Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Caraş-Severin

REVISTA DE MATEMATICĂ

A ELEVILOR ŞI PROFESORILOR

DIN JUDEŢUL CARAŞ-SEVERIN

Nr. 15, An VII-2006

Editura „Neutrino”
Reşiţa, 2006

Titlul: Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din judeţul Caraş-Severin
I.S.S.N. 1584-9767

Mobil: 0724224400
www.neutrino.ro
E-mail: editura@neutrino.ro

CUPRINS

Un decalog al profesorului

Prof.Mircea Iucu , Reşiţa

Există o zi când , cu nostalgia dar şi senitătatea rezultată din conştiinţa datoriei împlinite , după o îndelungată activitate plină de experienţă şi apostolat , ai reuşit să laşi o dâră de lumină şi îndrumar de viaţă în sufletul mai multor generaţii.

Realitatea o trăim ca pe un surâs ce se învârte în caruselul existenţei , presărat şi cu lacrimi şi cu fericire.

1) “Şcoala va fi rea dacă va apela numai la memorie , bună dacă va apela la pricepere şi judecată.” (Mihai Eminescu)

2) “Învăţul şi “învăţătura” izvorăsc mai întâi din personalitatea profesorului.” (Simion Mehedinţi)

3) Păstrează neştirbită dragostea şi pasiunea pentru ceea ce faci.

4) Stăpâneşte elementele de bază.

5) Recunoaşte-ţi greşelile şi învaţă din ele.

6) Începe cu ceea ce ei (elevii) ştiu.Construieşte pe ceea ei ştiu.

7) Când elevii dau răspunsuri greşite trebuie să fim cât se poate de atenţi deoarece de cele mai multe ori ei nu greşesc ci răspund la o altă întrebare.

8) Fiţi obiectivi! Elevii nu tolerează nedreptatea .

9) Evită indiferenţa şi plictiseala elevilor.

10) Fă mai mult decât ţi se cere.

NOTE. ARTICOLE

PROBLEME DE DIDACTICA MATEMATICII

Despre Comisia Metodică de Matematică

Prof.Drd.Paul Mihai Şuşoi,
inspector de specialitate

Obiective generale ale activității comisiei metodice :

1) informarea continuă asupra problemelor de specialitate cu caracter metodic, pedagogic, psihologic;
2) preocuparea pentru perfecționarea actului de predare-învățare,pentru creşterea eficienței şcolare ;
3) cunoaşterea prevederilor programei, manualelor ;
4) întocmirea documentelor de proiectare didactică;
5) cunoaşterea nivelului de pregătire a elevilor prin teste de evaluare prognostică, formativă, sumativă ;
6) realizarea de asistențe, interasistențe pentru propagarea experienței pozitive şi corectarea carențelor metodico-ştiințifice;
7) integrarea în colectiv, sprijinirea debutanților, necalificaților;
8) organizarea, dotarea cabinetelor;
9) confecționarea materialului metodic , didactic;
10) organizarea pregătirii suplimentare;
11) stimularea elevilor capabili de performanță ;
12) urmărirea evaluării critice;
13) verificarea temelor;
14) valorificarea tradițiilor locale;
15) organizarea activităților extraşcolare;
16) înființarea cercurilor şi stabilirea opționalelor;
17) legătura cu biblioteca.

Dosarul comisiei metodice trebuie să cuprindă :

1) Componența comisiei: membrii, studiile, gradele didactice şi anul obținerii lor, anul ultimei perfecționări,vechimea în învățământ, în unitate, încadrarea la clasă, orarul;
2) Repartizarea responsabilităților;

3) Plan managerial:obiective, acțiuni concrete, termene exacte, coordonatori, observații;
4) Procese-verbale ale întâlnirilor de lucru;
5) Evidența necalificaților;
6) Materiale prezentate la întâlniri: modele de planificări, referate, proiecte didactice, materiale auxiliare de lucru pentru lecție, schițe, statistici, teste de evaluare, recenzii, extrase din presa de specialitate, analiza rezulatatelor la examenul de admitere sau de bacalaureat;
7) Evidența ultimelor merite ale membrilor catedrei;
8) Materiale primite de la M.E.C. , de la I.S.J.;
9) Lista cu opționale;
10) Teste şi rezultate la teste de evaluare inițiale date la clase la început de ciclu şcolar;
11) Modele de teste şi alte tehnici alternative de evaluare;
12) Teste date în urma controlului tematic sau de specialitate efectuat de I.S.J., rezultate interpretate;
13) Subiecte date la Olimpiade şi la examenul de admitere sau bacalaureat;
14) Graficul pregătirii suplimentare a elevilor;
15) Evidența elevilor capabili de performanță şi rezultate la concursuri;
16) Inventarul mijloacelor de învățământ din dotarea catedrei ;
17) Exemplare din revista şcolii (dacă e cazul) şi din revista județului ;
18) Materiale publicate de membrii catedrei ;
19) Propuneri de îmbunătățire a programei şcolare;
20) Propuneri de subiecte la concursuri şi examene;
21) Proiecte didactice;
22) Evidența practicii pedagogice a studenților.

Atunci când $R \to \infty$ ...

Prof.Petrişor Neagoe , Anina

Nota de față își propune să pună în evidență o modalitate poate mai surprinzătoare de soluționare a unor probleme de geometrie .

I. Următoarea problemă a fost propusă concurenților la olimpiada din Marea Britanie în anul2000:

1. Două cercuri C_1 şi C_2 se intersectează în punctele M şi N şi au o tangentă comună, care le atinge în P şi Q. Presupunem că N este mai aproape de PQ decât M. Dreapta PN retaie cercul C_2 în R.

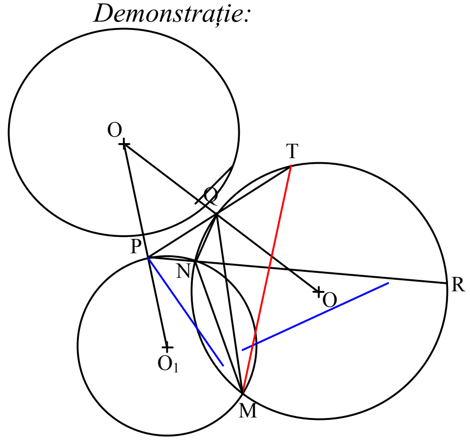
Demonstrați că MQ este bisectoarea unghiului PMR.

Considerăm următoarea problemă mai generală :

2. Două cercuri C_1 şi C_2 se intersectează în punctele M şi N şi fie cercul C tangent exterior la cele două cercuri în punctele P şi Q.Presupunem că N este mai aproape de cercul C decât M. Dreapta PN retaie cercul C_2 în R şi dreapta PQ retaie cercul C_2 în T.

Demonstrați că MT este bisectoarea unghiului PMR.

