

Observație

Mulțimea tuturor punctelor la infinit ale tuturor dreptelor din plan vor forma o așa-numită “dreaptă la infinit” d_∞ a planului.

Observație

Ținând cont de cele de mai sus, centrul O al unui cerc $\mathcal{C}=\mathcal{C}(O;r)$ este conjugat armonic față de $\mathcal{C}$ cu orice punct de la infinit, astfel că are polara $\pi_O = d_\infty$.

Observație

Ținâd cont de echivalența $P \in \pi_Q \Leftrightarrow Q \in \pi_P$ rezultă imediat următoarele două proprietăți:

a) Polarele unei familii de puncte coliniare sunt concurente (în polul dreptei pe care se află punctele familiei)

b) Polii unei familii de drepte concurente sunt coliniari (pe polara punctului de intersecție al dreptelor familiei).

Observație

Deoarece pentru un punct $P \neq O$, $OP \cap \pi_P = \{P'\}$, unde P' este inversul punctului P față de cercul $\mathcal{C}=\mathcal{C}(O;r)$, avem că $P \in \pi_P \Leftrightarrow P = P'$ $\Leftrightarrow OP^2 = r^2 \Leftrightarrow P \in \mathcal{C}(O,r)$. În cazul în care $P \in \mathcal{C}(O,r)$, polara π_P a punctului P este tangenta în P la cerc.

Observație

Construcția polarei π_P a unui punct $P \in \mathrm{Ext}(\mathcal{C})$ decurge atunci în modul următor: fie PT_1 și PT_2 tangentele prin P la cercul $\mathcal{C}$. Atunci $P \in \pi_{T_1} \cap \pi_{T_2}$ $\Rightarrow T_1, T_2 \in \pi_P \Rightarrow \pi_P = T_1T_2$.

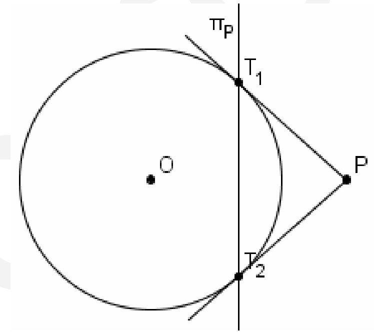


Fig.1

Observație

Dacă $P \in \mathrm{Int}(\mathcal{C})$, considerăm intersecțiile M_1 și M_2 ale perpendicularei în P pe OP cu cercul $\mathcal{C}$. Tangentele în M_1 și M_2 se intersectează (din motive de simetrie, de exemplu) într-un punct $P' \in (OP$, care este exact inversul lui P față de $\mathcal{C}$.

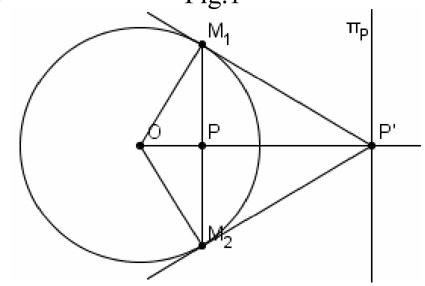


Fig.2

Într-adevăr, aplicând teorema catetei în $\triangle OM_1P'$ avem că: $\overline{OP}\cdot\overline{OP'} = OM_1^2 = r^2$. Prin urmare, polara punctului P este perpendiculara în P' pe dreapta OP.

<u>Definiție</u>

Fie $ABCD$ un patrulater, iar $E \in AB \cap CD$, $F \in AD \cap BC$, punctele de intersecție ale laturilor opuse. Figura $ABCDEF$, formată din cele 4 drepte AB, AD, BC, CD și cele 6 puncte de intersecție ale lor A, B, C, D, E, F se numește <u>patrulater complet</u>. Segmentele $[AC]$, $[BD]$ și $[EF]$ se numesc <u>diagonalele patrulaterului complet ABCDEF</u>.

Folosind proprietățile biraportului a patru puncte coliniare, respectiv ale fascicolelor de câte patru drepte concurente, se poate demonstra ușor

Teorema lui Pappus: Fiecare dreaptă suport a unei diagonale a unui patrulater complet este intersectată de dreptele suport ale celorlalte două diagonale în două puncte care sunt conjugate armonic față de capetele diagonalei.

Observație

$P \in Ext(\mathcal{C})$

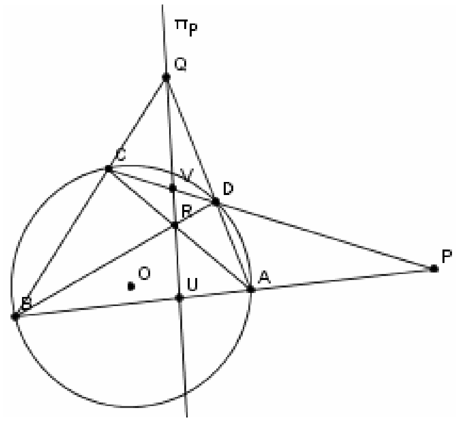


Fig.3

Pe baza teoremei lui Pappus putem indica o altă construcție a polarei unui punct față de un cerc :

Fie A, B, respectiv C, D punctele de intersecție cu $\mathcal{C}$ a două secante duse prin P,

$AC \cap BD = \{R\}$,

$AD \cap BC = \{Q\}$,

$AB \cap QR = \{U\}$,

$CD \cap QR = \{V\}$.

$P \in Int(\mathcal{C})$

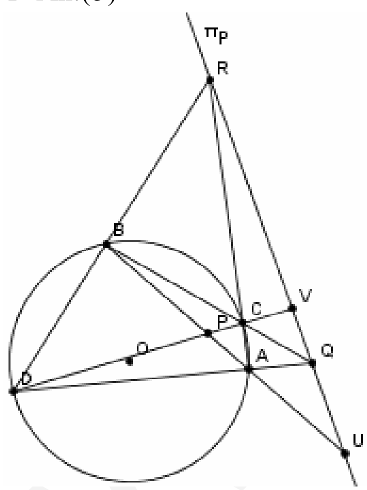


Fig.4

Diagonalele patrulaterului complet ARBQCD sunt atunci $[AB]$, $[CD]$ și $[QR]$, astfel că, pe baza teoremei lui Pappus, punctele P, U sunt conjugate față de A, B, respectiv P, V sunt conjugate față de C, D. Rezultă că $\pi_P = UV = QR$.

Pentru a obține polara π_P este deci suficient să ducem două secante oarecare PAB și PCD prin punctul P, cu $A, B, C, D \in \mathcal{C}$ și să determinăm punctele de intersecție $Q \in AD \cap BC$ și $R \in AC \cap BD$. Atunci $\pi_P = QR$.

Aplicații

1. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, $P \in AB \cap CD$, $Q \in AD \cap BC$, $R \in AC \cap BD$, T_1 și T_2 punctele în care tangentele din P la cercul $\mathcal{C}(ABCD)$ ating cercul, M - punctul de intersecție al tangentelor în A și B la cerc, iar N - punctul de intersecție al tangentelor în C și D la cerc. Atunci punctele Q, R, T_1, T_2, M și N sunt coliniare.

Demonstrație:

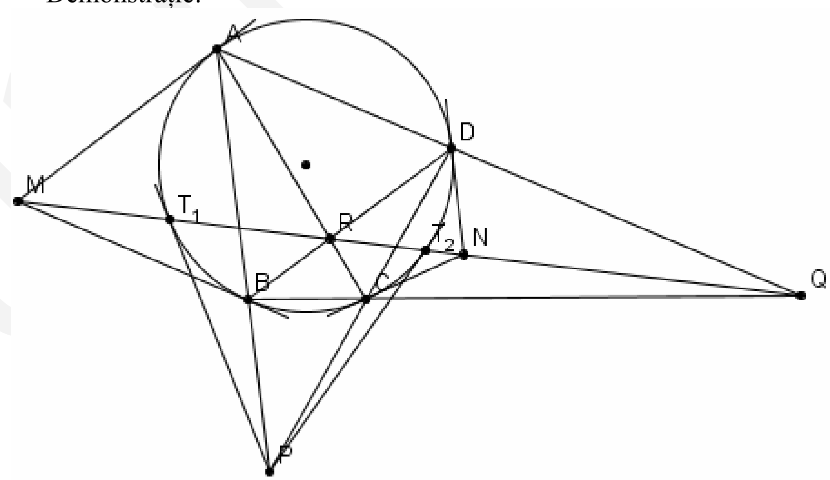


Fig.5

Din construcțiile descrise ale polarelor știm că $T_1T_2 = \pi_P = QR$, astfel că punctele T_1, T_2, Q și R sunt coliniare.Deoarece $P \in AB = \pi_M$ rezultă că $M \in \pi_P$, iar cum $P \in CD = \pi_N$ avem că $N \in \pi_P$. Deci $MN = \pi_P$. Rezultă coliniaritatea punctelor T_1, T_2, Q, R, M, N.

2. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, t_A, t_B, t_C, t_D tangentele la cercul $\mathcal{C}(ABCD)$ în punctele A, B, C, D, $E \in t_A \cap t_B$, $F \in t_B \cap t_C$, $G \in t_C \cap t_D$ și $H \in t_D \cap t_A$. Atunci diagonalele patrulaterelor $ABCD$ și $EFGH$ sunt concurente.

Demonstrație:
Fie $P \in AB \cap CD$,
$Q \in AD \cap BC$ şi
$R \in AC \cap BD$.
Atunci
$E, G \in \pi_P = QR$
şi $F, H \in \pi_Q = PR$.
Rezultă că
$EG \cap FH = \{R\} = AC \cap$

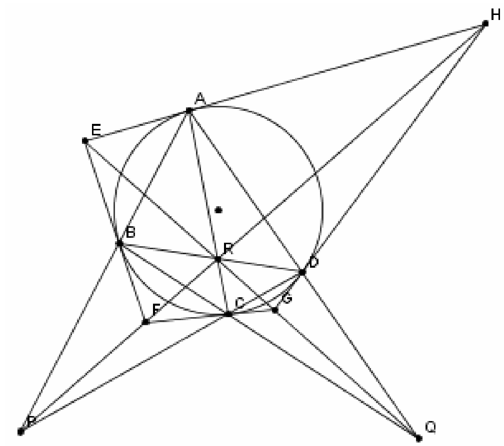


Fig.6

3. Fie A, B, C, U, V **cinci puncte conciclice, iar** $M \in UA \cap VB$, $M_1 \in UB \cap VA$, $N \in UB \cap VC$, $N_1 \in UC \cap VB$, $P \in UC \cap VA$, $P_1 \in UA \cap VC$. **Atunci dreptele** MM_1, NN_1 **şi** PP_1 **sunt concurente sau paralele.**

Demonstrație:
Fie $L \in MM_1 \cap NN_1$ şi $L' \in MM_1 \cap PP_1$.
Deoarece polul dreptei MM_1 este punctul de intersecție $AB \cap UV$, iar polul dreptei NN_1 este $BC \cap UV$, rezultă că L este polul dreptei UV.

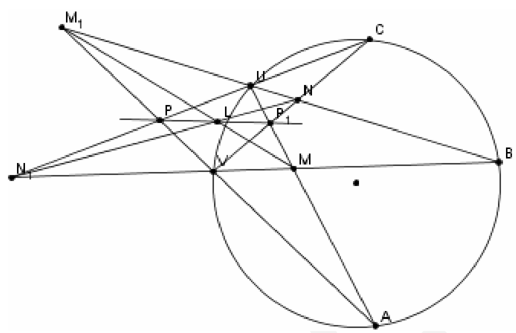


Fig.7

În mod analog, L' este polul dreptei UV, astfel că $L = L'$, deci dreptele MM_1, NN_1 şi PP_1 sunt concurente, sau, dacă $MM_1 \parallel NN_1$, atunci L este punctul de la infinit al dreptelor MM_1 şi NN_1, UV este un diametru al cercului $\mathcal{C}(ABCUV)$, iar $MM_1 \parallel PP_1$.

4. Fie $ABCD$ **un patrulater înscris într-un cerc** $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O;r)$**. Dacă** $P \in AB \cap CD$, $Q \in AD \cap BC$ **şi** $R \in AC \cap BD$, **atunci** O **este ortocentrul triunghiului** $\triangle PQR$ **.**

Demonstrație:

Deoarece
$QR = \pi_P \perp OP$,
$PR = \pi_Q \perp OQ$
şi $PQ = \pi_R \perp OR$,
afirmația este imediată

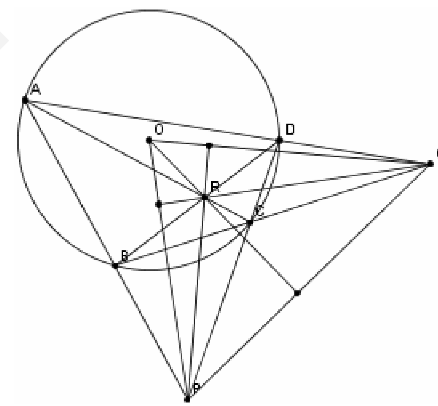


Fig.8

5. Fie D, E, F **punctele de contact ale cercului înscris** $\mathcal{C}(I;r)$ **în triunghiul** $\triangle ABC$ **cu laturile** $[BC]$, $[CA]$, **respectiv** $[AB]$, **iar** $P \in BC \cap EF$**. Atunci** $AD \perp PI$ **.**

Demonstrație:

$$\left.\begin{array}{l} P \in EF = \pi_A \Rightarrow A \in \pi_P \\ P \in BC = \pi_D \Rightarrow D \in \pi_P \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow AD = \pi_P \perp PI$

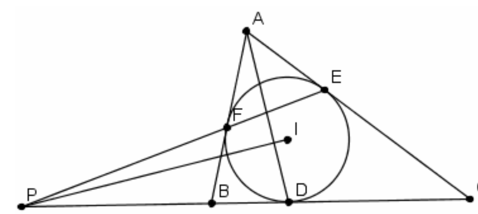


Fig.9

6. Fie $[AB]$ o coardă într-un cerc $\mathcal{C}$, M - mijlocul ei, iar $[CD]$ o altă coardă care trece prin M. Dacă $E \in AC \cap BD$ şi $F \in AD \cap BC$, atunci $EF \parallel AB$.

Demonstraţie:

Fie O centrul cercului. Atunci $EF = \pi_M \perp OM$ şi $OM \perp AB \Rightarrow$ $\Rightarrow EF \parallel AB$.

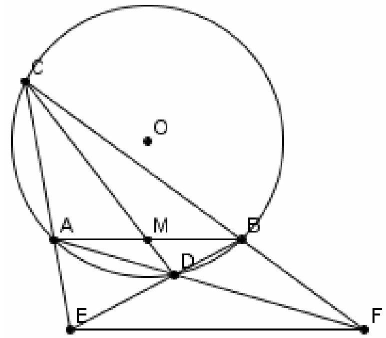


Fig.10

7. Fie A', B', C' mijloacele arcelor $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ şi $\widehat{AB}$ ale cercului $\mathcal{C}$ circumscris triunghiului $\triangle ABC$, arce care nu conţin vârfurile A, B, respectiv C. Tangentele în A şi A' la $\mathcal{C}$ se intersectează în A_1, cele în B şi B' în B_1, iar cele în C şi C' în C_1. Atunci A_1, B_1 şi C_1 sunt coliniare.