Demonstrație:



Fie O centrul cercului C, O_1 centrul cercului C_1 şi O_2 centrul cercului C_2 .Facem notațiile : $m(\sphericalangle PMN) = a$, $m(\sphericalangle QMN) = b$, $m(\sphericalangle NPQ) = x$ şi $m(\sphericalangle NQP) = y$. Cercul C este tangent exterior cercurilor C_1 şi $C_2 \Rightarrow \Delta OPQ$ este isoscel

$\Rightarrow \sphericalangle OPQ \equiv \sphericalangle OQP \Rightarrow \sphericalangle O_1PQ \equiv \sphericalangle O_2QP \Rightarrow x + m(\sphericalangle O_1PN) = y + +m(\sphericalangle O_2QN)$

$\Rightarrow x + \dfrac{180° - m(\sphericalangle PO_1N)}{2} = y + \dfrac{180° - m(\sphericalangle QO_2N)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + \dfrac{180° - 2a}{2} = y + \dfrac{180° - 2b}{2} \Rightarrow x + \cancel{90°} - a = y + \cancel{90°} - b \Rightarrow$

$\Rightarrow x - a = y - b$

$m(\sphericalangle TMR) = m(\sphericalangle TNR) = x + b = y + a = b + m(\sphericalangle QNT) + a =$

$= a + b + m(\sphericalangle QMT) = m(\sphericalangle TMP) \Rightarrow \sphericalangle TMR \equiv \sphericalangle TMP \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\text{MT este bisectoarea } \sphericalangle PMR}$

Observații :1.Dacă dreapta QN retaie cercul C_1 în V şi dreapta PQ retaie cercul C_1 în S atunci se arată analog că MS este bisectoarea $\sphericalangle QMV$.

2.Din $x - a = y - b \Rightarrow \sphericalangle PNS \equiv \sphericalangle QNT \Rightarrow \sphericalangle PMS \equiv \sphericalangle QMT \Rightarrow$ MP şi MQ sunt ceviene izogonale în $\triangle SMT$.

3 $m(\sphericalangle SMV) = m(\sphericalangle SMQ) = m(\sphericalangle TMP) = m(\sphericalangle TMR) = a + y = b + x$

Soluția problemei I.1 :

Dacă raza cercului C, $R \to \infty$ atunci cercul C devine dreapta tangentă comună a cercurilor C_1 şi C_2 . În acest caz T = Q şi S = P, deci $\boxed{\text{MQ este bisectoarea } \sphericalangle PMR}$ şi MP este bisectoarea $\sphericalangle QMV$. În plus $\sphericalangle VMP \equiv \sphericalangle PMQ \equiv \sphericalangle QMR$.

II. Următoarea problemă a fost propusă la concursul din Iran, 2000 şi a fost publicată în revista noastră recent(cu o soluție bazată pe rotații) :

1. Două cercuri se intersectează în punctele A şi B. O secantă care trece prin A intersectează cercurile în C şi D. Fie M şi N mijloacele arcelor BC şi BD care nu conțin punctul A. Fie K mijlocul lui CD.

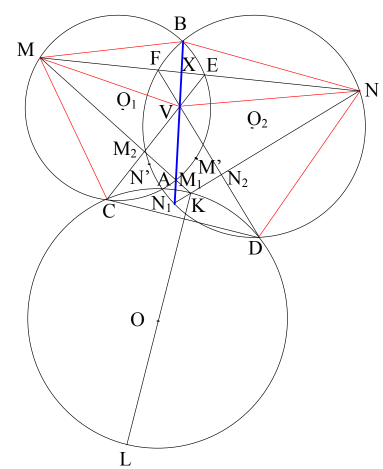
Să se demonstreze că $\sphericalangle MKN = 90°$.

Fie următoarea problemă cu enunț mai general :

2. Două cercuri se intersectează în punctele A şi B. Un cerc care trece prin A intersectează cercurile în C şi D. Fie M şi N mijloacele arcelor BC şi BD care nu conțin punctul A. Fie K mijlocul arcului CD care îl conține pe A.

Să se demonstreze că $\sphericalangle MKN \equiv \sphericalangle MAN$.

Demonstrație



Fie cercurile $C_1(O_1; R_1)$, $C_2(O_2; R_2)$ cercurile date inițial şi $C(O; R)$ cercul care trece prin A şi le intersectează în punctele C şi D. Fie punctele M'şi N' mijloacele arcelor $\overset{\frown}{BC}$ şi $\overset{\frown}{BD}$ (M',N'$\in$ Int($\triangle$BCD)). Ştiind că $\{M_1\} = MK \cap C_1$ şi $\{N_1\} = NK \cap C_2$ să demonstrăm mai întâi că punctele B, M_1 , N_1 sunt coliniare.

Facem construcția figurii, dar considerăm punctele M_1 și N_1 ca fiind intersecția perpendicularei din B pe MN cu cercurile C_1 și C_2 și $\{K\} = MM_1 \cap NN_1$. Dacă arătăm că K este mijlocul arcului $\overset{\frown}{CD}$ atunci problema este rezolvată.

Fie $\{E\} = MN \cap C_1$, $\{F\} = MN \cap C_2$, $\{V\} = CE \cap DF$, $X_1 \in MN$ astfel încât $VX_1 \perp MN$ și $\{X_2\} = BM_1 \cap MN$. Arătăm că $X_1 = X_2 = X$.

$M'E \parallel BM_1 \parallel N'F \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{M'M_1}$ și $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{N'N_1}$.

Fie $\{M_2\} = MM_1 \cap CE$ și $\{N_2\} = NN_1 \cap DF$.

$$m(\sphericalangle MM_2C) = \frac{m(\overset{\frown}{MC}) + m(\overset{\frown}{EM_1})}{2} = \frac{m(\overset{\frown}{MB}) + m(\overset{\frown}{BM'})}{2} = 90° \Rightarrow$$

$\Rightarrow MM_1 \perp CE$. Analog rezultă că $NN_1 \perp DF$.

$$\left.\begin{array}{r} MM_2VX_1 \text{ inscriptibil} \Rightarrow \sphericalangle M_2ME \equiv \sphericalangle X_1VE \\ MM_1EB \text{ inscriptibil} \Rightarrow \sphericalangle M_1ME \equiv \sphericalangle X_2BE \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sphericalangle X_1VE \equiv \sphericalangle X_2BE \Rightarrow \sphericalangle VEX_1 \equiv \sphericalangle BEX_2 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow MN \text{ este bisectoarea } \sphericalangle VEB \\ \text{Analog } \Rightarrow MN \text{ este bisectoarea } \sphericalangle VFB \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle VEF \equiv \triangle BEF \Rightarrow VB \perp EF \Rightarrow X_1 = X_2 = X$.

Din $\triangle VEF \equiv \triangle BEF \Rightarrow \triangle EBV$ este isoscel $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \Rightarrow \triangle MBV \text{ este isoscel} \Rightarrow MB=MV \\ \text{Dar } MB=MC \end{array}\right\} \Rightarrow MC=MV \\ \text{Dar } MM_1 \perp CV \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow MM_1 \text{ este mediatoarea lui } [CV] \\ \text{Analog} \Rightarrow NN_1 \text{ este mediatoarea lui } [DV] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ K este centrul cercului circumscris $\triangle VCD \Rightarrow KC=KD \Rightarrow$
$\Rightarrow OK \perp CD$, deci OK este mediatoarea lui $[CD]$.
Trebuie să mai arătăm că K aparține cercului C.

Obs. Deoarece $m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle DAB) + m(\sphericalangle CAD) = 360° \Rightarrow$
$\Rightarrow m(\sphericalangle BMC) + m(\sphericalangle DNB) + m(\sphericalangle CLD) = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow m(\sphericalangle MCB) + m(\sphericalangle NDB) + m(\sphericalangle LDC) = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow m(\overset{\frown}{MB}) + m(\overset{\frown}{NB}) + m(\overset{\frown}{LC}) = 360°$
$m(\sphericalangle CKD)=360°-[m(\sphericalangle MKC)+m(\sphericalangle NKD)]-m(\sphericalangle MKN)=360°-$
$-[m(\sphericalangle MKV)+m(\sphericalangle NKV)]-m(\sphericalangle MKN)=360°-2 \cdot m(\sphericalangle MKN)=$
$=2 \cdot [180° - m(\sphericalangle MKN)]=2 \cdot [m(\sphericalangle KMN)+m(\sphericalangle KNM)]=$

$=m(\overset{\frown}{EM_1})+m(\overset{\frown}{FN_1})=m(\overset{\frown}{BM'})+m(\overset{\frown}{BN'})=180°- m(\overset{\frown}{MB})+180°- m(\overset{\frown}{NB})=$
$=360°-[m(\overset{\frown}{MB})+m(\overset{\frown}{NB})]=360°-[360°- m(\overset{\frown}{LC})]=m(\overset{\frown}{LC})=m(\sphericalangle CAD)$
$\Rightarrow CAKD$ inscriptibil $\Rightarrow C, A, K, D$ puncte conciclice $\Rightarrow K \in C$.
Deci punctele B, M_1, N_1 sunt coliniare.

Soluția problemei II.2 :

$m(\sphericalangle MKN)=180°- m(\sphericalangle FVE)=m(\sphericalangle VFE)+m(\sphericalangle VEF) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow m(\sphericalangle MKN)=\dfrac{m(\overset{\frown}{ND})+m(\overset{\frown}{MC})}{2} \\ m(\sphericalangle MAN)=m(\sphericalangle MAB)+m(\sphericalangle NAB)=\dfrac{m(\overset{\frown}{MB})+m(\overset{\frown}{NB})}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{\sphericalangle MKN \equiv \sphericalangle MAN}$

Soluția problemei II.1 :

Dacă $R \to \infty$ (R este raza cercului C) atunci arcul $\overset{\frown}{CD}$ devine dreaptă și obținem figura problemei II.1. Ei bine demonstrația acestei probleme poate fi scrisă și astfel : $\sphericalangle MKN \equiv \sphericalangle MAN$
$m(\sphericalangle MAN)=m(\sphericalangle MAB)+m(\sphericalangle NAB)=$

$$= \frac{m(\sphericalangle CAB)+m(DAB)}{2} = \frac{180°}{2} = 90° \Rightarrow m(\sphericalangle MAN) = 90° \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{m(\sphericalangle MKN) = 90°}$ q.e.d.

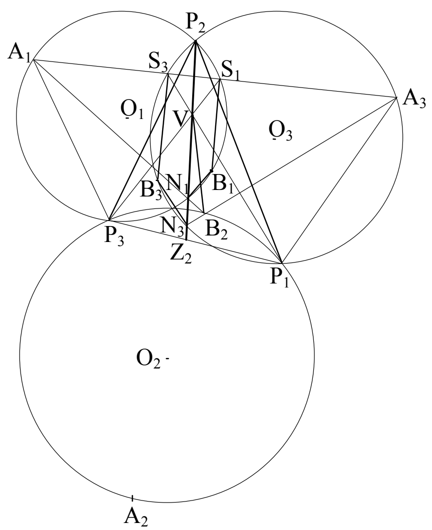
3.Fie cercurile $C_1(O_1; R_1)$, $C_2(O_2; R_2)$, $C_3(O_3; R_3)$, $\{O\} = C_1 \cap C_2 \cap C_3$, $\{P_1\} = C_2 \cap C_3$, $\{P_2\} = C_3 \cap C_1$, $\{P_3\} = C_1 \cap C_2$ **și fie punctele** A_1, A_2, A_3 **mijloacele arcelor** $\overset{\frown}{P_2P_3}$, $\overset{\frown}{P_3P_1}$ **și** $\overset{\frown}{P_1P_2}$ **(**$A_1, A_2, A_3 \in$ **Ext(**$\triangle P_1P_2P_3$**)),** B_1, B_2, B_3 **mijloacele arcelor** $\overset{\frown}{P_2P_3}$, $\overset{\frown}{P_3P_1}$ **și** $\overset{\frown}{P_1P_2}$ **(**$B_1, B_2, B_3 \in$ **Int (**$\triangle P_1P_2P_3$**)). Știind că** $\{N_1\} = A_1B_2 \cap C_1$ **și** $\{N_3\} = A_3B_2 \cap C_3$ **să se demonstreze că punctele** P_2, N_1, N_3 **sunt coliniare.**

Demonstrația acestei probleme, cu alte notații, s-a făcut la problema II.2.
Fie $\{S_1\} = A_1A_3 \cap C_1$, $\{S_3\} = A_1A_3 \cap C_3$ și $\{V\} = P_3S_1 \cap P_1S_3$.

Observație:

Fie $\{Z_2\}=P_2N_1 \cap P_3P_1$. Se demonstrează ușor că $VS_1B_1N_1$ și $VS_3B_3N_3$ sunt paralelograme, deci $S_1B_1=VN_1$ și $S_3B_3=VN_3$.
$m(\sphericalangle A_1P_3B_1)=m(\sphericalangle A_2P_3B_2)=90° \Rightarrow \sphericalangle A_1P_3B_2 \equiv \sphericalangle A_2P_3B_1$

Analog $\Rightarrow \sphericalangle A_2P_1B_3 \equiv \sphericalangle A_3P_1B_2$ şi $\sphericalangle A_1P_2B_3 \equiv \sphericalangle A_3P_2B_1$



$$\frac{Z_2P_3}{Z_2P_1}=\frac{P_2P_3}{P_2P_1}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\overset{\frown}{P_3N_1}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\overset{\frown}{P_1N_3}}{2}\right)}=$$

$$=\frac{P_2P_3}{P_2P_1}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\overset{\frown}{S_1B_1}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\overset{\frown}{S_3B_3}}{2}\right)}=$$