Demonstraţie:

Evident, $(AA'$, $(BB'$ şi $(CC'$ sunt bisectoarele interioare ale $\triangle ABC$.
De asemenea, $AA' = \pi_{A_1}$, $BB' = \pi_{B_1}$, $CC' = \pi_{C_1}$.
Cum $AA' \cap BB' \cap CC' \neq \varnothing$, rezultă că A_1, B_1, C_1 sunt coliniare, aflându-se pe polara π_I a centrului I al cercului înscris.

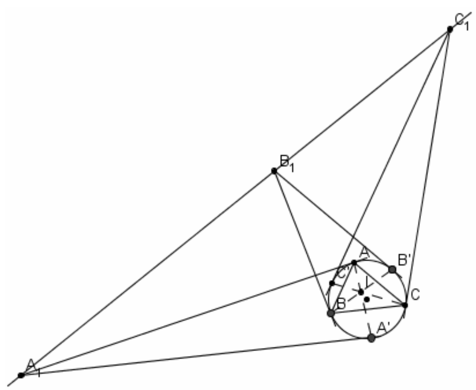


Fig.11

8. Fie $[AB]$ un diametru al unui cerc $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O;r)$, iar $M, N \in \mathcal{C}$ astfel încât $N \in \widehat{BM}$. Dacă P este punctul de intersecţie al tangentelor în M şi N la $\mathcal{C}$, iar $Q \in AM \cap BN$, atunci $PQ \perp AB$.

Demonstraţie:

Fie $R \in AB \cap MN$.
Cum $MN = \pi_P$, din $R \in \pi_P$ rezultă că $P \in \pi_R$.
De asemenea, din construcţia polarei unui punct în raport cu un cerc bazată pe teorema lui Pappus, avem că $Q \in \pi_R$.
Rezultă că $PQ = \pi_R \perp OR$,deci $PQ \perp AB$.

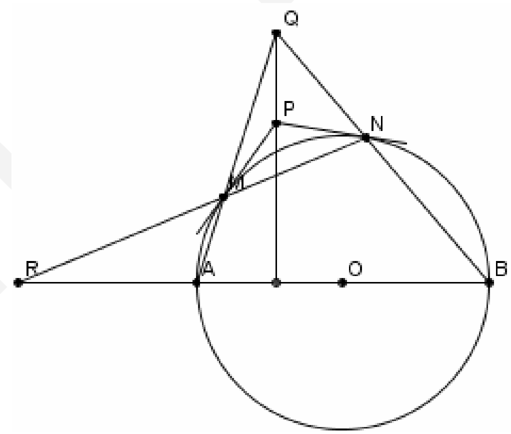


Fig.12

9. Fie $ABCD$ un patrulater circumscris unui cerc $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O;r)$, iar $M \in AB \cap \mathcal{C}$, $N \in BC \cap \mathcal{C}$, $P \in CD \cap \mathcal{C}$, $Q \in DA \cap \mathcal{C}$ punctele de tangenţă ale laturilor cu cercul. Dacă $U \in AB \cap CD$, $V \in AD \cap BC$ şi $W \in MP \cap NQ$, atunci $OW \perp UV$.

Demonstraţie:

Din enunţ rezultă că $MP = \pi_U$ şi $NQ = \pi_V$, astfel că $W \in \pi_U \cap \pi_V$.
Dar atunci $U, V \in \pi_W$, astfel că $UV = \pi_W \perp OW$.

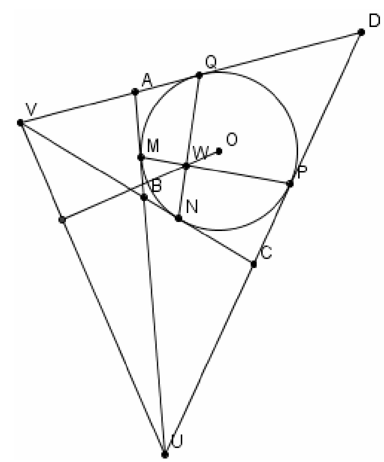


Fig.13

10. Fie ABCDEF un hexagon convex, înscris într-un cerc $\mathcal{C}=\mathcal{C}(\mathrm{O};\mathrm{r})$. Dacă tangentele $\mathrm{t_A}$ şi $\mathrm{t_D}$ la $\mathcal{C}$ în punctele A şi D sunt concurente cu dreptele BF şi CE, arătați că dreptele AD, BC şi EF sunt concurente sau paralele.

Demonstrație:

Fie $\mathrm{P}\in \mathrm{t_A}\cap \mathrm{t_D}\cap \mathrm{BF}\cap \mathrm{CE}$ şi $\mathrm{Q}\in \mathrm{BC}\cap \mathrm{EF}$. Rezultă atunci că $\mathrm{Q}\in \pi_{\mathrm{P}}$.Dar $\pi_{\mathrm{P}}=\mathrm{AD}$, astfel că AD, BC şi EF sunt concurente în punctul Q. Dacă $\mathrm{BC}\parallel \mathrm{EF}$, atunci Q va fi punctul de la infinit al dreptelor BC şi EF, iar $\mathrm{PO}\perp \mathrm{BC}$ şi $\mathrm{PO}\perp \mathrm{EF}$. Cum însă $\mathrm{AD}=\pi_{\mathrm{P}}\perp \mathrm{PO}$ rezultă atunci că şi $\mathrm{AD}\parallel \mathrm{BC}\parallel \mathrm{EF}$.

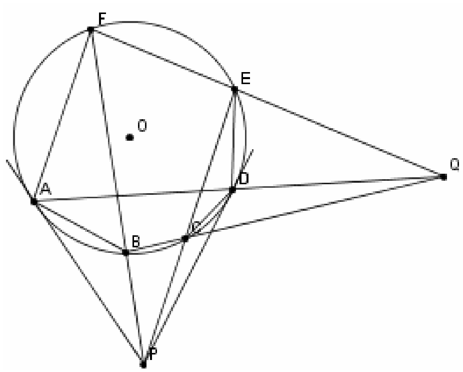


Fig.14

Bibliografie:

[1] C. Coşniță – Teoreme şi probleme alese de matematici, Ed.Didactică şi Pedagogică, 1958
[2] Gh.Țițeica – Probleme de geometrie, Ed. Tehnică, 1981
[3] L.Nicolescu, V.Boskoff – Probleme practice de geometrie, Ed. Tehnică, 1990
[4] V.Nicula, C.Pohoață – Diviziune armonică, Ed. Gil., 2007

Lector Dr. Mihai Chiş, Universitatea de Vest Timişoara
Prof. Petrişor Neagoe, Grup „Mathias Hammer" Anina

Asupra unei probleme de olimpiadă

La faza națională a Olimpiadei de Matematică, ediția 2010, desfăşurată în luna aprilie la Iaşi, a fost propusă spre rezolvare concurenților de la clasa a X a următoarea problemă:

Fie $v,w\in\mathbb{C}^*$. Să se arate că

$$\left|zw+\overline{w}\right|\le\left|zv+\overline{v}\right| \qquad (*)$$

pentru orice $z\in\mathbb{C}$, $|z|=1$ dacă şi numai dacă există $k\in[-1,1]$ cu proprietatea $w=kv$.

Soluția prezentată în [1] nu considerăm a fi chiar la îndemâna elevilor, motiv pentru care credem că este util să prezentăm şi alte rezolvări, obținute din diferite moduri de abordare. Implicația reciprocă este uşoară şi nu o mai analizăm. De asemenea se verifică simplu că dacă există $k\in\mathbb{R}$ cu proprietatea $w=kv$ atunci $k\in[-1,1]$. Ne vom concentra asupra existenței numărului real k.

Soluție trigonometrică.

Fie $w=r(\cos a+i\sin a)$, $v=s(\cos b+i\sin b)$ şi $z=\cos t+i\sin t$. Cu aceste notații cerința problemei conduce la a demonstra că $a-b=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Atunci

$$\left|zw+\overline{w}\right|=\left|r(\cos(a+t)+i\sin(a+t))+r(\cos a-i\sin a)\right|=2r\left|\cos\left(a+\frac{t}{2}\right)\right|$$

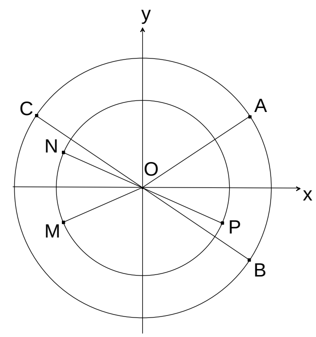
. Atunci $(*)$ este echivalentă cu $2r\left|\cos\left(a+\frac{t}{2}\right)\right|\le 2s\left|\cos\left(b+\frac{t}{2}\right)\right|$, adică $r\left|\cos\left(a+\frac{t}{2}\right)\right|\le s\left|\cos\left(b+\frac{t}{2}\right)\right|$, pentru orice $t\in\mathbb{R}$. Pentru $t=\pi-2b$ obținem $\cos\left(b+\frac{t}{2}\right)=0$ de unde $\cos\left(a+\frac{\pi}{2}-b\right)=0$ adică $a+\frac{\pi}{2}-b=\frac{\pi}{2}+k\pi$ şi concluzia.

Soluție algebrică

Alegem $z=-\frac{\overline{v}}{v}$. Evident $|z|=1$ şi membrul drept din $(*)$ este nul. Atunci $|zw+\overline{w}|=0$ deci $z=-\frac{\overline{w}}{w}$, de unde $\frac{\overline{w}}{w}=\frac{\overline{v}}{v}$ care conduce la $\frac{w}{v}=\frac{\overline{w}}{\overline{v}}$, adică $\frac{w}{v}\in\mathbb{R}$.

Soluție geometrică

Considerăm punctele $A(v)$ şi $B(\overline{v})$ într-un sistem cu originea O ca în figură. Fie $M(w)$ şi $N(\overline{w})$. Alegem punctul C, diametral opus lui B. Atunci există $z\in\mathbb{C}$ de modul 1 astfel încât afixul lui C să fie zv. Atunci numărului complex $zv+\overline{v}$ în corespunde punctul O . Prin urmare numărului $zw+\overline{w}$ îi corespunde tot originea.



Deci punctul $P(zw)$ este diametral opus lui M. Atunci $m(\widehat{AC})=m(\widehat{MP})$ ceea ce conduce la concluzia $m(\widehat{AB})=m(\widehat{MN})$. Cum punctele A,B sunt simetrice față de axa reală, iar M,N de asemenea simetrice deducem că O,A,M sunt coliniare ceea ce încheie problema.

Ar mai fi o posibilitate: să se utilizeze forma algebrică a numerelor complexe dar calculele sunt foarte complicate, ceea ce conduce greu la o finalizare.

Bibliografie

[1] ***** - Gazeta Matematică – Supliment dedicat ediției a 61-a a Olimpiadei Naționale de Matematică, Iaşi, aprilie, 2010.

[2] D. Andrica, N. Bişboacă – Numere Complexe de la …a la …z, Ed. Millenium, 2001.

Prof. Steluța Monea, Colegiul Național Decebal Deva

Asupra unei probleme de concurs

La Olimpiada Națională de Matematică, în cadrul primului test de selecție pentru OBM şi OIM, susținut la Iaşi, 8 Aprilie 2010, problema 4 propusă spre rezolvare este următoarea:

Cercurile Γ_1 şi Γ_2 se intersectează în punctele M şi N. Fie A un punct situat pe cercul Γ_1 şi D un punct situat pe cercul Γ_2. Dreptele AM şi AN intersectează a doua oară cercul Γ_2 în punctele B, respectiv C. Dreptele DM şi DN intersectează a doua oară cercul Γ_1 în punctele E, respectiv F. Punctele A, E şi F sunt situate de aceeaşi parte a dreptei MN. Ştiind că segmentele AB şi DE sunt congruente, arătați că punctele A, F, C şi D sunt situate pe un cerc al cărui centru nu depinde de poziția punctelor A şi D.

În acest articol, soluția acestei probleme este prezentată ca o consecință a două probleme (problemele 2 şi 4) şi este expusă, pe scurt, în cadrul ultimei observații din articol.

1. Cercurile Γ_1 şi Γ_2 se intersectează în punctele M şi N. Fie A şi P două puncte situate pe cercul Γ_1. Dacă dreptele AM şi PN intersectează a doua oară cercul Γ_2 în punctele B, respectiv Q, atunci dreptele AP şi BQ sunt paralele.

Demonstrație:

AMNP - inscriptibil $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle MAP+\sphericalangle MNP=180^\circ$ (1)

BMNQ - inscriptibil $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle MNP\equiv\sphericalangle MBQ$ (2)

Din (1) şi (2)

$\Rightarrow \sphericalangle MAP+\sphericalangle MBQ=180^\circ \Rightarrow AP \parallel BQ$

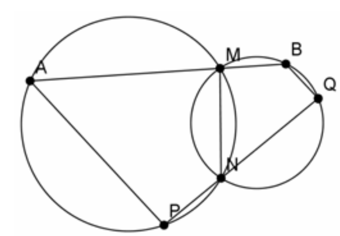


fig.1

2. Cercurile Γ_1 şi Γ_2 se intersectează în punctele M şi N. Fie A un punct situat pe cercul Γ_1 şi D un punct situat pe cercul Γ_2. Dreptele AM şi AN intersectează a doua oară cercul Γ_2 în punctele B, respectiv C. Dreptele DM şi DN intersectează a doua oară cercul Γ_1 în punctele E, respectiv F. Punctele A, E şi F sunt situate de aceeaşi parte a dreptei MN. Dacă segmentele AB şi DE sunt congruente, atunci (MN este bisectoarea unghiului $\sphericalangle$CMF.

Demonstraţie:

Fie punctele $P \in \Gamma_1$ şi $Q \in \Gamma_2$ astfel încât $N \in PQ$ şi $PQ \parallel DE$.

Din problema 1 rezultă că $AP \parallel BQ$ şi $EP \parallel DQ$. Din $PQ \parallel DE$ şi

$EP \parallel DQ \Rightarrow PQDE$ este paralelogram $\Rightarrow [PQ] \equiv [DE]$ şi $\sphericalangle PED \equiv \sphericalangle DQP$

$[AB] \equiv [DE]$ şi $[PQ] \equiv [DE] \Rightarrow [AB] \equiv [PQ]$. Din $AP \parallel BQ$ şi

$[AB] \equiv [PQ]$ $\Rightarrow APQB$ este trapez isoscel $\Rightarrow \sphericalangle APQ \equiv \sphericalangle PAB$

$\sphericalangle AFN \equiv \sphericalangle APN \equiv \sphericalangle PAM \equiv \sphericalangle PEM \equiv \sphericalangle DQN \equiv \sphericalangle DCN \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle AFD \equiv \sphericalangle DCA \Rightarrow AFCD$ este patrulater inscriptibil $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle FAN \equiv \sphericalangle CDN \Rightarrow \sphericalangle FMN \equiv \sphericalangle CMN \Rightarrow (MN$ este bisectoarea $\sphericalangle CMF$

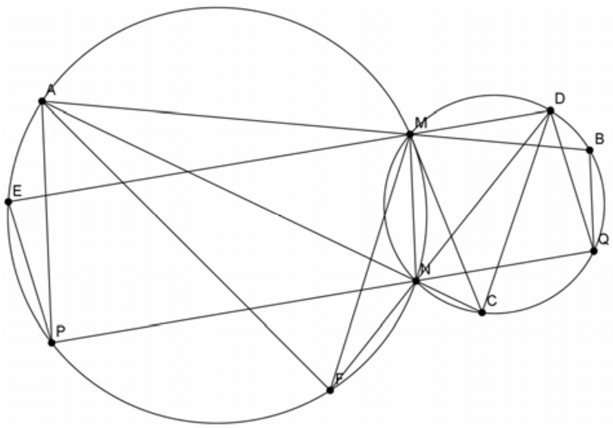


fig.2

3. Cercurile Γ_1 şi Γ_2 se intersectează în punctele M şi N. Perpendiculara pe dreapta MN ce trece prin punctul M intersectează a doua oară pe Γ_1 şi Γ_2 în punctele S, respectiv T şi fie punctul V mijlocul segmentului ST. Dacă A este un punct variabil pe Γ_1 şi dreapta AN intersectează a doua oară cercul Γ_2 în punctul C şi cercul de diametru $[VN]$ în punctul K, atunci punctul K este mijlocul segmentului AC.

Demonstraţie:

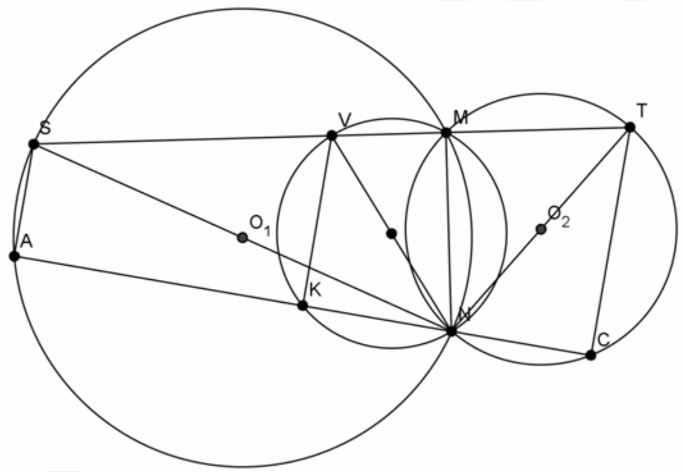


fig.3

$$\left.\begin{array}{l}\text{Din problema 1 rezultă că } SA \parallel TC \\ SM \perp MN \Rightarrow [SN] \text{ este diametru în cercul } \Gamma_1 \Rightarrow \sphericalangle SAN = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow ACTS \text{ este trapez dreptunghic} \\ V \text{ este mijlocul lui } [ST] \\ VK \perp AN \text{ şi } SA \perp AN \Rightarrow VK \parallel SA\end{array}\right\} \Rightarrow [VK] \text{ este linie mijlocie în}$$

$ACTS \Rightarrow$ punctul K este mijlocul lui $[AC]$.

Observaţie

Problema este adevărată şi reciproc: Cercurile Γ_1 şi Γ_2 se intersectează în punctele M şi N. Perpendiculara pe dreapta MN ce trece prin punctul M intersectează a doua oară pe Γ_1 şi Γ_2 în punctele S, respectiv T şi fie punctul V mijlocul segmentului ST. Atunci mijlocul unei coarde variabile $[AC]$ $(A \in \Gamma_1$ şi $C \in \Gamma_2)$ ce trece prin punctul N este un punct situat pe cercul de diametru $[VN]$.

4. Cercurile $\Gamma_1(O_1;R_1)$ şi $\Gamma_2(O_2;R_2)$ se intersectează în punctele M şi N. Fie A un punct variabil pe Γ_1 şi dreapta AN intersectează a doua oară cercul Γ_2 în punctul C. Dacă punctul X se află pe cercul Γ_1 astfel încât $(MN$ este bisectoarea $\sphericalangle CMX$ atunci centrul cercului circumscris triunghiului $\triangle AXC$ este un punct fix.

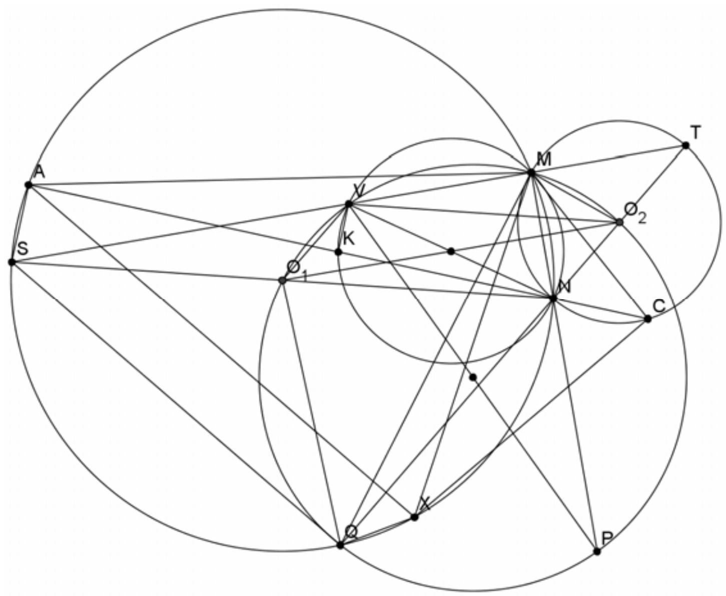


fig.4

Demonstrație:

Fie Γ cercul circumscris $\triangle MO_1O_2$. Dreapta MN intersectează a doua oară pe Γ în punctul P. Fie $V \in \Gamma$ astfel încât $[PV]$ este diametru al cercului Γ. Deci $VM \perp MP$.

$VM \perp MN$ și $O_1O_2 \perp MN \Rightarrow VM \parallel O_1O_2 \Rightarrow O_1O_2MV$ este trapez isoscel $\Rightarrow [VO_1] \equiv [MO_2]$ și $\sphericalangle VO_1O_2 \equiv \sphericalangle MO_2O_1$.

Dreapta MV intersectează a doua oară cercurile Γ_1 și Γ_2 în punctele S, respectiv T. Deoarece $MN \perp ST$ rezultă că $[SN]$ și $[TN]$ sunt diametre ale cercurilor Γ_1, respectiv Γ_2.

$$\left.\begin{array}{c} O_1 \text{ este mijlocul lui } [SN] \\ \sphericalangle VO_1O_2 \equiv \sphericalangle MO_2O_1 \equiv \sphericalangle NO_2O_1 \Rightarrow VO_1 \parallel NO_2 \\ VO_1 = MO_2 = NO_2 = \dfrac{NT}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow [O_1V] \text{ este linie}$$

mijlocie

în $\triangle SNT \Rightarrow$ punctul V este mijlocul lui $[ST]$.

Dreapta AC intersectează a doua oară cercul de diametru $[VN]$ în punctul K. Din problema 3 rezultă că punctul K este mijlocul lui $[AC]$.

K este mijlocul lui $[AC]$ și $VK \perp AC \Rightarrow VK$ mediatoarea lui $[AC]$ (*)

Dreapta NT intersectează a doua oară cercul Γ în punctul Q.

$$\left.\begin{array}{l} O_1V \parallel O_2Q \text{ și } O_1, Q, O_2, V \in \Gamma \Rightarrow O_1QO_2V \text{ este trapez isoscel } \Rightarrow O_1Q = VO_2 \\ \qquad [VO_2] \text{ este linie mijlocie în } \triangle TSN \Rightarrow VO_2 = \dfrac{SN}{2} = R_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow O_1Q = R_1 \Rightarrow Q \in \Gamma_1$. Deci $\Gamma \cap \Gamma_1 = \{M, Q\}$.

$$\left.\begin{array}{l} [SN] \text{ este diametru în cercul } \Gamma_1 \Rightarrow NQ \perp SQ \\ \qquad VO_1 \parallel NQ \end{array}\right\} \Rightarrow VO_1 \perp SQ \qquad (1)$$

$\sphericalangle CMN \equiv \sphericalangle XMN$ și $NM \perp ST \Rightarrow \sphericalangle CMT \equiv \sphericalangle XMS$.

Deci

$\sphericalangle AMQ \equiv \sphericalangle ANQ \equiv \sphericalangle CNT \equiv \sphericalangle CMT \equiv \sphericalangle XMS \Rightarrow \sphericalangle AMS \equiv \sphericalangle XMQ \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow [AS] \equiv [XQ] \\ A, S, Q, X \in \Gamma_1 \end{array}\right\} \Rightarrow ASQX \text{ este trapez isoscel } \Rightarrow SQ \parallel AX \qquad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow VO_1 \perp AX \Rightarrow VO_1$ este mediatoarea lui $[AX]$ (**)

Din (*) și (**) rezultă că punctul V este centrul cercului circumscris $\triangle AXC$.

Deci centrul cercului circumscris $\triangle AXC$ este un punct fix, punctul V.

Observație (soluția problemei din concurs)

Fie D un punct variabil pe Γ_2 și dreapta DN intersectează a doua oară cercul Γ_1 în punctul F. Dacă punctul Y se află pe cercul Γ_2 astfel încât $(MN$ este bisectoarea $\sphericalangle FMY$, atunci în mod analog rezultă că centrul cercului circumscris triunghiului $\triangle DYF$ este punctul fix V.

Dacă, în plus, $[AB] \equiv [DE]$ atunci rezultă că $(MN$ este bisectoarea $\sphericalangle CMF$ (din problema 2). Deci $X = F$ și $Y = C$ și obținem că $VA = VF = VC = VD$.

Deci, patrulaterul $AFCD$ este înscris în cercul de centru V oricare ar fi punctele A și D pe cercurile Γ_1, respectiv Γ_2.

Prof. Petrişor Neagoe, Grup Şcolar „Mathias Hammer” Anina

De Paşte, pentru unii iepuraşul vine cu matematică şi medalii…

Adina Ţeudan

Anul acesta, în perioada 5-9 aprilie 2010, Olimpiada Naţională de Matematică s-a desfăşurat la Iaşi, oraşul marilor idei, al primei mari Uniri, al primului spectacol de teatru în limba română şi al primului muzeu literar memorial (Bojdeuca). Astfel, am fost nevoiţi ca seara Paştelui să o petrecem în tren. Cei din Reşiţa, adică eu, Adina Ţeudan. Miruna Ciulu şi prof. Loreta Ciulu, am urcat în Lugoj, urmând să ne întâlnim cu ceilalţi, prof. Lucian Dragomir, gemenii Augustin şi Dinulică Septimiu, Lorena Krokoş, Gelu Stoicănescu, Anca Semenescu şi Cristi Zanfir, la Simeria.

Călătoria a fost obositoare, cum ne aşteptam, dar cu siguranţă am avut destule de povestit până noaptea târziu, mai ales că unii dintre noi nu ne mai văzusem de aproape un an. Spre dimineaţă am ajuns în Iaşi, unde am fost luaţi de un autobuz din gară şi transportaţi până la Colegiul Tehnic Gh. Asachi, colegiul în al cărui internat am fost cazaţi. Că tot veni vorba de cazare, condiţiile au fost într-adevăr foarte bune.

Prima zi a fost mai mult o zi de acomodare şi odihnă, după o scurtă plimbare prin oraş. A doua zi urma olimpiada… Ne-am culcat aşadar destul de devreme, pentru a fi odihniţi. De dimineaţă, unii cu mai multe emoţii, alţii cu mai puţine, ne-am îndreptat către masă (trebuie să mai şi mâncăm, nu?), iar apoi spre facultate, în a cărei incintă a avut loc proba. Subiectele au fost destul de grele(mai ales că una din problemele de la clasa a VII-a şi una de la clasa a X-a au aparţinut prof. Lucian Dragomir), că doar eram la o olimpiadă naţională… După trei ore de concentrare intensă, unii îşi făceau speranţe, alţii erau convinşi că nu iau medalie, alţii erau confuzi. Rezultatele urmau să fie afişate abia a doua zi după-masă.

Deşi ne rodea curiozitatea, am reuşit să ieşim oarecum din febra concursului şi să ne bucurăm de frumuseţea Iaşului. Mai în plimbare, mai cu autobuzul (aveam gratuitate la mijloacele de transport în comun), am admirat unele obiective turistice, dar am *„vizitat”* şi două malluri…

A doua zi, rezultatele… Miruna Ciulu avea asigurată o medalie, argint sau poate aur, iar Dinulică Augustin şi cu mine, Adina Ţeudan, stăteam în dubii, aveam şanse la o medalie de bronz. Au urmat contestaţiile. Unii au avut curajul să se ducă, alţii nu, oricum cu toţii speram la rezultate cât mai bune. Pe seară am aflat şi rezultatele: într-adevăr, Caraşul avea trei medalii, ca şi în anul precedent: una de argint şi două de bronz.

În aceeaşi seară, s-au făcut înscrierile pentru concursul Al. Myller, la care participanţi am fost doar patru din judeţul nostru: iarăşi gemenii Dinulică, Gelu şi Adina. Astfel, unii dintre noi am trecut din nou prin emoţiile concursului, dar de această dată aşteptarea pentru rezultate nu a mai durat aşa de mult, ele fiind afişate în aceeaşi seară. După aceea au urmat contestaţiile, care s-au întins până târziu. Am fost sunaţi la internat de părinţii care poate au avut mai multe emoţii decât noi, pentru a ni se comunica rezultatele. Erau afişate pe internet, iar aparent eu eram, din păcate, singura care trebuia să se prezinte a doua zi la premiere, pentru a-şi lua diploma: menţiune.

Vineri, în ultima zi, cred că ne-am dovedit cu toţii atât obosiţi, cât şi nostalgici. Ne părea rău că trebuie să părăsim oraşul care ne-a încântat pentru aproape o săptămână cu frumuseţea lui, dar şi că trebuie să ne despărţim unii de ceilalţi. Cu siguranţă, am rămas cu amintiri frumoase din această vacanţă de Paşte petrecută la Iaşi, şi, cel puţin eu, sper că ne vom reîntâlni cât de curând pentru a relua discuţiile lungi, glumele, distracţia, şi pentru a nu lăsa firul prieteniei care s-a înfiripat între noi să se rupă. Pe mine, aflată în ultimul an de generală, această olimpiadă m-a determinat să mă ambiţionez şi să îmi promit mie însumi că, la anul, voi obţine un rezultat chiar mai bun. De fapt, să sperăm că, la anul, tot judeţul se va impune la nivel naţional şi va *„smulge”* cât mai multe medalii şi premii…

Concursul TMMATE, ediţia a IV-a 24 aprilie 2010

Ovidiu Bădescu

Şi anul acesta, un grup de elevi ai judeţului Caraş-Severin a participat, pe bază de invitaţie, la acest concurs. Ceea ce l-a deosebit de ediţiile anterioare a fost sistemul grilă, erau 20 probleme, fiecare punctată cu 5 puncte.

Nu putem afirma dacă e bun sau rău acest sistem, el are şi avantaje, şi dezavantaje

Avantajele sunt: rapiditatea şi obiectivitatea corecturii

Dezavantaje: nu puteai urmări deloc modul de gândire al elevului, ştiu exemplul unui premiant la acest concurs care a ştiut răspunsul de la problemă(era dată la națională în acest an) însă nici acolo, nici după națională, nici acum, nu știa să o rezolve.