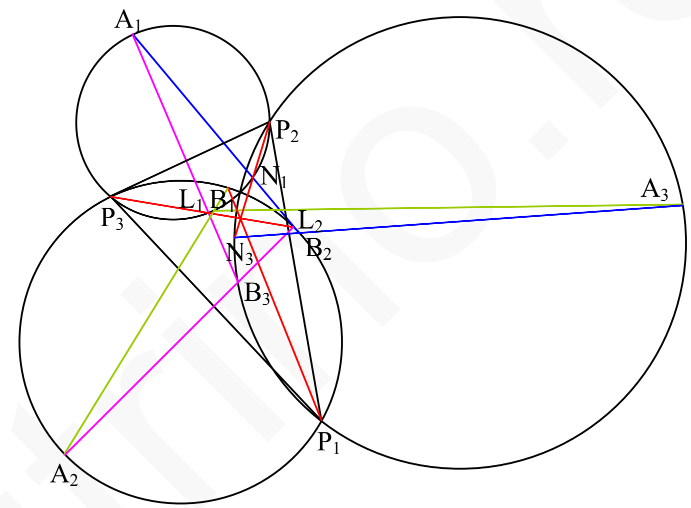
$$=\frac{P_2P_3}{P_2P_1}\cdot\frac{S_1B_1}{S_3B_3}\cdot\frac{R_3}{R_1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{Z_2P_3}{Z_2P_1}=\frac{P_2P_3}{P_2P_1}\cdot\frac{R_3}{R_1}\cdot\frac{VN_1}{VN_3}$$

$$\frac{VN_1}{VN_3}=\frac{\dfrac{\cancel{VB_2}\cdot\sin(\sphericalangle VB_2A_1)}{\sin\left(\frac{\overset{\frown}{P_2A_1}}{2}\right)}}{\dfrac{\cancel{VB_2}\cdot\sin(\sphericalangle VB_2A_3)}{\sin\left(\frac{\overset{\frown}{P_2A_3}}{2}\right)}}=\frac{\sin\left(\frac{\overset{\frown}{P_2A_3}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\overset{\frown}{P_2A_1}}{2}\right)}\cdot\frac{\sin(\sphericalangle VB_2A_1)}{\sin(\sphericalangle VB_2A_3)}$$

$$\frac{\sin(\sphericalangle VB_2A_1)}{\sin(\sphericalangle VB_2A_3)}=\frac{\sin(\sphericalangle P_3B_2A_1)}{\sin(\sphericalangle P_1B_2A_3)}=\frac{\dfrac{A_1P_3\cdot\sin(\sphericalangle A_1P_3B_2)}{A_1B_2}}{\dfrac{A_3P_1\cdot\sin(\sphericalangle A_3P_1B_2)}{A_3B_2}}$$

Deci $\Rightarrow$
$$\frac{Z_2P_3}{Z_2P_1}=\frac{P_2P_3\cdot R_3\cdot A_1P_3\cdot\sin(\sphericalangle A_1P_3B_2)\cdot\sin(\sphericalangle B_2A_1A_3)\cdot\sin\left(\frac{\overset{\frown}{P_2A_3}}{2}\right)}{P_2P_1\cdot R_1\cdot A_3P_1\cdot\sin(\sphericalangle A_3P_1B_2)\cdot\sin(\sphericalangle B_2A_3A_1)\cdot\sin\left(\frac{\overset{\frown}{P_2A_1}}{2}\right)}$$



Fie $\{L_1\}=A_1B_3\cap C_1$, $\{L_2\}=A_2B_3\cap C_2$ şi
$\{M_2\}=A_2B_1\cap C_2$, $\{M_3\}=A_3B_1\cap C_3$

Analog ca la problema II.3 rezultă că punctele P_3, L_1, L_2 sunt coliniare şi punctele P_1, M_2, M_3 sunt coliniare. În plus, dacă $\{Z_3\}=P_3L_2\cap P_1P_2$ şi $\{Z_1\}=P_1M_3\cap P_2P_3$ atunci analog rezultă

$$\frac{Z_3P_1}{Z_3P_2}=\frac{P_3P_1\cdot R_1\cdot A_2P_1\cdot\sin(\sphericalangle A_2P_1B_3)\cdot\sin(\sphericalangle B_3A_2A_1)\cdot\sin\left(\frac{\overset{\frown}{P_3A_1}}{2}\right)}{P_3P_2\cdot R_2\cdot A_1P_2\cdot\sin(\sphericalangle A_1P_2B_3)\cdot\sin(\sphericalangle B_3A_1A_2)\cdot\sin\left(\frac{\overset{\frown}{P_3A_2}}{2}\right)}$$

$$\frac{Z_1P_2}{Z_1P_3}=\frac{P_1P_2\cdot R_2\cdot A_3P_2\cdot\sin(\sphericalangle A_3P_2B_1)\cdot\sin(\sphericalangle B_1A_3A_2)\cdot\sin\left(\frac{\overset{\frown}{P_1A_2}}{2}\right)}{P_1P_3\cdot R_3\cdot A_2P_3\cdot\sin(\sphericalangle A_2P_3B_1)\cdot\sin(\sphericalangle B_1A_2A_3)\cdot\sin\left(\frac{\overset{\frown}{P_1A_3}}{2}\right)}$$

Deci $\frac{Z_2P_3}{Z_2P_1}\cdot\frac{Z_3P_1}{Z_3P_2}\cdot\frac{Z_1P_2}{Z_1P_3}=1\Rightarrow\boxed{P_1Z_1,\ P_2Z_2 \text{ şi } P_3Z_3 \text{ sunt concurente în } P}$ ■

Relaţia de congruenţă modulo n (partea a II a)

Prof. Ovidiu Bădescu - Reşiţa,
Prof. Lucian Dragomir - Oţelu-Roşu

Această continuare a notei [2] se datorează solicitărilor unor elevi şi a unor colegi , dornici de mai multe şi mai facile aplicaţii ; nu ştim dacă vom reuşi , dar sperăm să le fie utile următoarele rânduri (ideile nu ne aparţin, doar modalitatea de a le prezenta aici).

Cu permisiunea dumneavoatră , vom reaminti foarte pe scurt următoarele :

1)Două numere întregi a şi b se numesc **congruente modulo n** (unde n este un număr întreg nenul) dacă prin împărţire la n dau acelaşi rest (pentru n = 0, dacă a = b) , adică m / (a – b) (studiaţi treaba asta!) ; notăm astfel : $a \equiv b (\bmod n)$ şi citim: a este congruent cu b modulo n .