Totuşi, ca o dovadă că elevii foarte buni ies învingători în orice situație, şi că noi, ca şi județ, avem elevi foarte buni, prezint elevii județului nostru care au fost premiați.

Ciobanu Anca	Cls. a V-a **Premiul II**	Şc. Gen. Nr.2, Reşița	Prof. Şandru Marius
Dinulică Augustin	Cls. a VII-a **Premiul II**	Lic. Pedagogic C.D.Loga, Caransebeş	Prof. Buzescu Antoanela
Țeudan Adina	Cls. a VIII-a **Premiul II**	Şc. Gen. Nr.2, Reşița	Prof. Drăghici Mariana
Semenescu Anca	Cls. a X-a **Mențiune**	Lic. Pedagogic C.D.Loga, Caransebeş	Prof. Humița Dorina
Zanfir Cristian	Cls. a XI-a **Premiul III**	Lic. Teoretic Traian Doda	Prof. Dragomir Delia
Stăniloiu Ovidiu	Cls. a XII-a **Premiul III**	Lic. „Tata Oancea”, Bocşa	Prof. Stăniloiu Nicolae

« Matematica…"o poezie" »
Etapa Națională a Concursului interdisciplinar « +- Poezie », Cluj Napoca, 7-9 mai 2010

Teodora Murgu

Matematica şi literatura, ai crede ca nu se potrivesc, dar concursul „ +/- Poezie’’ ne demonstrează că acest lucru este posibil, că este interesant, o provocare…Drumul până la Cluj a fost lung, sau poate emoțiile au făcut să pară aşa.

Şi acum să ne prezentăm lotul județului Caraş-Severin: Doamna profesoară Mihailovici Dana, Murgu Teodora – elevă în clasa a VI-a la Şcoala cu clasele I-VIII « Romul Ladea » Oravița, Semenescu Raluca – elevă în clasa a VI-a la Liceul Pedagogic « C D Loga » Caransebeş, Hrenyak Alexia – elevă în clasa a V-a la Şcoala cu clasele I-VIII Nr.1 Oțelu-Roşu şi Melcescu Florina – elevă în clasa a V-a la Şcoala cu clasele I-VIII Bozovici, urmau să fie colegele mele de cameră pentru următoarele două zile, la Colegiul Pedagogic din Cluj, unde am fost întâmpinați cu căldură.

Sâmbătă, ziua „ Z’’, cu emoții maxime am plecat spre Liceul Energetic, unde s-a ținut concursul. Eram optzeci şi noua la clasa a VI-a, printre cei mai buni din toată țara, însă telefonul dat de doamna dirigintă înaintea concursului, mi-a mai ridicat moralul. Ne-au fost înmânate subiectele şi cu înfrigurare am început să le citesc. Pe măsură ce parcurgeam subiectele, emoțiile se evaporau, rămânând doar concentrarea. Acestea nu au fost uşoare dar nici atât de grele precum m-aş fi aşteptat. Orele de munca în plus şi-au spus cuvântul. Matematica nu mi s-a parut foate dificilă poate şi datorită faptului că se află în topul preferințelor, înaintea limbii şi literaturii române. Literatura şi gramatica, au format marea parte a subiectelor, care ne-au pus la încercare atât logica cât şi imaginația. Una peste alta cred că m-am descurcat onorabil şi a fost o experiență frumoasă.

Dupa concurs, drept răsplată după două ore de munca şi concentrare am vizitat grădina botanica şi am vizionat un film 3D „Alice in wonderland’’. Gata cu relaxarea, urma să primim rezultate. Alte emoții şi alți nervi, care au crescut pe măsură ce timpul trecea şi nici urmă de rezultate. Cu întârziere de o oră, au fost afişate, în ordinea alfabetică a numelui, în dreptul meu…punctajului obținut – 127 de puncte şi speranțele s-au aprins, aveam un punctaj foarte bun…dar emoțiile şi « înghesuiala » nu-mi permiteau să văd « concurența ». După rezolvarea contestațiilor depuse…Uraaa !!! Bucurie mare, cuvinte sunt prea mici ca să o pot exprima ! Munca depusă mi-a fost răsplătită. Am sunat-o pe doamna dirigintă şi părinții ca să împărtăşesc cu ei bucuria ce-mi umplea sufletul.

Duminica, ziua premierii şi festivitatea de închidere. A fost minunat să-mi aud numele şi să urc pe scenă să primesc premiul…sunt momente, dragi prieteni ce merită tot efortul depus într-un an şcolar şi nu numai.

Într-un final consider că toti care am fost prezenți acolo am câştigat multe: experiență, prieteni noi, am văzut locuri noi şi frumoase, ne-am întors toți acasă mai bogați sufleteşte. Şi nu în ultimul rând…am reprezentat cu cinste, alături de colegele mele, județul nostru.

Probleme rezolvate din RMCS nr. 30
Clasa a V-a

V.160 Printre primele 10000 numere, câte se termină în 1 şi sunt de forma $8^m + 5^n$?

Prof. Loreta Ciulu, Reşiţa

Soluţie: Credeam că s-a înţeles că $m, n \in \mathbb{N}$. Pentru $n = 0$ avem $5^0 = 1$ şi ar trebui să avem $u\left(8^m\right) = 0$, fals. Pentru $n \neq 0$, $u\left(5^n\right) = 5$ şi ar trebui să avem $u\left(8^m\right) = 6$; deducem că m este multiplu de 4. Verificăm ce se întâmplă pentru $m = 0$ şi $m = 4$, apoi pentru $m = 8$ avem $8^8 = 2^{24} > 10000$. Concluzia vă aparţine.

V.161 a) Să se arate că există o infinitate de numere naturale, care împărţite la 7, dau restul 5 şi, împărţite la 6, dau restul 4.

b) Ce rest dau aceste numere, dacă le împărţim la 42 ?

Prof. Constantin Apostol, Rm – Sărat

Soluţie: a) Din $x = 7k + 5 = 6m + 4$ deducem că $x + 2$ se divide prin 7 şi $x + 2$ se divide prin 6, aşadar x este de forma $42p - 2$, cu $p \in \{1, 2, 3, ...\}$ b) Cum $x = 42p - 2 = 42q + 40$, restul cerut este 40.

V.162 Aflaţi cel mai mare număr natural y pentru care numărul $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 132$ este divizibil cu 5^y

Prof. Maria Iancu, Oraviţa

*Soluţie:*Prin împărţirea lui 132 la 5 obţinem câtul 25; prin împărţirea lui 132 la 25 obţiem restul 3, iar prin împărţirea lui 132 la 125 obţinem câtul 1. Avem acum $5^{25+3+1} = 5^{29} \Rightarrow y = 29$

V.163 Ionel este cu 6 ani mai mare decât sora lui Ania, iar media aritmetică a vârstelor lor este de 18 ani. Ştiind că dublul vârstei lui Ionel reprezintă vârsta actuală a tatălui său, aflaţi peste câţi ani tatăl său va împlini vârsta de 60 de ani.

Prof. Maria Iancu, Oraviţa

Soluţie: Problemă fără probleme

V.164 Arătaţi că dacă numărul natural x este soluţia ecuaţiei $3^x + 3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x+2} + 3^{x-2} = 1089$, atunci el este pătrat perfect.

Prof. Maria Iancu, Oraviţa

Soluţie: Redacţia îşi cere scuze deoarece crede că problema era mai nimerită la clasa a VI-a. Să vedem totuşi acum:
$3^{x-2}\left(9 + 27 + 3 + 81 + 1\right) = 1089 \Rightarrow 3^{x-2} = 9 \Rightarrow x = 4$.

V.165 Un număr natural se numeşte *acceptabil* dacă produsul cifrelor sale este 15. Câte numere *acceptabile* de două cifre există? Dar de trei cifre ?

Concurs Suceava, 2009

Soluţie: $15 = 3 \cdot 5$, deci avem numerele 35 şi 53. La fel, $15 = 1 \cdot 3 \cdot 5$ şi avem şase numere acceptabile de trei cifre: 135, 153, 315, 351, 513, 531.

V.166 Albă ca Zăpada şi cei şapte pitici au suma vârstelor egală cu 216 ani. Dacă se ştie că piticii au vârstele numere naturale consecutive, arătaţi că, dacă Albă ca Zăpada are vârsta egală cu cea a unuia dintre pitici, atunci ea are vârsta celui mijlociu.

Concurs Mangalia, 2009

*Soluţie:*Dacă vârstele piticilor sunt $x, x+1, x+2, ..., x+6$, iar vârsta fetei este $x + a$, cu $a \le 6 \Rightarrow$ că suma totală a vârstelor este $8x + a + 21 = 216 \Rightarrow$ $189 \le 8x \le 195 \Rightarrow x = 24, a = 3$. Colcluzia, din nou, vă aparţine.

V.167 Alex cumpără pentru aniversarea mamei: 7 lalele, 5 narcise şi 11 garoafe. O lalea, o garoafă şi o narcisă costă împreună 6 lei, iar 5 lalele costă cât 3 garoafe şi o narcisă. Dacă 3 lalele valorează cât 2 garoafe, cât a plătit Alex pe florile cumpărate ?

Concurs Iaşi, 2009

Soluţie: Se obţine destul de rapid că o lalea costă 2 lei, o narcisă costă 1 leu, iar o garoafă costă 3 lei; buchetul costă aşadar 52 de lei(problemă dată la concurs la clasa a IV-a, la Iaşi)

V.168 Bunicul şi bunica au, în anul 2009, vârstele 79, respectiv 75 ani. Calculaţi în ce an aveau împreună un secol.

Concurs Iaşi, 2009

Soluţie: $79 + 75 = 154, 154 - 100 = 54, 54 : 2 = 27$ şi $2009 / 27 = 1982$

V.169 O carte *ciudată* este o carte în care toate paginile sunt numerotate cu numere formate numai din cifre impare (1,3,5,7,9,etc.). Determinați ce număr se află pe a 50-a pagină a unei cărți *ciudate.*

Concurs Iași, 2009

Soluție: Paginile 1-5 sunt evident numerotate cu $1,3,5,7,9$, apoi paginile 6-10 sunt numerotate cu 11, 13, 15, 17, 19; putem efectiv continua așa...însă să încercăm o altă metodă: avem 5 pagini numerotate de o cifră, apoi 25 de pagini numerotate cu numere impare de două cifre, rămân 20 de pagini pentru cele de trei cifre, care sunt 111, 113, 115, 117, 119, 131, ..., 139, 151, ..., 159, 171, ..., 179; așadar numărul căutat este 179

VI.160 a) Să se arate că un număr de patru cifre, având cifrele identice două câte două, nu poate fi prim.

b) Să se găsească numerele *n* de trei cifre distincte cu proprietatea: cifrele numărului *n* sunt factori primi ai lui *n* .

Prof. Loreta Ciulu, Reșița

Soluție: a) Să începem cu situația mai simplă, tratată de majoritatea elevilor; numărul este de forma $\overline{aaaa} = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a$, deci nu este prim. Avem totuși și următoarele posibilități:

$(1)\ \overline{aabb} = 100 \cdot a + 11b = 11 \cdot k, k \in \mathbb{N}$, $(2)\ \overline{abab} = 101 \cdot p, p \in \mathbb{N}$,

$(3)\ \overline{abba} = 11 \cdot m, m \in \mathbb{N}$, concluzia în fiecare caz fiind aceeași, numărul nu poate fi prim

b) dacă $n = \overline{abc}$, deducem $a,b,c \in \{2,3,5,7\}$. De aici și din cele 24 de numere posibile(!!), găsim destul de ușor, justificând eliminările, numărul $735 = 49 \cdot 3 \cdot 5$

VI.161 Se dau numerele $x = 7$ și $y = 21$;

a) Să se calculeze $(7;21)$;

b) Să se calculeze $[7;21]$;

c) Să se verifice că $x + y = (x;y) + [x;y]$;

d) Să se arate că există o infinitate de perechi (x, y)

de numere naturale, având proprietatea $x + y = (x;y) + [x;y]$.

Prof. Constantin Apostol, Rm – Sărat

Soluție: a), b), c) sunt chiar de clasă; d) e suficient, de exemplu, să luăm $y \in \mathbb{N}^*$ și $x = ky, k \in \mathbb{N}^*$ (multiplu de y)

VI.162 Arătați că nu există numere naturale *a* și *b* nenule astfel încât $2008a + 2009b = 2008 \cdot 2009$.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeș

Soluție: Problema se încadrează în cadrul general: $ax + by = xy$ cu $a,b,x,y \in \mathbb{N}^*$ și $(x,y) = 1$ (adică prime între ele, iar în cazul nostru $x = 2008, y = 2009$). Se deduce imediat $y / ax \Rightarrow y / a \Rightarrow a = ky, k \in \mathbb{N}^*$. Analog $x / by \Rightarrow x / b \Rightarrow b = px, p \in \mathbb{N}^*$. Egalitatea din enunț devine $kxy + pxy = xy \Rightarrow k + p = 1$, absurd

VI.163 Determinați numărul maxim de numere naturale diferite a căror sumă este 470.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeș

Soluție: Problemă destul de clasică. Alegem cele mai mici $n+1$ numere naturale pentru care avem $0+1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2} \le 470 \Rightarrow n \le ....$

VI.164 100 de localități europene sunt toate legate între ele de trasee turistice. Știind că oricare trei dintre localități nu sunt situate pe un același traseu, aflați numărul maxim de trasee existente.

Prof. Maria Iancu, Oravița

Soluție: Pentru un elev de clasa a X-a, problema este banală: vorbim despre numărul $C_{100}^2 = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$. Pentru un elev de clasa a VI-a, problema e de numărare corectă, de genul: din localitatea L_1 avem 99 de trasee, din localitatea L_2 avem 98 de trasee(nu se mai numără cele numărate odată!), ..., din localitatea L_{99} avem un singur traseu nenumărat anterior. Total $99 + 98 + ... + 2 + 1 = \frac{99 \cdot 100}{2} = 4950$ de trasee.

Remarcă: insistăm pentru probleme și tehnicile de numărare elementare, la clasele de gimnaziu, fără a forța nota.

VI.165 Alegem 61 de numere naturale nenule, distincte, a căror sumă este 2044. Arătați că printre aceste numere se găsește cel puțin unul care să reprezinte volumul unui cub cu lungimea laturii exprimată printr-un număr natural.

Concurs București, 2009

Soluție: Presupunând că niciunul dintre cele 61 de numere nu este cub perfect, atunci suma lor minimă ar fi:
$(1+2+3+...+65)-(1+8+27+64)=2045$. Cum $2045>2044$ înseamnă că unele dintre primele 61 de numere naturale trebuie înlocuite cu altele mai mici pentru a ajunge la suma din enunț. Singurele mai mici excluse sunt cuburi! Rămâne de arătat că suma poate fi 2044. E suficient să înlocuim, de exemplu, numărul 65 cu 64 și obținem numerele: $2,3,4,5,6,7,9,10,...,26,28,29,...,64$. Acestea au suma egală cu 2044.

VI.166 Pe tablă sunt scrise numerele 29 și 30. Un *pas* înseamnă scrierea pe tablă a unui număr nou, egal cu suma oricăror două dintre numerele scrise deja pe tablă. Este posibil ca, după mai mulți *pași*, pe tablă să fie scris numărul 2009 ?

Concurs Caraș – Severin, 2009

Soluție: După un pas avem, de exemplu, numărul $29+30=59$. După al doilea pas avem numărul $59+30=89$. Observăm(dacă observăm!) că avem $2009=29+30\cdot 66$ și, repetând procedeul anterior, după 66 de pași similari obținem numărul 2009.

VI.167 Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Demonstrați că, dacă 2^n-2 este divizibil cu 9, atunci 2^n-2 este divizibil cu 63.

Prof. Andrei Eckstein, Timișoara

Soluție: Dacă *r* este restul împărțirii lui *n* prin 6, avem:
$2^n=2^{6k+r}=\left(2^6\right)^k\cdot 2^r=(63+1)^k\cdot 2^r=(M63+1)\cdot 2^r$. Avem că numărul 2^n-2 se divide prin 9 dacă și numai dacă 2^r dă restul 2 la împărțirea prin 9; aceasta se întâmplă doar pentru $r=1$. Concluzia este aproape evidentă.

VI.169 Pe o dreaptă se consideră un punct fix A, un punct mobil P și mijlocul N al segmentului *(AP)*. Când punctul P se deplasează pe dreaptă și ajunge în poziția P', punctul N ajunge în poziția N'. Ce relație există între lungimile segmentelor PP' și NN' ?

Concurs București, 2009

Soluție: $NN'=\frac{1}{2}\cdot PP'$ (pentru o justificare completă trebuie considerate toate cazurile posibile care apar din diverse poziționări ale punctelor)

Clasa a VII-a

VII.160 Arătați că numărul $\sqrt{5^1+5^2+5^3+...+5^{2009}}$ este irațional.

Călin Gheorghișan, elev, Oravița

Soluție: Suma are 2009 de termeni, deci se divide cu 5, dar nu și cu 25

VII.161 Să se demonstreze că dacă într-un triunghi cu laturile a,b,c avem $a=1$ și $b,c\in\mathbb{N}^*$, atunci triunghiul este isoscel.

Miruna Ciulu, elevă Reșița

Soluție: $|b-c|<a=1, b,c\in\mathbb{N}^*\Rightarrow b=c$

VII.162 Să se demonstreze că numărul
$n=2007\cdot 2008\cdot 2009\cdot 2010+1$ este pătrat perfect.

Miruna Ciulu, elevă Reșița

Soluție: Problemă cunoscută chiar în caz general:
$A=n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$. Notăm
$n^2+3n=u\Rightarrow A=u(u+2)+1=(u+1)^2$

VII.163 Aflați numerele naturale x și y pentru care $\sqrt{4x-x^2-3}$ este număr rațional.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeș

Soluție: Ne cerem scuze pentru omisiunea de la tipar. Corect este $\sqrt{4x-x^2-3y}, x,y\in\mathbb{N}$. Încercați acum.

VII.166 Determinați numerele naturale *x, y, z* pentru care:

$$\frac{3x}{3x+2}=\frac{6y}{3y+4}=\frac{x+y+z}{2x+3y+3}$$

Prof. Ion Rotaru, Craiova

Soluție: Din egalitatea primelor două rapoarte avem

$y=\frac{4x}{3x+4}\in\mathbb{N}\Rightarrow(3x+4)/12x$. Cum

$(3x+4)/4\cdot(3x+4)\Rightarrow(3x+4)/16$, imediat ajungem la $x=4, y=1, z=7$

VII.167 Se consideră un unghi ascuțit $\measuredangle xOy$ și un punct *P* în interiorul său. Notăm cu *M* și *N* simetricele lui *P* față de *Ox*, respectiv *Oy*. Arătați că: a) triunghiul *OMN* este isoscel; b) $OP>\frac{MP+PN}{4}$.

Concurs Comănești, 2009

Soluție: a) $OP=OM, OP=ON\Rightarrow OM=ON$

b) în $\Delta OPN\Rightarrow OP>\frac{PN}{2}$, iar în $\Delta OPM\Rightarrow OP>\frac{MP}{2}\Rightarrow$

$2OP>\frac{PN+MP}{2}\Rightarrow OP>\frac{MP+NP}{4}$

VII.168 Fie triunghiul ascuțitunghic *ABC*. Pe semidreapta *(AC* se consideră punctul *D* astfel încât $BA=BD$, iar pe *(AB* se consideră *E* astfel încât $CA=CE$. Notăm cu *M* mijlocul segmentului *(AD)* și cu *N* mijlocul segmentului *(AE)*.Dacă $\{P\}=BM\cap CN$, arătați că: $AP\perp BC$.

Prof. Constantin Apostol, Rm. – Sărat

Soluție: ΔBAD este isoscel, iar BM este mediană $\Rightarrow BM\perp AC$. La fel, ΔCAE este isoscel, iar CN este mediană$\Rightarrow CN\perp AB$. Deducem că P este ortocentru, deci $AP\perp BC$.

VII.169 Determinați două mulțimi disjuncte *A* și *B* care verifică simultan condițiile: a) $A\cup B=\{1,2,3,...,2009\}$;

b) toate elementele din *B* se pot exprima ca sumă de elemente distincte din *A*;

c) niciun element din *A* nu se poate exprima ca sumă de alte elemente distincte din *A*.

Concurs Suceava, 2009

Soluție:

$A=\{1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024,...,2009\}$, $B=\{1,2,3,...,2009\}\setminus A$.

Verificare!

Clasa a VIII-a

VIII.160 O piramidă gigantică are în total 101 vârfuri. Aflați numărul maxim de plane distincte determinate de aceste vârfuri.

Prof. Maria Iancu, Oravița

Soluție: Scuze, pentru orice elev care cunoaşte puțină combinatorică, răspunsul este C_{101}^{3} plane. Pentru cineva care nu ştie asta, trebuie să învețe să numere; plane determinate de $A_1, A_2, A_k, k=\overline{3,101}$ sunt 99, plane determinate de $A_1, A_3, A_j, k=\overline{4,101}$ sunt 98,…, iar A_1, A_{100}, A_{101} determină un plan. Considerând la fel, avem 98 de plane determinate de punctele A_2, A_3, A_l etc. Aşadar, problema este instructivă, dar nu e potrivită pentru un concurs.

VIII.161 Determinați toate perechile (d,n) de numere naturale, $d\geq 2,\ n\geq 2$, care satisfac: $d/(n^2+1)$ și $d/(n^2+2n+2)$

Prof.univ.dr. Vasile Pop, Cluj – Napoca

Soluție: Notăm $a_n=n^2+1, b_n=n^2+2n+2$. Din

$d/a_n, d/b_n\Rightarrow d/(b_n-a_n)\Rightarrow d/(2n+1)\Rightarrow d/n(2n+1)\Rightarrow d/(2n^2+n)$.

Cum $d/2a_n\Rightarrow d/(n-2)$. Din $d/(2n+1)$ și $d/(n-2)\Rightarrow d/5\Rightarrow d=5$.

Ajungem acum imediat la $5/(n-2)\Rightarrow n=5k+2, k\in\mathbb{N}$ (Problemă de mare tehnică, părerea noastră)

VIII.162 Determinați numerele întregi *a,b,c,d* pentru care

$$ac+bd=1 \text{ și } ad+bc=2$$

Concurs Iaşi, 2008

Soluție: Adunăm egalitățile din enuenț și ajungem la $(a+b)(c+d)=3\ (*)$. Scădem relația (1) din relația (2) şi ajungem la $(a-b)(d-c)=1\ (**)$. Din (**) avem două cazuri:

Caz I: $a-b=1, d-c=1$. Deducem $a=1+b, d=c+1$, înlocuind obținem $(2b+1)(2c+1)=3$. Imediat ajungem la $b=1, c=0, a=2, d=1$ sau $b=0, c=1, a=1, d=2$. De asemenea, avem şi $b=-1, c=-2, a=0, d=-1$ sau $b=-2, c=-1, a=-1, d=0$. Analog pentru cazul II, $a-b=-1, d-c=-1$

VIII.163 Un număr natural se numeşte *pretențios* dacă se poate scrie sub forma x^2+3y^2 cu *x* şi *y* numere întregi. Demonstrați că:

a) 268 şi 279 sunt numere *pretențioase;*
b) Numărul 1001 nu este *pretențios;*
c) Produsul a două numere *pretențioase* este un număr *pretențios.*

Prof. Ion Pătraşcu, Craiova

Soluție: a) $268=16^2+3\cdot 2^2, 279=6^2+3\cdot 9^2$

b) Dacă ar exista $x, y\in\mathbb{Z}$ pentru care $1001=x^2+3y^2$ am avea $1+x^2+3y^2=1002$. Deoarece 1002 şi $3y^2$ sunt divizibile cu 3, deducem că $x^2=3k+2, k\in\mathbb{N}$. Cum însă, pentru $x=3p\Rightarrow x^2\neq 3k+2$, pentru $x=3p+1\Rightarrow x^2\neq 3k+2$, $x=3p+2\Rightarrow x^2\neq 3k+2$ deducem că 1001 nu este pretențios

c) $\left(x^2+3y^2\right)\left(y^2+3t^2\right)=...=(xy-3yt)^2+3(xt-yz)^2$

VIII.164 Fie *x,y,z* numere reale nenule astfel încât *xy,yz,zx* sunt numere raționale.

a) Arătați că numărul $x^2+y^2+z^2$ este rațional;
b) Dacă, în plus, numărul $x^3+y^3+z^3$ este rațional nenul, arătați că x, y, z sunt raționale.

Concurs Piatra – Neamț, 2008

Soluție: a) $x^2=\dfrac{(xy)(yz)}{yz}\in\mathbb{Q}$ şi analoagele $\Rightarrow\left(x^2+y^2+z^2\right)\in\mathbb{Q}$

b) am demonstrat că $x^2\in\mathbb{Q}$, de unde $x^3y, x^3z, yz^3, ...\in\mathbb{Q}\Rightarrow y\left(x^3+y^3+z^3\right)\in\mathbb{Q}\Rightarrow y\in\mathbb{Q}$. Analog celelalte

VIII.165 Arătați că, dacă în piramida *VABCD*, cu baza *ABCD* pătrat, muchiile laterale sunt congruente, atunci înălțimea piramidei are piciorul în centrul pătratului.

Prof. Constantin Apostol, Rm. – Sărat

Soluție: Rezultat valabil pentru baza ABCD patrulater inscriptibil, înscris în cercul de centru O. Concluzia se obține imediat din $OA=OB=OC=OD$, apoi: $VA=VC, OA=OC\Rightarrow VO\perp AC$. La fel, $VO\perp BD\Rightarrow VO\perp(ABCD)$

VIII.166 Determinați numerele naturale nenule *a* şi *b* pentru care

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)\in\mathbb{N}$$

Concurs Focşani, 2009

Soluție: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\leq\frac{1}{1}+\frac{2}{1}=3\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\in\{1,2,3\}$.

Dacă $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1\Rightarrow a=3, b=3$ sau $a=2, b=4$.

Dacă $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=2\Rightarrow a=1, b=2$, iar dacă $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=3\Rightarrow a=1, b=1$

VIII.167 Stabiliți natura triunghiului în care lungimile *a,b,c* ale laturilor satisfac: $a+b+c=3$ şi $c^2-2ab+4(a+b)\leq 7$.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

Soluție: $c=3-a-b$ şi inegalitatea din enunț conduce imediat la $(a-1)^2+(b-1)^2\leq 0\Rightarrow a=b=c=1$, aşadar triunghiul este echilateral.

VIII.168 Determinați perechile (x, y) de numere întregi pentru care

$$x(2x+y+1)=y^2+2y+3.$$

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: Egalitatea se poate scrie: $2x^2+xy+x-y^2-2y-3=0$. Căutăm o descompunere de forma $(x+y+a)(2x-y+b)=c$ (aşa ne "spune" bunul simț matematic-experiența- care se câştigă prin rezolvări de probleme, cel puțin).. Efectuăm calculele şi ajungem la $a=1, b=-1, c=2$. Aşadar $(x+y+1)(2x-y-1)=2$, şi, deoarece suntem în $\mathbb{Z}$ urmează analizarea câtorva cazuri. De exemplu, $x+y+1=2, 2x-y-1=1 \Rightarrow x=1, y=0$. Continuați!

VIII.169 Arătați că, dacă $x, y>0$ și $xy=1$, atunci $\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}\geq 1$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

Soluție: Deoarece $y=\frac{1}{x}$, calcule imediate conduc la concluzia că suma din stânga este egală cu $\frac{x^2-x+1}{x}\geq 1$. Evident, $\frac{x^2-x+1}{x}\geq 1$ este echivalentă, pentru $x>0$ cu $(x-1)^2\geq 0$, inegalitate adevărată.

Sau, şi mai instructiv, $\frac{x^2-x+1}{x}=x+\frac{1}{x}-1\geq 2-1=1$

Clasa a IX-a

IX.160 Să se găsească un număr natural n cu proprietatea

$$n=3\cdot\left[\sqrt{n}\right]+1$$

Să se arate că există numai două astfel de numere.

Prof. Loreta Ciulu, Reşița

Soluție: $\left[\sqrt{n}\right]=\frac{n-1}{3}=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow n=3k+1$. Din $\left[\sqrt{3k+1}\right]=k$ deducem: $k\leq\left[\sqrt{3k+1}\right]=k+1$, imediat se ajunge la $k\in\{2,3\}\Rightarrow n\in\{7,10\}$

IX.161 Determinați numerele naturale nenule *n* pentru care

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}<\frac{n^3}{2^n}.$$

* * *

Soluție: Evident sunma din stânga este cel puțin egală cu 1, pe când $\frac{n^3}{2^n}\leq 1$ pentru $n\in\mathbb{N}, n\geq 10$ (inducție). Rămâne de verificact care elemente ale mulțimii $\{2,3,4,...,9\}$ sunt convenabile.

IX.162 a) Arătați că nu există funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $f\left(x^2-x+1\right)+f\left(x-x^2\right)=x^2+1,\ \forall x\in\mathbb{R};$

b) Arătați că, pentru orice $k\in\mathbb{R}$, există $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $g\left(x^2-x+1\right)+g\left(x-x^2\right)=k,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

Soluție: a) facem $x=0$, apoi $y=1$ şi ajungem la $f(0)+f(1)=1=f(1)+f(0)$, absurd

b) Căutăm funcții de gradul I pentru început; găsim, de exemplu, $g(x)=kx$ sau $g(x)=x+\frac{k-1}{2}$

IX.163 Determinați numărul elementelor mulțimii

$$A=\left\{x\in\mathbb{Q}/x=\frac{n^2+2n}{n^2+n+1}, n=\overline{1,2009}\right\}.$$

* * *

Soluție: Problemă clasică. Determinăm $n, p\in\{1,2,...,2009\}$ pentru care $\frac{n^2+2n}{n^2+n+1}=\frac{p^2+2p}{p^2+p+1}$. Calcule imediate conduc la $(p-n)(pn-p-n-2)=0$. Pentru $p\neq n$ obținem $p=1+\frac{3}{n-1}\in\mathbb{N}^*\Rightarrow n-1\in\{1,3\}\Rightarrow n=2, p=4$ sau $n=4, p=2$. Aşadar, două din fraciile din A sunt egale, $x(2)=x(4)$, deci A are 2008 elemente.