(Exemple : $7 \equiv 10 (\bmod 3)$ deoarece 7 împărţit la 3 dă restul 1 – câtul nu ne interesează ! , iar 10 împărţit la 3 dă tot restul 1 ; sperăm că vă e clar că există şi alte numere întregi care dau acelaşi rest prin împărţire la 3 -- toate formează o clasă sau o submulţime a lui $\mathbb{Z}$ …)

2) **Teorema lui Fermat** : Pentru orice număr întreg a nedivizibil cu numărul prim p avem : $a^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$.

(O formă echivalentă, adeseori folosită, este: pentru orice întreg a şi p număr prim, avem : $a^p \equiv a (\bmod p)$)

3) **Teorema lui Wilson :**Dacă p este un număr prim , atunci : $(p-1)!+1 \equiv 0 (\bmod p)$.

În sfârşit, aplicaţii, diverse exerciţii şi probleme :

1) Fie m , n $\in \mathbb{N}^*$ şi p $\in \mathbb{Z}^*$, cu m şi n prime între ele. Determinaţi perechile (x , y) de numere întregi care satisfac : mx + ny = p . (*)

Soluţie: Cum (m ,n) = 1 . avem că există u , v $\in \mathbb{Z}$ aşa încât mu + nv = 1 ⇒m(pu) + n(pv) = 1 **.** Notăm $x_0 = pu$ şi $y_0 = pv$, aşadar (x_0, y_0) e soluţie a ecuaţiei (*). Căutăm acum o altă soluţie, fie aceasta (x , y) ⇒ $mx + ny = p$ ⇒ $A \overset{not}{=} m(x-x_0)+n(y-y_0)=0$. Folosim relaţia de congruenţă modulo m (împărţim egalitatea anterioară la m şi reţinem resturile !) ⇒ $A(\bmod m) \equiv n(y-y_0)(\bmod m) \equiv 0 (\bmod m)$.

Cum (m ,n) = 1 ⇒ $(y-y_0) \equiv 0 (\bmod m)$ sau : ∃ k $\in \mathbb{Z}$ astfel încât $y - y_0 = km$, deci $y = y_0 + km$ **.** Obţinem în continuare $m(x-x_0) + n \cdot km = 0$, deci $x = x_0 - kn$

Aşadar , ecuaţia (*) are o infinitate de soluţii , anume toate perechile de forma $(x_0 - kn, y_0 + km)$, k $\in \mathbb{Z}$.

<u>Remarcă</u> : E deci suficient să observăm o soluţie (x_0, y_0) a ecuaţiei (*) şi obţinem mulţimea soluţiilor S ={$(x_0 - kn, y_0 + km)$/k $\in \mathbb{Z}$}■

2. Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia $2x + 5y = 17$ **.**

Soluţie: Observăm soluţia (1 , 3) şi astfel avem :

S = { (1 – 5k , 3 + 2k) / k $\in \mathbb{Z}$ }.

Putem însă şi astfel : considerăm ambii membrii ai ecuaţiei modulo 2 şi avem : $y(\bmod 2) \equiv 1$ ⇒ y = 2r + 1 , r $\in \mathbb{Z}$; înlocuim în ecuaţie şi găsim imediat : x = 6 – 5r , deci

S = { (6 – 5r , 2r + 1) / r $\in \mathbb{Z}$ }.

(Arată la fel soluţiile ? Am greşit ? Luaţi r = 1 + k) ■

3. Determinaţi toate perechile (p , q) de numere prime care satisfac $p^3 - q^5 = (p+q)^2$ **.**

Soluţie: După câteva încercări (şi ceva timp) găsim soluţia (7,3). Căutăm alte soluţii şi presupunem că nici unul din numere nu e 3 ⇒ $p \equiv 1 (\bmod 3)$ sau $p \equiv 2 (\bmod 3)$ şi $q \equiv 1 (\bmod 3)$ sau $q \equiv 2 (\bmod 3)$. Dacă am avea $p \equiv q (\bmod 3)$, atunci membrul stâng al ecuaţiei ar fi divizibil cu 3 , pe când membrul drept nu . Analog dacă p şi q nu sunt congruente modulo 3 .

Dacă p=3, avem: $q^5 < 27$, absurd, iar dacă q = 3, avem

$p^3 - 243 = (p+3)^2$ care are unica soluție întreagă p = 7 . ■

4. Arătați că ecuația $x^5 - y^2 = 4$ nu are soluții în numere întregi.

Soluție: Considerăm ecuația modulo 11 . Deoarece $(x^5)^2 = x^{10} \equiv 0$ sau 1 (mod11) pentru orice x , deducem că $x^5 \equiv -1$, 0 sau 1 (mod11). Așadar $x^5 - 4 \equiv 6$, 7 sau 8 (mod11) . Pe de altă parte $y^2 \equiv 0$, 1 , 3 ,4 , 5 sau 9 (mod11) , deci ecuația nu are soluții întregi . ■

5. Determinați toate perechile (x , y) de numere naturale care satisfac $3^x - 2^y = 7$.

Soluție: Presupunem pentru început că y ≥ 3. Considerăm ecuația modulo 8 și deducem că 3^x trebuie să dea restul 7. Avem însă $3^x \equiv 3 \pmod 8$ sau $3^x \equiv 1 \pmod 8$ (după cum x este impar sau par) . Rămân astfel de analizat cazurile y = 1 și y = 2 , care sunt immediate.Obținem soluția : x = 2 , y = 1 . ■

6. Rezolvați în numere întregi ecuația $3x + 4y + 5z = 6$.

Soluție: Considerăm ecuația modulo 5 și avem $3x + 4y \equiv 1 \pmod 5$, adică $3x + 4y = 1 + 5k$, k ∈ $\mathbb{Z}$. O soluție a acestei ecuații este $x = -1 + 3k$, $y = 1 - k$ și astfel (problema 1) : $x = -1 + 3k + 4j$, $y = 1 - k - 3j$, cu j ∈ $\mathbb{Z}$ și apoi $z = 1 - k$. ■

7. Calculați restul împărțirii numărului

$67^{68} \cdot 68^{67}$ **la** 21.

Soluție: $67 \equiv 4 \pmod{21}$ și $68 \equiv 5 \pmod{21}$ ⇒ $67^{68} \equiv 4^{68} \pmod{21}$ și $68^{67} \equiv 5^{67} \pmod{21}$, de unde $67^{68} \cdot 68^{67} \equiv 4 \cdot 20^{67} \pmod{21}$**.** Cum însă $20 \equiv -1 \pmod{21}$ avem : $4 \cdot 20^{67} \equiv -4 \equiv 17 \pmod{21}$ Restul este deci 17.

8. Prin împărțirea la 5 , un anumit număr n dă restul 2;pătratul său , prin împărțirea la 25 dă restul 24 , iar cubul său , prin împărțirea la 125 dă restul 93.

Care este numărul n ?