IX.164 Determinați funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care satisfac proprietățile:

a) $f(x+2y)=x+2f(y),\ \forall x, y\in\mathbb{R};$

b) $g(x+g(2y))=x+2g(y),\ \forall x, y\in\mathbb{R}.$

* * *

Soluție: a) pentru $y=0$ avem $f(x)=x+2f(0)$, deci $f(x)=x+a, \forall a\in\mathbb{R}$ (a constantă)

b) $g(x)=x, \forall x \in \mathbb{R}$. Într-adevăr, pentru $y=0 \Rightarrow g(x+g(0))=x+2g(0)$. Notăm $g(0)=a \Rightarrow g(x+b)=x+2b$; notăm $x+b=y \Rightarrow g(y)=y+b$. Verificare!

IX.165 Arătați că, dacă $a,b,c,d \in [-2,\infty)$ şi $a+b+c+d=16$, atunci

$$a^3+b^3+c^3+d^3 \geq 40.$$

Prof.Dan Ştefan Marinescu, Ion Şerdean, Hunedoara

Soluție: Folosim $a^3-3a+2=(a+2)(a-1)^2$ şi deducem

$$\sum(a+2)(a-1)^2 \geq 0 \text{ şi } \sum a^3 - 3\sum a + 8 \geq 0 \Rightarrow \sum a^3 \geq 40$$

IX.166 Determinați cel mai mic număr natural n pentru care primele două zecimale ale numărului $\sqrt{n^2+4n+1}$ sunt egale cu 9.

Prof. Costel Anghel, Slatina

Soluție: Din $(n+1)^2 \leq n^2+4n+1 < (n+2)^2 \Rightarrow \left[\sqrt{n^2+4n+1}\right]=n+1 \Rightarrow$

$\sqrt{n^2+4n+1}-(n+1) \geq 0{,}99 \Rightarrow n \geq \dfrac{29601}{200} \Rightarrow n \geq 149.$ Numărul cerut este 149.

IX.167 Determinați $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $3+3^n=3\cdot 2^n$.

Prof.Dan Negulescu, Brăila

Soluție: $1+3^{n-1}=2^n.$ Observăm soluțiile $n=1, n=2$. Pentru $n<0 \Rightarrow 3^{n-1}=2^n-1<0,$ fals. Pentru $n>3$ se arată imediat că $3^{n-1}>2^n$

IX.168 Se consideră un triunghi *ABC* în care $m(\measuredangle ABC)=120^o$. Perpendiculara din *B* pe *BC* taie pe *AC* în *D*. Arătați că, dacă $\dfrac{DC}{AC}=t \in (0,1)$, atunci $t\cdot AB = 2\cdot(1-t)\cdot BC.$

Concurs Bacău, 2008

Soluție: Construim

$$AM \parallel BD, M \in BC \Rightarrow \Delta CBD \sim \Delta CMA \Rightarrow \frac{CB}{CM}=\frac{CD}{CA}=t \Rightarrow \frac{CB}{CB+BM}=t$$

$\Rightarrow BC\cdot(1-t)=t\cdot BM \quad (1)$. Totodată, din ΔAMB cu $\sphericalangle M=90°, \sphericalangle BAM=30°,$ avem $BM=\dfrac{AB}{2}$ şi astfel (1) conduce la concluzia dorită.

IX.169 Se consideră un triunghi *ABC* în care $AB = AC$ şi un punct *D* pe latura *AC* astfel încât $CD=2\cdot DA$. Fie *M* un punct pe segmentul (BD). Arătați că $\measuredangle MCB \equiv \measuredangle MBA$ dacă şi numai dacă $AM \perp MC$.

Prof.univ.dr. Dan Brânzei, Iaşi

Soluție: $\sphericalangle MCB \equiv \sphericalangle MBA \Rightarrow \sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle MCA,$ deoarece avem triunghi isoscel; notăm $m(\sphericalangle MCB)=x, m(\sphericalangle MCA)=y \Rightarrow m(\sphericalangle DMC)=x+y \quad (1)$

Considerăm acum N astfel încât ABCN este patrulater inscriptibil

$\Rightarrow \sphericalangle ACN=\sphericalangle ABN=x \quad (2),\ \sphericalangle NAC=\sphericalangle MBC=y \quad (3)$

$\Rightarrow \sphericalangle MCA \equiv \sphericalangle NAC \Rightarrow AN \parallel MC \quad (4)$. Fie $\Rightarrow MA \cap NC=\{P\}$. Din

$\Rightarrow \dfrac{DA}{DC}=\dfrac{1}{2}$ avem $\Rightarrow \dfrac{DN}{DM}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{AM}{MC}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ AN este linie mijlocie în $\Delta PMC \quad (5)$. Dar, $\sphericalangle NMC \equiv \sphericalangle MBC+\sphericalangle MCB=x+y;$ cum $\sphericalangle NCM=x+y \Rightarrow \Delta NMC$ este isoscel

$\Rightarrow MN=NC \Rightarrow MN=\dfrac{PC}{2} \Rightarrow \Delta PMC$ este dreptunghic cu $AM \perp MC$.

Reciproca ar trebui să o încercați singuri.

Clasa a X-a

X.160 Fie $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ rădăcinile ecuației $z^2+2z+4=0$. Calculați $S=\alpha^7+\beta^7$ şi $T=(\alpha+2)^5+(\beta+2)^5$.

* * *

*Soluție:*Problemă de clasă. Avem imediat că

$\alpha^2+2\alpha+4=0 \Rightarrow (\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4)=\alpha^3-8=0 \Rightarrow \alpha^3=8$. Analog, $\beta^3=8 \Rightarrow S=\alpha+\beta=-2$. Pe de altă parte avem

$$\alpha+2=-\frac{\alpha^2}{2}, \beta+2=-\frac{\beta^2}{2} \Rightarrow T=-\frac{1}{2^5}(\alpha^{10}+\beta^{10})=-\frac{1}{2^5}(\alpha+\beta)=\frac{1}{16}$$

X.161 Se consideră numerele complexe

$$a = 1+3i,\ b = -2+mi,\ c = 4+mi.$$

Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât imaginile geometrice ale numerelor considerate să fie vârfurile unui triunghi dreptunghic.

* * *

Soluție: Deosebim trei cazuri, să analizăm unul dintre ele(celelalte sunt analoage): $|a-b|^2+|a-c|^2=|b-c|^2 \Rightarrow 9+(3-m)^2+9+(m-3)^2=36 \Rightarrow m\in\{0,6\}$

X.162 a) Arătați că: $\cos\frac{\pi}{12} \notin \mathbb{Q}$;

b) Dacă $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z+z^{-1}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$, determinați partea reală a numărului complex $u=z^{100}+z^{-100}$.

* * *

Soluție: a) folosim $\cos 2x = 2\cos^2 x-1$. Dacă $\cos x\in\mathbb{Q} \Rightarrow \cos 2x \in \mathbb{Q}$. În cazul nostru, $\cos\frac{\pi}{12}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\in\mathbb{Q}$, fals

b) $z+z^{-1}=2\cos\frac{\pi}{12}=2\cos t$. Se obține imediat $z^n+z^{-n}=2\cos\frac{n\pi}{12}=2\cos nt$

X.163 a) Rezolvați ecuația: $\log_2(6-x)=\log_3(x-4)$;

b) Determinați numerele întregi y pentru care $\log_2(6-y)=\log_3\left(1+\sqrt{y}\right)$

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

Soluție: a) $\log_2(6-x)=\log_3(x-4)=t \Rightarrow 2^t=6-x, 3^t=x-4 \Rightarrow 2^t+3^t=2$.

Se arată imediat că avem soluție unică $t=0 \Rightarrow x=5$

b) $y\in(0,6)\cap\mathbb{Z}$. Avem doar 5 cazuri de studiat. Se obține $y=4$

X.164 Funcția $f:\mathbb{R}\to A, f(x)=a^x+b$, cu $a>0, a\neq 1$, este bijectivă, având inversa g. Dacă $g(7)=1, g(9)=2$, calculați $f(3)$, precizați A și determinați numerele naturale n pentru care $f(n)=3^n$.

* * *

Soluție: Problemă de clasă: $g(7)=1\Rightarrow f(1)=7, g(9)=2 \Rightarrow f(2)=9$. Din $a+b=7, a^2+b=9 \Rightarrow a=2, b=5$ deci $f(x)=2^x+5$. Avem astfel $f(3)=13, A=(5,\infty)$ și $n=2$

X.165 Demonstrați că: $\frac{17}{5}<\log_2 5+\log_5 8<4$

* * *

Soluție: Se arată imediat că $\log_2 5<\frac{5}{2}$ și $\log_5 8<\frac{3}{2}$. Pe de altă parte, cu inegalitatea mediilor avem $\log_2 5+\log_5 8 \geq 2\cdot\sqrt{\log_2 5\cdot \log_5 8}=2\sqrt{3}>\frac{17}{5}$

X.166 Rezolvați ecuația: $\left(\sqrt{5}+2\right)^x+\left(9-4\sqrt{5}\right)^x=2$.

* * *

Soluție: Notăm $\left(\sqrt{5}-2\right)^x=t \Rightarrow t^2+\frac{1}{t}=2 \Rightarrow (t-1)\left(t^2+t-1\right)=0, t>0$ etc.

X.167 Demonstrați că: $\log_3 8 \geq \frac{11}{6}$.

Prof. Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

Soluție: Cu inegalitatea mediilor avem:

$$8=\frac{48}{6}=\frac{3+9\cdot 5}{6}\geq \sqrt[6]{3\cdot 9^5}=\sqrt[6]{3^{11}} \Rightarrow \log_3 8 \geq \frac{1}{6}\log_3 3^{11}=\frac{11}{6}$$

X.168 Demonstrați că: $3\sin x+\frac{1}{\sin^3 x}>4$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Prof. Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

Soluție: Notăm $\sin x = t$, deci inegalitatea se poate scrie: $(t-1)^2\left(3t^2+2t+1\right)>0$. Variantă: inegalitatea se poate scrie: $\frac{3t^4+1}{4}>t^3$ și, folosind inegalitatea mediilor, avem:

$\frac{3t^4+1}{4}=\frac{t^4+t^4+t^4+1}{4}>4\sqrt[4]{\left(t^4\right)^3\cdot 1}=t^3$. (Mihai Monea)

X.169 O funcţie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ se numeşte *complicată* dacă

$$f(x+2y)+2f(3x+y)=3f(x+y),\ \forall x,y\in\mathbb{N}.$$

a) Studiaţi dacă există funcţii injective *complicate;*
b) Studiaţi dacă există funcţii surjective *complicate.*

Prof. Lucian Dragomir, Oţelu – Roşu

Soluţie: a) Pentru $y=0$ ajungem la $f(x)=f(3x),\forall x\in\mathbb{N}$, deci *f* nu poate fi injectivă.
b) $x=0\Rightarrow f(2y)=f(y),\forall y\in\mathbb{N}$; pentru $x=y$ ajungem apoi la $f(4y)=f(y),\forall y\in\mathbb{N}$; pentru că nu am primit nicio soluţie completă, pentru că ni se pare destul de incitantă problema, mai aşteptăm!!!

Clasa a XI-a

XI.160 Se notează cu G mulţimea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ale căror elemente sunt exact elementele mulţimii $\{1,3,5,7\}$ şi $H=\{\det A / A\in G\}$.
a) Arătaţi că: $0\notin H$;
b) Determinaţi cel mai mare element al mulţimii H;
c) Arătaţi că există $b\in\mathbb{R}$ şi $B\in G$ astfel încât $B^2=b\cdot B+8b\cdot I_2$.

* * *

Soluţie: a) $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in G\Rightarrow\{a,b,c,d\}=\{1,3,5,7\}$ şi
$\det A=0\Rightarrow ad=bc$, absurd
b) $5\cdot7-1\cdot3=32$ c) $B=\begin{pmatrix} 1 & 5\\ 7 & 3\end{pmatrix}\in G$ şi
$trB=4,\det B=-32\Rightarrow B^2-4B-32I_2=0_2$, deci $b=4$

XI.161 Studiaţi convergenţa şirului definit prin $x_n=\dfrac{9^n}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^{2n}},n\geq1$.

* * *

Soluţie: Problemă clasică. Avem imediat că

$$x_n=\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{2n}\Rightarrow\lim x_n=e^{-\frac{3}{2}}$$

XI.162 Studiaţi convergenţa şirului definit prin $x_1=1,\ 3x_{n+1}=x_n-4,\ \forall n\geq1$.

* * *

Soluţie: Altă problemă clasică. Avem imediat că

$x_{n+1}=\dfrac{x_n-4}{3}\Rightarrow|x_{n+1}+2|=\dfrac{|x_n+2|}{3}=\dfrac{|x_{n-1}+2|}{3^2}=...=\dfrac{|x_1+2|}{3^n}$. Cum

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_1+2|}{3^n}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=-2$$

XI.163 Dacă $(x_n)_{n\geq1}$ este un şir definit prin $x_1=a>0$ şi $x_{n+1}-\ln(n+1)=x_n-\ln n,\ \forall n\geq1$, studiaţi convergenţa şirurilor $(x_n)_{n\geq1}$ şi $(y_n)_{n\geq1}$, unde $y_n=\dfrac{x_n}{n},\forall n\geq1$.

Prof. Lucian Dragomir, Oţelu – Roşu

Soluţie: $x_{n+1}-x_n=\ln(n+1)-\ln n,\forall n\geq1$. Adunăm, membru cu membru, egalităţile care se obţin pentru $n=1,2,3...$ şi se ajunge la $x_{n+1}-x_1=\ln n\Rightarrow x_n=a+\ln n$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$. Avem acum

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{n+1-n}=0,\text{ de unde(Cesaro-Stolz) }\lim_{n\to\infty}y_n=0$$

XI.164 Dacă $A,B,C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ verifică egalităţile $3AB+A+B=O_n$ şi $3AC+A+C=O_n$, arătaţi că $B=C$.

Prof. Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

Soluţie: Prima inegalitate se poate scrie:
$(3A+I_3)(3B+I_3)=I_3\Rightarrow 3A+I_3$ inversabilă. Scădem acum cele două egalităţi din enunţ şi avem: $(3A+I_3)(B-C)=0_3\Rightarrow B-C=0_3\Rightarrow B=C$

XI.165 Se consideră determinantul $D=\begin{vmatrix} a+2 & 2a-1 & a^2\\ b+2 & 2b-1 & b^2\\ c+2 & 2c-1 & c^2\end{vmatrix}$. Stabiliţi natura triunghiului care are lungimile laturilor *a,b,c* în cazul $D=0$.

* * *

Soluție: Scădem linia 1 din celelalte şi eventuale calcule imediate conduc la $D = k(b-a)(c-b)(c-a)$, deci triunghiul e isoscel.

Clasa a XII-a

XII.161 Arătați că funcția $f:\mathbb{Z} \to 3\mathbb{Z}$ este un morfism între grupurile $G = (\mathbb{Z},+)$ şi $H = (3\mathbb{Z},+)$. Stabileşte funcția *f* chiar un izomorfism între grupurile *G* şi *H* ?

* * *

Soluție: omisiune: $f(x) = 3x$

XII.162 Determinați ordinul elementului $\hat{7}$ în grupul $(\mathbb{Z}_{2009},+)$

* * *

Soluție: $2009 = 7 \cdot 287 \Rightarrow ord(\hat{7}) = 287$

XII. 163 Arătați că orice grup $(G,\cdot)$ pentru care există $a,b \in G$ astfel încât $ab^2 = ba$ şi $b^4 = e$, este un grup finit.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: prin înmulțire la dreapta cu b^2, prima egalitate devine: $ab^4 = bab^2 \Rightarrow a = bab^2 = b(ba) \Rightarrow b^2 = e$. Prima egalitate din enunț devine $a = ba \Rightarrow b = e$. Aşadar egalitățile din ipoteză au loc pentru orice $a \in G$ şi deci NU REZULTĂ că grupul e finit!

XII.165 Calculați: $I = \int \frac{x^{3n-1} - x^{n-1}}{x^{4n} - x^{2n} + 1} dx$, $n \geq 2$, $x \in (0,\infty)$.

Prof. Alfred Eckstein,Viorel Tudoran, Arad

Soluție: $I = \frac{1}{n}\int \frac{u'}{1+u^2}dx$ unde $u(x) = x^n - \frac{1}{x^n} \Rightarrow I = \frac{1}{n} arctg(u(x)) + C$

XII.166 Calculați $J = \int \frac{x(x^3-1)}{(x^2+1)(x^5+1)} dx$, $x > 0$.

Red. RMCS

Soluție: $J = \int \frac{x^4}{x^5+1}dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{5}\ln(x^5+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

XII.167 Calculați: $K = \int \frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x} \cdot e^x dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: Remarcăm că $\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{\sin x}{\cos x}, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi folosim metoda integrării prin părți. Ajungem la $K = \frac{1}{\cos x} \cdot e^x + C$.

XII. 169 Să se dea un exemplu de lege de compoziție pe $\mathbb{Q}$ care are elementul neutru $e = 0$ şi pentru care simetricul lui $x = 1 \in \mathbb{Q}$ există,dar este un număr din $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: Spre exemplu, legea definită prin $x \circ y = xy + x + y, \forall x, y \in \mathbb{Q}$

Probleme propuse
(se primesc soluții până în data de 31 august 2010, nu mai târziu!)

Clasa I

I.51 Doi frați gemeni au împlinit 10 ani.
Câți ani au trecut de când s-au născut?

Înv. Ana Modoran, Reşița

I.52 Un cor compus din 22 de copii interpretează o melodie în 4 minute. În cât timp va fi interpretată melodia de un cor compus din 44 de copii ?

Înv. Ana Modoran, Reşița

I.53 Într-o zi, tatăl şi mama lui Aricilă adună câte 5 mere fiecare.
Câte mere adună fiecare în 4 zile? Câte mere are familia în total în 4 zile?

Inst. Nicoleta Marcu, Reşița

I.54 Șaizeci şi patru şi cu unul şi cu altul şi cu doi legat de patru, cât fac?

Înv. Ana Modoran, Reşița

I.55 Albinuța Zum-Zum a adunat nectar de pe 24 narcise, de pe viorele, cu 10 mai multe, şi apoi de pe 11 zambile. Câte flori a colindat albinuța?

Inst. Nicoleta Marcu, Reşița

I.56 Care sunt numerele cuprinse între 45 şi 65 cu cifra unităților mai mare decât cifra zecilor?

Inst.Mihaela Mregea, Reşița

I.57 Câte numere de două cifre încep cu cifra 2 ?

Prof. Neta Novac, Reşița

I.58 Andrei şi Ioana au primit de ziua lor câte două creioane (cam puține, dar e criză...). După o zi, cel mai cuminte dintre ei a mai primit trei creioane, iar celui mai puțin cuminte i s-a luat un creion.
Câte creioane au , împreună, acum, cei doi frați ?

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

I.59 Găsiți cel mai mic număr a pentru care numărul $a+3$ este cel puțin egal cu 7 şi cel mai mare număr b pentru care $b+4$ este cel mult egal cu 9. Ce număr trebuie adunat cu suma numerelor găsite pentru a obține numărul 10 ?

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

I.60 Mihai are 9 ani ; acum doi ani, fratele său, Radu, avea cu trei ani mai puțin decât Mihai. Câți ani va avea Radu peste patru ani ?

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Clasa a II-a

II.51 De o săptămână, o cămilă străbate deşertul. Ştiind că ea rezistă 17 zile fără apă, câte zile va mai putea să meargă?

Inst. Nicoleta Marcu, Reşița

II.52 De acasă şi până la şcoala unde învață Raluca sunt 460 metri. Dacă aleargă, Raluca ajunge de 3 ori mai repede decât dacă merge normal.
Ce distanță parcurge Raluca, atunci când se duce la şcoală alergând?

Înv. Ana Modoran, Reşița

II.53 Alexandra are 21 ani, iar sora sa 8.
Cu câți ani va avea mai mult Alexandra decât sora sa peste 12 ani?

Înv. Ana Modoran, Reşița

II.54 Fie şirul : 1, 2, 5, 6, 9, 10,……………….
Completați încă şase termeni ai şirului, explicând cum ați găsit aceşti termeni.

Prof. Neta Novac, Reşița

II.55 Pe un raft au fost 45 pachete făină, iar pe altul cu 13 pachete mai puțin.Câte pachete rămân, în total, pe cele două rafturi după ce se vând 24 pachete?

Prof. Neta Novac, Reşița

II.56 Un liliac bate de 10 ori din aripi în 2 secunde. Dacă zboară 10 secunde, de câte ori bate din aripi? Dar dacă zborul durează jumătate de minut?

Inst. Nicoleta Marcu, Reşița

II.57. Marcela este cu 9 ani mai în vârstă decât Iulia. Peste 5 ani, Marcela va avea 32 de ani.
a)Câți ani are Iulia acum?
b)Câți ani vor avea cele două fete împreună peste 3 ani?

Inst. Mihaela Mregea, Reşiţa

II.58 Dan, Cosmin şi Alex. au mai multe bețişoare. Alex primeşte 3 bețişoare de la Dan şi 5 bețişoare de la Cosmin. Acum, ei au acelaşi număr de bețişoare, adică 18 bețişoare.
Câte bețişoare a avut la început fiecare băiat?

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

II.59 De Ziua Europei, elevii clasei a II-a A au primit fiecare câte o cocardă, iar băieții au mai primit şi câte un stegulеț.
Ştiind că sunt 12 fete, iar stegulețe s-au distribuit cu 3 mai multe decât numărul fetelor, aflați câți elevi sunt în clasă.

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

II.60 Diferența a două numere este 496, iar scăzătorul este dublul numărului 60.Calculează descăzutul.

Prof. Maria Popovici, Sicheviţa

Clasa a III-a

III.51 Gheorghe,Ion si Petre sunt prenumele a trei elevi.Numele lor de familie sunt tot Gheorghe,Ion si Petre,dar astfel încât nici unul dintre ei nu are numele de familie la fel ca prenumele.
Dacă numele de familie al lui Ion nu este Petre,să se afle numele şi prenumele celor trei.

Inst. Daniela Azamfirei – Marinca, Moldova Nouă

III.52 Maria are o sumă de bani. Dacă şi-ar cumpăra 7 cărți de acelaşi fel i-ar mai rămâne 6 lei, iar dacă şi-ar cumpăra 7 cărți de acelaşi fel ar mai avea nevoie de 18 lei.Câți lei are Maria?

Inst. Veronica Mărgărit, Noldova Nouă

III.53 Bunica are un coş cu pere pe care le împarte în mod egal celor 4 nepoți. Emauel nu a putut mânca decât jumătate din porția lui, pentru că celelalte 3 erau stricate.
Câte pere a avut bunica?

Înv. Ana Modoran, Reşiţa

III.54 Bunicul are 80 ani. Dacă un sfert din vârsta bunicului întrece cu 4 ani două pătrimi din vârsta nepotului, ce vârstă are nepotul ?

Înv. Ana Modoran, Reşiţa

III.55 Un sportiv se antrenează urcând câte două trepte şi, apoi, coborând una. După câți paşi făcuți în urcare se va afla pe treapta a zecea, dacă a pornit din fața primei trepte ?

Prof. Maxim Adamescu, Reşiţa

III.56 La ziua Dianei, mama le-a oferit invitaților câte două pahare de suc.Din trei sticle, mama a umplut 15 pahare.
Câte sticle de acelaşi fel s-au folosit dacă Diana a avut 20 invitați?

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

III.57 Bunicul lui Mihai a plantat în livadă 10 puieți de cireşi, la distanțe egale unul de celălalt.Câți m sunt între primul şi ultimul cireş dacă între al doilea şi al şaselea sunt 24 m?

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

III.58 Suma a patru numere naturale consecutive este 406. Aflați suma dintre cel mai mic şi cel mai mare dintre cele patru numere.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

III.59 Găsiți câte numere naturale *a* satisfac următoarele proprietăți:
1) $a+123$ este cel puțin egal cu 234 şi
2) $a+345$ este cel mult egal cu 456.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

III.60 Un kg de banane şi două kg de mere costă 7 lei, două kg de mere şi trei kg de portocale costă 16 lei, iar un kg de portocale şi trei kg de banane costă 13 lei. Câte kg de fructe putem cumpăra cu 10 lei, dacă vrem să mâncăm fructe din fiecare fel ?

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Clasa a IV-a

IV.51 Găsiţi cel mai mic număr natural de 4 cifre care îndeplineşte simultan condiţiile:

a) nu are cifre care să se repete;
b) este mai mare decât 2000;
c) are suma numerelor reprezentată de cifrele sale egală cu 9.

Prof. Neta Novac, Reşiţa

IV.52 Pentru 5 kg de cireşe s-a plătit suma de 75 lei. Cât se va plăti pentru 9 kg cireşe de aceeaşi calitate?

Prof. Neta Novac, Reşiţa

IV.53 Un şanţ poate fi săpat de 6 muncitori în 4 zile. În câte zile îl vor săpa 2 muncitori?

Prof. Neta Novac, Reşiţa

IV.54 Tata avea 32 de ani când s-a născut David, 34 de ani când s-a născut Glad şi 37 de ani când s-a născut Luca. Câţi ani au acum fiecare , dacă împreună au 61 de ani?

Înv. Ana Modoran, Reşiţa

IV.55 Marius depune la o bancă suma de 5 440 de lei. După fiecare an suma creşte cu un sfert din suma existentă.

Să se afle ce sumă va avea Marius după 3 ani.

Înv. Ana Modoran, Reşiţa

IV.56 Un robinet deschis la jumătate din debitul său umple un rezervor de 400 l în 4 ore.În cât timp vor umple, acelaşi rezervor, două robinete de acelaşi fel, deschise în totalitate? Câţi litri de apă curg printr-un robinet în 30 de minute?

Prof.Maxim Adamescu, Reşiţa

IV.57 Într-un microbuz urcă la prima staţie jumătate din numărul călătorilor aflaţi încă de la plecare în microbuz şi coboară, apoi 3. La următoarea staţie urcă 7 călători, dublându-se, astfel, numărul iniţial de călători. Aflaţi câţi călători sunt în microbuz la plecarea acestuia din a doua staţie.

Prof.Maxim Adamescu, Reşiţa

IV.58 La o librărie s-au adus 374 stilouri şi pixuri.După ce s-au vândut 133 rechizite, s-a constatat că au mai rămas trei pătrimi din numărul iniţial al stilourilor şi jumătate din numărul pixurilor.
Câte stilouri şi câte pixuri s-au adus la librărie?

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

IV.59 În patru clasoare se află acelaşi număr de timbre.După ce Vlăduţ ia câte 24 timbre din fiecare clasor, acum îi rămân în total tot atâtea timbre câte a avut la început în fiecare.
Câte timbre se aflau la început în toate clasoarele?

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

IV.60 Un tren special circulă de la Timişoara la Reşiţa, pe ruta Timişoara – Lugoj – Caransebeş – Reşiţa , având aşadar trei opriri. Găsiţi câte persoane s-au urcat în tren la Timişoara, dacă la Lugoj au coborât un sfert dintre ei, apoi la Caransebeş au coborât un sfert din cei rămaşi în tren, iar la Reşiţa au ajuns 360 de persoane.

Prof. Lucian Dragomir, Oţelu – Roşu

Clasa a V-a

V.180 Arătaţi că numărul $A = 5^{11} + 5^{22}$ nu este pătrat perfect.

Prof. Simina Moica, Arad

V.181 Se ştie că într-un săculeţ sunt bile roşii şi bile albe, care cântăresc în total 100 g.

Dacă o bilă roşie cântăreşte 5 g, iar o bilă albă cântăreşte 7 g, puteţi calcula câte bile sunt în săculeţ ?

Prof. Marius Şandru, Reşiţa

V.182 Numărul 7 poate fi scris ca sumă de două şi de trei numere prime ($7 = 2 + 5 = 2 + 2 + 3$). Aflaţi cel mai mic număr natural care poate fi scris ca sumă de două, trei, patru, cinci, şase şi şapte numere prime.

Concurs G. Moisil

V.183 Denis s-a trezit noaptea şi s-a uitat la ceas; arăta ora 2,00. Denis şi-a dat seama imediat: ceasul era oprit ! după ce i-a dat drumul, a adormit din nou. Când s-a trezit, la radio s-a anunţat ora 7,00, în timp ce ceasul de pe noptiera lui Denis arăta ora 5,30. La ce oră s-a trezit Denis noaptea ?

Concurs Iaşi

V.184 Un număr de zece cifre are exact 9 cifre egale cu 7. Arătați că numărul nu poate fi pătrat perfect.

Prof. Cristinel Mortici, Târgoviște

V.185 Patru prieteni au fiecare câte unul dintre următoarele animale: o pisică albă, un câine negru, un pește roșu și un papagal galben. Se știe că:

1) Denis nu suportă culorile alb și galben;
2) Nicu are un animal cu blană;
3) Alex și Mircea nu suportă culorile roșu și negru;
4) Dacă Alex are un animal cu patru picioare, atunci și Mircea are un animal cu patru picioare.

Găsiți ce animal are fiecare dintre cei patru prieteni.

Prof. Adriana Dragomir și Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

V.186 Se notează cu $s(M)$ suma elementelor unei mulțimi *M* cu trei elemente (numere naturale nenule). Arătați că:

a) dacă *A* și *B* sunt două mulțimi diferite pentru care $s(A)=s(B)=10$, atunci $A \cap B \neq \varnothing$;

b) dacă *A* și *B* sunt două mulțimi pentru care $A \cap B$ are un singur element, atunci $s(A)+s(B)\neq 15$.

Prof. Adriana Dragomir și Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

V.187 Ordonați crescător, in fiecare dintre următoarele cazuri, numerele date:

a) $x=2^{150}$, $y=3^{90}$, $z=5^{60}$;

b) $u=2^{211}$, $v=3^{141}$.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeș

V.188 Determinați numerele $\overline{abc}$ scrise în baza 10 pentru care numerele $x=\overline{ab}+\overline{bc}$ și $y=\overline{ba}+\overline{ac}$ reprezintă pătratul aceluiași număr natural.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeș

V.189 Determinați cel mai mare număr natural *d* care divide, pentru orice număr natural *n* , numărul $a_n = n(n+1)(2n+1)$.