Soluție:

$n \equiv 2 \pmod 5$, $n^2 \equiv 24 \pmod{25}$, $n^3 \equiv 93 \pmod{125}$

Din prima congruență avem n = 5k + 2 ; înlocuind în a doua deducem n = 25 j + 7 și în a treia : n = 125q + 7 , q ∈ $\mathbb{Z}$. ■

9. Rezolvați în numere naturale ecuația

$$2^y - 3^x = x^2 + 1$$

Soluție: Dacă (x , y) este o soluție a ecuației atunci $2^y = 3^x + x^2 + 1 > 1$, așadar y ≥ 1. Cum $2^y - 3^x - 1 \equiv 0 \pmod 2$ deducem : $x^2 \equiv 0 \pmod 2$, adică xeste par ⇒ $2^y = 3^x + x^2 + 1 \equiv 2 \pmod 4$ ⇒ y = 1 și, imediat, ajugem la x = 0 . ■

10. Se consideră șirul a_1, a_2, … definit prin

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \text{ , } n \in \mathbb{N}^* .$$

Determinați toate numerele naturale nenule care sunt relativ prime cu fiecare termen al șirului . (OIM 2005)

Soluție: Răspunsul este că doar numărul 1 satisface condiția din enunț.Se impune folosirea teoremei lui Fermat și astfel avem : pentru un anume număr prim p , p > 3, avem : $2^{p-1}, 3^{p-1}, 6^{p-1}$ sunt congruente cu 1 modulo p ⇒ $3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1}$ e congruent cu 6 modulo p , dar expresia anterioară e de fapt $6 \cdot 2^{p-2} + 6 \cdot 3^{p-2} + 6 \cdot 6^{p-2}$; prinsimplificare cu 6 (care e prim cu p), avem : a_{p-2} e divizibil cu p . Să mai observăm doar că $a_2 = 48$ se divide cu 2 și cu 3 . ■

Bibliografie :

[1] Andreescu Titu , Andrica Dorin – O introducere în studiul ecuațiilor diofantiene , Ed.Gil,Zalău - 2002

[2] Bădescu Ovidiu – Congruența modulo n , RMCS nr.13

[3] Cucurezeanu , Ion – Probleme de aritmetică și teoria numerelor, Ed.Tehnică , București -1976

[4] Gazeta Matematică 2005

Despre introducerea noţiunii de şir cu asertivitate (partea I)

Prof. Dumitru Ion Pistrilă ,Oraviţa

Înainte de a intra în substanţa problemei, aş vrea să atenţionez virtualii cititori că scopul articolului de faţă este comentarea celor două metode de introducere a şirurilor în programa de liceu: prin funcţii şi prin definiţia specifică numită în continuare definiţia independentă. Obiectivul fundamental al acestui comentariu este determinarea celei mai adecvate metode de înţelegere a noţiunii de şir de către elevi (nu am în vedere neapărat elevii dotaţi pentru matematică). Aşa cum se cunoaşte, metoda contrastului reprezintă un rafinament al didacticii. În spiritul acestei idei, pe parcursul întregului articol, voi pune în contrast detaliile celor două metode. Aş putea vorbi despre mulţumire sufletească dacă la sfârşit, niciunul dintre distinşii cititori nu este afectat în abilitatea sa profesională şi umană decât atunci când acesta acceptă.

Pentru comoditatea expunerii, în continuare metoda prin funcţii este marcată prin f) iar cealaltă prin d).

(1) Chestiuni de definiţie

d) În [4] la pag. 42 apare definiţia: "În mod obişnuit prin şir se înţelege o infinitate de numere - distincte sau nu - scrise unul după altul."

Deşi autorii nu o marchează (aşa cum fac cu celelalte definiţii), consider că definiţia precedentă poate fi riguroasă dacă se atrage atenţia elevilor asupra tuturor informaţiilor pe care le furnizează:

1) Şirul conţine o infinitate de numere
2) Numerele se pot repeta
3) Expresia "unul după altul" ne anunţă că într-un şir contează ordinea în

care sunt scrise numerele ce îl compun.

f) Este maniera în care aproape toate manualele existente definesc şirul ca fiind o funcţie $f : N^* \to M \subset R,\ f(n) \overset{d}{=} a_n \in M,\ (\forall) n \in N^*$ Şirul astfel definit se numeşte şir de elemente din M.

[Remarca 1] (a) Definiţia f) este înţeleasă de către elevi doar dacă au parcurs şi înţeles sistemul de relaţii generat de capitolul "Funcţii".

(b)În ambele cazuri şirurile se notează $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sau $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ sau $(a_n)_{n\ge1}$.

(c)Modurile de a defini un şir se raportează doar la varianta d) şi anume:

1. Şiruri definite descriptiv (prin descriere)

Exemplu Fie şirul $(a_n)_{n\ge1}$ definit prin $a_1= 1$, $a_2=11,\dots$ $a_n = \underbrace{11\dots1}_{n.ori},1\dots$

2. Şiruri definite cu ajutorul termenului general (un termen al şirului care

generează toţi termenii acestuia)

Exemplu: $a_n = 3n + 5,\ (\forall) n \in N^*$ (putem zice $f(n) = 3n + 5$, $(\forall) n \in N^*$ doar pentru a arăta că există şi această posibilitate, fără relevanţă practică).

3. Şiruri definite recursiv (se precizează primii k termeni, $k \in N^*$ şi o relaţie

între a_n si $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}$)

Exemplu. Fie şirul $(a_n)_{n\ge1}$ definit astfel:

$a_1 = 2, a_2 = 5, a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}\ (\forall) n \ge 2$ **(rămâne întrebarea dacă forma $f(n+1) = 2f(n) + f(n-1)\ (\forall) n \ge 2$ oferă mai multe informaţii asupra şirului ?)**

(d) Presupunând că s-a parcurs capitolul "Funcţii", notaţiile utilizate pentru şiruri lasă o distanţă emoţională între conceptul de funcţie şi cel de şir căci expresia lor, a notaţiilor, trimite percepţia spre sisteme ordonate de puncte, distincte sau nu, iar definiţia f) trimite spre tripletul (A,B,f) cu semnificaţiile cunoscute.

În lucrarea "Bogăţia la îndemâna tuturor", ROBERT COLLIER arată: "Aşa cum adesea s-a spus, un cuvânt nu este un simplu sunet ieşit de pe buze sau un număr oarecare de litere scrise de o mână. Un cuvânt este un concept mental, o idee, o imagine." Misiunea profesorului în cazul de faţă este de a utiliza termeni care creează imagini clare, evitând obligatoriu ambiguitățile. V-aş aminti, stimați colegi, că matematica trebuie să devină un bun comun, nu un instrument rezervat doar elevilor cu un avansat nivel al inteligenței raționale. În acest sens, pentru ca elevii să perceapă şirurile drept cazuri particulare de funcții, consider că ar fi util să se facă în prealabil o lecție de aplicații a definiției funcțiilor. Mi-aş permite să cred că următoarele exemple n-ar deranja contextul unei asemenea lecții.