Olimpiadă Moldova

Clasa a VI-a

VI.180 Într-o urnă sunt 100 de bile numerotate de la 1 la 100. Câte bile trebuie extrase din urnă pentru a fi siguri că cel puțin un număr din cele extrase, împărțit la 27, dă câtul de cinci ori mai mic decât restul ?

Concurs Târgoviște

VI.181 Cei 20 de elevi participanți la clasa a VI a la un concurs de matematică au obținut următoarele note la problema considerată cea mai dificilă : șapte elevi au obținut nota 6 sau 7, nouă elevi au obținut nota 8 sau 9, iar șase elevi au obținut nota 9 sau 10.

Aflați câți elevi au obținut nota 7, dacă media aritmetică a tuturor notelor obținute a fost 8.

Prof. Adriana și Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

VI.182 Se consideră un triunghi *ABC* și se notează cu *D* piciorul perpendicularei din *B* pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$. Arătați că *D* se află pe dreapta care unește mijloacele laturilor *(AB)* și *(BC).*

* * *

VI.183 Arătați că dintre 18 numere naturale consecutive formate din trei cifre, cel puțin unul se divide la suma cifrelor sale.

* * *

VI.184 a) Putem împărți în două grupe primele 30 de numere naturale nenule astfel încât prima grupă să conțină 20 de numere, iar suma elementelor din cele două grupe să fie aceeași ?;

b) Aceeași problemă pentru primele 100 de numere naturale nenule, iar prima grupă să conțină 70 de numere.

* * *

VI.185 La fiecare oră, din Timișoara spre București pleacă un tren. În același timp, din București spre Timișoara pleacă un alt tren. Pentru a parcurge distanța dintre cele orașe, un tren are nevoie de 7 ore. Se știe că trenurile se mișcă uniform și că se întâlnesc numai în stații. Determinați numărul minim de stații dintre Timișoara și București.

Prelucrare problemă olimpiadă Moldova

VI.186 Determinați numerele întregi *a,b,c* pentru care sunt îndeplinite simultan următoarele condiții:

1) $\frac{a+3}{2}=\frac{b+2}{3}=\frac{c}{6}$;

2) $\left(\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c}\right)\in\mathbb{Z}$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

VI.187 O mulțime *M* de numere naturale are proprietatea *(P)* dacă pentru orice $x\in M$ avem: $(x-4)\in M$ sau $\frac{x}{4}\in M$.

Arătați că:

a) există mulțimi cu cinci elemente care au proprietatea *(P);*
b) dacă *M* are proprietatea *(P)*, atunci $9\notin M$;
c) dacă *M* are proprietatea *(P)* și $16\in M$, atunci $0\in M$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

VI.188 Arătați că dacă *n* este un număr natural impar, atunci numărul divizorilor naturali ai lui *n* divide numărul divizorilor naturali ai numărului $s=1+2+3+...+n$.

Prof. Andrei Eckstein, Timişoara

VI.189 Determinați cel mai mic număr natural n pentru care fracția $\frac{n+5}{20n+11}$ se poate simplifica.

Prof. Andrei Eckstein, Timişoara

Clasa a VII-a

VII.180 Determinați numerele întregi *x* şi *y* pentru care $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{xy}=8$.

Prof. Dana Heuberger, Baia Mare

VII.181 Arătați că un număr de n $(n\geq 2)$ cărți diferite pot fi distribuite la două persoane, astfel încât fiecare să primească cel puțin o carte, în $2\cdot\left(2^{n-1}-1\right)$ feluri.

Concurs Ungaria, 1895

VII.182 În interiorul unui triunghi echilateral de latură 20 cm se pun cinci furnici. Arătați că în orice moment există două furnici care se află la o distanță mai mică decât 10 cm.

Prof. Florica Banu, Bucureşti

VII.183 Se consideră numerele naturale nenule *a,b,c* pentru care $a\cdot b<c$. Demonstrați că : $a+b\leq c$.

Concurs Baia Mare, 1989

VII.184 Pentru fiecare număr natural *n* se notează $x_n=n^3+n^2+n+a$, unde $a\in\mathbb{Z}$ este fixat.

a) Arătați că, dacă x_3 sau x_4 este divizibil cu 3, atunci x_6 este divizibil cu 3 ;
b) Determinați numerele întregi *a* pentru care x_2 și x_3 sunt pătrate perfecte.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

VII.185 Se consideră un pătrat 8×8, format din 64 de pătrățele 1×1, în care scriem cele mai mici 64 de numere prime distincte.

a) Arătați că nu putem face în aşa fel încât suma numerelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană să fie aceeaşi.
b) Arătați că nu putem face în aşa fel încât produsul numerelor de pe fiecare diagonală să fie acelaşi.

Prof. Gabriel Popa, Iaşi

VII.186 Știind că pentru numerele naturale *x* și *y* restul împărțirii numărului x^2+y^2 la 10 este 7, aflați restul împărțirii lui x^2+y^2 la 20.

Prof. Andrei Eckstein, Timişoara

VII.187 O căruță încărcată se mişcă cu viteza de 10 km/h la vale şi cu 6 km/h la deal. În aceste condiții, căruța a parcurs distanța de la satul *A* la satul *B* în două ore şi jumătate, iar de la satul *B* la satul *A* într-o oră şi jumătate. Determinați distanța dintre cele două sate, aflate pe două dealuri vecine.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

VII.188 Se consideră trei pătrate distincte *ABCD, BCEF* şi *EFGH.* Calculaţi $m(\sphericalangle EDF)+m(\sphericalangle HDG)$.

Concurs Traian Lalescu, 1986

VII.189 Să se arate că în orice trapez dreptunghic cu diagonale perpendiculare are loc inegalitatea $S > h^2$, unde S, h reprezintă aria, respectiv înălţimea trapezului.

Prof.Mihai şi Steluţa Monea – Deva

Clasa a VIII-a

VIII.180 a) Determinaţi cel mai mic număr natural *n* pentru care inegalitatea $(x+y)^2 \le n\cdot(x^2+y^2)$ este adevărată pentru orice numere reale *x* şi *y* ;

b) Determinaţi cel mai mare număr natural *m* pentru care inegalitatea $(x^2+y^2)^3 \ge m\cdot(x^3+y^3)^2$ este adevărată pentru orice numere reale *x* şi *y* .

Prelucrare problemă GM

VIII.181 Determinaţi funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de gradul întâi care satisfac simultan proprietăţile:

a) $x \le f(x) \le x+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $f(a)\in\mathbb{Z}, \forall a\in\mathbb{Z}$.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

VIII.182 Se consideră în spaţiu punctele *A,B,C,D* astfel încât $AC = BD = 2$ şi $AB = BC = CD = DA = \sqrt{2}$. Demonstraţi că punctele considerate sunt coplanare.

Prof. Mihai Bălună, Bucureşti

VIII.183 Determinaţi numerele întregi *x* şi *y* pentru care $x^2 = y(y+5)$.

Prof. Lucian Dragomir, Oţelu – Roşu

VIII.184 Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ se notează cu p_n numărul pătratelor perfecte pare mai mici sau egale cu *n*, cu i_n numărul pătratelor perfecte impare mai mici sau egale cu *n*, iar cu $d_n = p_n - i_n$.

a) Calculaţi d_0, d_1, d_2, d_3, d_4 .

b) Arătaţi că : $d_n \in \{0,1\}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Prof. Romeo Ilie, Braşov

VIII.185 Demonstraţi că există o infinitate de numere naturale distincte *a* şi *b* pentru care numerele $\sqrt{a+b}$ şi $\sqrt{a-b}$ sunt simultan raţionale.

Prof. Steluţa şi Mihai Monea, Deva

VIII.186 Se consideră un triunghi *ABC* dreptunghic în *A* şi se notează cu *D* proiecţia lui *A* pe *BC.* Dacă *O* şi *Q* sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiurile *ABD*, respectiv *ACD*, iar $BO\cap CQ = \{E\}$, demonstraţi că $OQ \perp AE$.

Concurs Traian Lalescu, Reşiţa, 1995

VIII.187 Determinaţi numărul mulţimilor nevide *M* de numere reale care au proprietatea : $(x^2+x)\in\{0,2\}$, $\forall x\in M$.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

VIII.188 Arătaţi că, dacă *M* este un punct pe arcul $\overset{\frown}{BAC}$ al cercului circumscris unui triunghi isoscel *ABC*, cu $AB = AC$, atunci $MB + MC \le AB + AC$.

Prof. Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

VIII.189 Se consideră un corp format dintr-o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu feţele laterale triunghiuri echilaterale de latură $L = 10cm$, iar sub piramidă se află cubul $ABCDA'B'C'D'$. O furnică parcurge pe feţele acestui corp un drum din V la A'. Determinaţi lungimea minimă a acestui drum.

***

Clasa a IX-a

IX.175 Arătați că, dacă într-un triunghi ABC, mediana din A intersectează cercul circumscris triunghiului în punctul D şi triunghiurile ABC şi BDC au ariile egale, atunci triunghiul ABC este dreptunghic.

Prof. Lucian Dragomir, Mihai Monea

IX.176 Se consideră un triunghi MNP şi punctele T şi S pentru care $\overrightarrow{NS} = 3\cdot\overrightarrow{MS}$, $\overrightarrow{PT} = 3\cdot\overrightarrow{MT}$. Se notează $PS \cap NT = \{Q\}$. Demonstrați că: $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$.

Prof. Gabriel Popa, Iaşi

IX.177 Determinați numerele naturale n pentru care $x_n = 1 + (n+1)\cdot 2^{n+1} + 4^n$ este pătrat perfect.

Prof. Lucian Dragomir

IX.178 Determinați numerele reale a, b şi mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - ax - b = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x + b = 0\}$, ştiind că $A \cup B = \{-1, 1, 3\}$.

Prof. Lucian Dragomir

IX.179 Fiind date $2n+1$ numere reale distincte din intervalul $[1, 2^n]$, arătați că se pot alege trei dintre acestea: $b > a > c$, astfel încât ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ să nu aibă rădăcini reale.

Prof. Dan Ştefan Marinescu, Test tabără Băile Herculane 1987

Clasa a X-a

X.175 Se consideră un triunghi ABC cu $AB \neq AC$. Pentru un punct $M \in (BC)$ se notează cu N punctul în care dreapta AM intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC. Demonstrați că funcția $f : (BC) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(M) = AM \cdot AN$ este injectivă.

Concurs Traian Lalescu, 1997

X.176 Găsiți o funcție de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neinjectivă, cu proprietatea că restricția sa la mulțimea numerelor raționale este injectivă.

Concurs Traian Lalescu, Deva, 1986

X.177 Rezolvați ecuația: $\log_2(x+1) = \log_5(3+2x)$.

Prof. Ovidiu Bădescu, Reşița

X.178 Demonstrați că numărul $\left[\left(\sqrt{8}+3\right)^{1997}\right]$ este de forma $6k-1$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Prof. Mihai Chiş, Timişoara, Concurs Traian Lalescu

X.179 Fie x, y, z numere reale pozitive pentru care $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2$. Demonstrați că: $8xyz \le 1$.

Prof. Mircea Lascu, Zalău

Clasa a XI-a

XI.175 Se consideră un şir $(x_n)_{n\ge1}$ de numere reale, cu $x_1 > 0$ şi $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n}, \forall n \ge 1$. Studiați convergența şirului considerat.

Prof. Emil Vasile, Ploieşti

XI.176 Fie $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ astfel încât $\det\left(A^2 - I_4\right) < 0$. Demonstrați că există $\alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| < 1$, astfel încât matricea $A + \alpha \cdot I_4$ să fie singulară.

Concurs Iaşi 2008

XI.177 Demonstrați că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$, există o funcție continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care să admită ca asimptotă orizontală spre $+\infty$ dreapta de ecuație $y = a$, iar spre $-\infty$ dreapta de ecuație $y = b$.

Prof. Steluța şi Mihai Monea, Deva

XI.178 Fie $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ şi $A\in\mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{C})$ şi $B\in\mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{C})$ cu proprietatea că există $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $(AB)^k=O_n$. Demonstrați că:

a) $(AB)^3=O_n$; b) dacă $rang(AB)\neq 2$, atunci $(AB)^2=O_n$.

Prof. Dorel Miheț, Timişoara

XI.179 a) Demonstrați că : $e\cdot\ln x\leq x$, $\forall x\in(0,\infty)$.

b) Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care $1+m\cdot\ln x\leq x$, $\forall x\in(0,\infty)$.

Red. RMCS

Clasa a XII-a

XII.175 Determinați funcțiile $f:\mathbb{Z}_7\to\mathbb{Z}_7$ pentru care:

$f(x)+f(\hat{4}x)=\hat{3}x$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_7$.

Prof. Alfred Eckstein, OL Satu Mare 2009

XII.176 Se consideră o funcție continuă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă pentru care $f(2x-1)+f(1-x)\geq x+2$, $\forall x\in\mathbb{R}$ şi $\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{2}$. Determinați cel mai mare număr întreg *k* pentru care $\int_{-1}^0 f(x)dx\geq k$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

XII.177 Demonstrați că dacă $f:[0,\infty)\to(0,\infty)$ este o funcție continuă şi crescătoare, atunci este adevărată inegalitatea:

$f(0)\cdot\int_0^1 f(x)dx\leq\int_0^1 f^2(x)dx.$ *Concurs Deva 2008*

XII.178 Determinați polinoamele $P\in\mathbb{C}[X]$ pentru care

$P(z)+P(-z)=z^2-P(iz)$, $\forall z\in\mathbb{C}$.

Prof. Gheorghe Eckstein, Concurs Oțelu – Roşu 1984

XII.179 Demonstrați că dacă $(G,\cdot)$ este un grup cu $2n+1$ elemente, funcția $f:G\to G, f(x)=x^{n+1}$ este bijectivă.

Prof. Dan Ştefan Marinescu, test tabără Băile Herculane 1987

Rubrica rezolvitorilor

Această rubrică va apare completă în numărul 33 al revistei, cumulând punctele obținute pentru soluțiile problemelor din numerele 31 şi 32.

Erată

Suntem oameni şi nimic din ceea ce e uman nu ne e străin am spune noi, redacția, dacă am vrea să găsim un pretext pentru inevitabilele "scăpări" intervenite în numerele anterioare. Uneori se întâmplă să se vadă un exercițiu pe calculator, însă să nu se imprime pe hârtie, alteori nu sunt recunoscute anumite simboluri matematice la tipărire, alteori greşin noi când le tehnoredactăm.

Ne-ați fi de un real folos dacă, atunci când sesizați indiferent ce greşeală, să trimiteți mail la editură: contact@neutrino.ro sau la lucidrag@yahoo.com, iar noi vom posta pe site-ul editurii corectura.

De fapt, o să încercăm ca selecții din această colecție de reviste să le puteți găsi pe www.neutrino.ro.

Până acum sunt postate deja câteva numere şi sperăm să putem continua şi cu cele viitoare.

Redacția