[D1] Sistemul de puncte distincte sau nu, $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$, format cu elemente din $M \subset R$, se numeşte ordonat dacă are importanță ordinea în care sunt scrise elementele lui.

Notă: Se pot forma şi sisteme ordonate infinite cu elemente din M ⊂ R şi acestea au forma $a_1, a_2, ..., a_n, ...)$. Conform lui d) acestea sunt şiruri.

d₁)Fie funcțiile $f : \{1,2,3,4\} \to \{a, b\}$

n	1	2	3	4
$f(n)$	a	b	a	a

Observăm că funcția dată se poate descrie cu ajutorul sistemului ordonat (a, b, a, a) în sensul că acesta ne oferă informații precise referitoare la tripletul ce defineşte funcția:

$(a, b, a, a) \Rightarrow f : \{1,2,3,4\} \to \{a, b\}$

$f(1) = a, f(2) = b, f(3) = a, f(4) = a.$

<u>Atenție</u>! Privind numerele 1, 2, 3, 4 ca indici, sistemul ordonat (a, b, a, a) mai poate reprezenta funcția $g : \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \to \{a, b\}$, $g(x_1) = a$, $g(x_2) = b$, $g(x_3) = a$, $g(x_4) = a$. Se poate spune astfel că sistemul ordonat (a, b, a, a) reprezintă scrierea concentrată a funcțiilor $f : \{1,2,3,4\} \to \{a, b\}$ sau $g : \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \to \{a, b\}$ definite mai sus.

d_2) Fie $M \subset R$ şi funcțiile $f, g : N^* \to M$

$$f(n) \overset{d}{=} \begin{cases} a & daca \quad n \quad este \quad impar \\ b & daca \quad n \quad este \quad par \end{cases}$$

$(\forall) n \in N^*$ unde $a, b \in M, g(n) \overset{d}{=} a_n \in M, (\forall) n \in N^*$.

Sistemele ordonate corespunzătoare sunt (a, b, a, b, …) şi respectiv (a_1, a_2, …, a_n, …) care sunt pe deoparte şiruri şi pe de altă parte reprezintă funcțiile f, g definite mai sus.

Experiența personală mi-a confirmat faptul că exemple ca cele precedente îi determină, inclusiv pe elevii mediocri, să gândească şirurile în sensul funcțiilor. (Va urma) ■

BIBLIOGRAFIE

[1] AVĂDANEI CONSTANTIN şi colectiv – De la matematica elementară spre matematica superioară – Editura Academiei Române – Bucureşti 1987.

[2] BERAR IOAN – Aptitudinea matematică la şcolari – Editura Academiei Române – Bucureşti 1991.

[3] COLLIER ROBERT – Bogăția la îndemâna tuturor – Editura Rom Direct Impex – Bucureşti 1994.

[4] DINCULEANU NICOLAE, RADU EUGEN – Elemente de analiză matematică – Manual pentru clasa a XI-a – Editura didactică şi pedagogică – Bucureşti 1978.

[5] Manualele alternative din ultimii 5 ani.

Probleme rezolvate din RMCS nr. 14

Clasa a V-a

V. 015. Dacă $n = \overline{abc}$ şi $m = \overline{cba}$, a > c > 0 , poate fi numărul n – m pătrat perfect ?

Gazeta Matematică

Soluţie: $n - m = ... = 99(a-c) = 3^2 \cdot 11 \cdot (a-c)$ .Deoarece $9 \geq a > c > 0$ deducem $a - c \in \{1,2,...,8\}$, de unde $a - c < 11$ ⇒ n – m nu poate fi pătrat perfect . ■

V. 016. Pe tablă sunt scrise patru numere . Se stabileşte să se aleagă oricare două dintre ele , să li se adauge o unitate şi să se scrie numerele obţinute în locul celor alese iniţial . E posibil ca prin mai multe astfel de operaţii să se ajungă de la numerele
2 , 0 , 0 , 5 la patru numere egale ?

* * *

Soluţie: Nu este posibil . După n operaţii , din numerele 2 , 0 , 0 , 5 se obţin patru numere a căror sumă este egală cu 2n + 7 , adică un număr impar ; dacă toate numerele ar fi egale cu m , suma lor ar fi 4m , adică un număr par . ■

V. 017. Acasă la Dragoş au venit în vizită câţiva colegi de clasă ; mama sa l-a întrebat câţi musafiri are, iar Dragoş a răspuns : " Mai mulţi decât şase " , dar Roxana , sora lui , îi spune mamei : " Mai mulţi decât cinci ". Ştiind că un singur răspuns este corect , câţi musafiri are Dragoş ?

* * *

Soluţie: 6 musafiri . Dacă ar fi mai mulţi , atunci şi Dragoş şi sora sa au răspuns corect , contradicţie cu ipoteza. Aşadar nu sunt mai mulţi de 6 , deci Dragoş nu a spus adevărul , înseamnă că răspunsul corect l-a dat Roxana , deci sunt mai mulţi musafiri decât 5 , dar nu mai mulţi de 6 .Sunt aşadar 6 musafiri. ■

V. 018. O familie e formată din trei persoane : tata , mama şi copilul . Acum suma vârstelor lor este de 74 de ani , iar cu 10 ani în urmă această sumă era de 47 de ani . Câţi ani are acum tatăl dacă este cu 28 de ani mai mare decât copilul ?

Concurs Rusia

Soluţie: $(74 - 47) - 2 \cdot 10 = 7$ ⇒ copilul are acum 7 ani ⇒ tatăl are 35 de ani . ■

V. 019. Găsiţi toate numerele de trei cifre care se micşorează de 5 ori după ştergerea primei cifre .

* * *

Soluţie: Fie $n = \overline{abc}$ numărul căutat . Prin ipoteză avem :
$100a + 10b + c = 5(10b + c)$ deci $25a = 10b + c$ ⇒c este multiplu de 5.
Dacă c = 0 , avem 5a = 2b ⇒ b = 5 şi a = 2 (a = b = 0 se exclude); dacă c = 5 , avem 5a = 2b + 1 ⇒ b = 2 sau b = 7 . Numerele căutate : 125 , 250, 375 . ■

V. 020. La numerotarea paginilor unui manual s-au folosit 495 cifre . Câte pagini are manualul ?

* * *

Soluţie: Manualul are 201 pagini (pentru paginile 1 , 2 , … , 9 folosim 9 cifre , pentru paginile 10 , 11, … , 99 folosim 180 de cifre , iar de la pagina 100 avem încă (495 – 189) : 3 = 102 pagini) ■

V. 021. Arătaţi că nu există n ∈ ℕ pentru care numărul $A = 9^{5n+7} + 4^{3n+5}$ este pătrat perfect .

* * *

Soluţie: Dacă n este impar avem că 5n +7 şi 3n + 5 sunt pare , aşadar $u(9^{5n+7}) = 1$ şi $u(4^{3n+5}) = 6$ ⇒
$u(A) = 7$ (1) ; dacă n este par , avem că 5n +7 şi 3n + 5 sunt impare , deci $u(9^{5n+7}) = 9$ şi $u(4^{3n+5}) = 4$
⇒ $u(A) = 3$ (2) ; din (1) şi (2) avem că A nu poate fi pătrat perfect . ■

V. 022 . În fiecare dintre pătrăţelele unui tabel dreptunghiular cu 4 linii şi 5 coloane scriem câte un număr natural astfel încât suma numerelor de pe fiecare linie să fie aceeaşi , iar suma numerelor de pe fiecare coloană să fie , de asemenea , aceeaşi (nu neapărat egală cu cea de pe linii). Notăm cu S suma numerelor din tabel .

a) Putem avea S = 30 ? ;
b) Câte tabele există cu S < 20 ?

Dorel Miheţ , Timişoara

Soluție: a) Notăm cu l suma numerelor aflate pe o linie şi cu c suma numerelor aflate pe o aceeaşi coloană ; evident : 4l = 5c = S . Dacă S = 30 , am avea 4l = 30 , absurd ($l \in \mathbb{N}$) ⇒ S nu poate fi 30 ;

b) Din 4l = 5c = S avem imediat că S e multiplu de 4 şi de 5 ⇒ S ∈ { 0 , 20 , 40 , 60 , … . 20 k } , aşadar există un singur tabel cu S < 20 (completat numai cu zerouri) . ■

V. 023. Peste deal , printre mioare ,
Zboară nişte vrăbioare .
Câte păsări sunt , câte mioare ,
Dacă-s 8 capete şi 20 picioare ?

* * *

Soluție: Şase păsări şi două mioare . ■

Clasa a VI-a

VI. 015. Vârsta medie a celor unsprezece jucători ai unei echipe de fotbal este de 22 ani.În timpul unui meci unul dintre jucători este eliminat (a primit cartonaşul roşu). Ce vârstă are jucătorul eliminat dacă vârsta medie a jucătorilor rămaşi pe teren a coborât la
21 de ani ?

* * *

Soluție: Notăm vârstele jucătorilor cu a_1 , a_2 , .. , a_{11} . Obținem imediat :
$a_1 + a_2 + ... + a_{11} = 11 \cdot 22$ şi dacă a_{11} este vârsta celui eliminat:
$a_1 + a_2 + ... + a_{10} = 10 \cdot 21$
Deducem : $a_{11} = 242 - 210 = 32$ ani. ■

VI. 016 . Pe un drum de munte sunt doi turişti . Unul dintre ei face paşii cu 10% mai mici , dar în acelaşi timp şi cu 10% mai deşi decât celălalt . Care dintre turişti parcurge mai repede un kilometru ?

Concurs Rusia

Soluție: Notăm cu X turistul care face paşii mai scurți şi mai deşi şi cu Y pe celălat ; cand Y face 10 paşi de lungime s fiecare , X face 11 paşi de lungime 0,9 s fiecare , aşadar X parcurge distanța 9,9s în acelaşi timp în care Y parcurge distanța 10s .Aşadar Y merge mai repede . ■

VI. 017. Pe o tablă sunt scrise numerele 1,2,3,...,10
Care este cel mai mic număr de numere care trebuie şterse de pe tablă astfel încât numerele rămase să poată fi împărțite în două grupe aşa încât produsele numerelor din cele două grupe
să fie egale ?

Concurs Rusia

Soluție: E suficient să ştergem un singur număr : 7 . Din descompunerea în factori primi rezultă că trebuie şters 7 şi în grupe diferite trebuie puse numărul 9 şi perechea 3 , 6 respectiv 5 , 10 . Descompunerea căutată este aşadar : { 1,2,3,4,5,6 } şi { 8,9,10} . ■

VI. 018. Numărul natural n este produsul a două numere prime , iar suma tuturor divizorilor săi , inclusiv 1 dar exclusiv n , este egală cu 1000. Găsiți toate valorile posibile ale lui n .

Concurs Rusia

Soluție: Dacă n = pq , cu p şi q numere prime diferite, avem p+q+1=1000 deci p + q = 999 , aşadar p sau q este par ; presupunem , de exemplu că p este par ⇒ p = 2 , deci q = 997 ⇒ n = $2 \cdot 997 = 1994$. ■

VI. 019. Într-un triunghi lungimile laturilor sunt numere naturale pare şi o latură este egală cu 2 . Arătați că triunghiul este isoscel . * * *

Soluție: Dacă a<b sunt lungimile celor două laturi rămase, atunci a+2>b, deci b – a < 2 ; cum a , b sunt pare , dacă $a \neq b$, avem b – a > 2, aşadar a = b . ■

VI. 020. Găsiți numerele a , b , c ∈ ℕ dacă :

$$\frac{a}{a+1} = \frac{2b}{b+2} = \frac{a+c}{c+3} \ .$$

Dorel Miheț , Timişoara

Soluție: Evident $\frac{a}{a+1} < 1$, aşadar $\frac{2b}{b+2} < 1$, de unde b ∈ {0 ,1} . Dacă b = 0 , atunci a = c = 0 , iar b = 1 conduce la a = 2 , c = 0 . ■

VI. 021. Considerăm triunghiul ABC în care $m(\angle B) = 2 \cdot m(\angle C)$ şi există M ∈ (AB) astfel încât MB=BC . a) Dacă B_1 este simetricul lui B față de AC , arătați că MC = BB_1 ;
b)Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC dacă AB = MC .

Dorel Miheț , Timişoara

Soluție: Dreapta AC este mediatoarea lui (BB_1) , deci este şi bisectoarea unghiurilor $\angle BAB_1$ şi $\angle BCB_1 \Rightarrow m(\angle BCB_1) = 2m(\angle C) = m(\angle B)$; cum $B_1C = BC = BM$ deducem că $\Delta MBC \equiv \Delta B_1CB(L.U.L.)$, adică $MC = BB_1$. Dacă în plus $AB = BC$, avem : $AB = BB_1$; cum însă $AB_1 = AB$, avem ΔABB_1 echilateral , deci $m(A) = 30^0$, $m(ABB_1) = 60^0$ .Notând $m(C) = x$, avem : $2x = 60^0 + (90^0 - x)$, adică $x = 50^0$,aşadar : $m(B) = 100^0$ şi $m(C) = 50^0$. ■

VI. 022 . O bucată triunghiulară de carton este tăiată în bucăți (folosind tăieturi drepte) . Bucățile obținute sunt grupate după numărul de laturi.Arătați că dacă numărul grupurilor este cel puțin patru , atunci acest număr nu depăşeşte numărul triunghiurilor obținute .

* * *

Soluție: Dacă dintr-un poligon cu n laturi dorim să obținem prin tăiere cu o dreaptă o suprafață poligonală cu mai multe laturi , e necesar ca dreapta să intersecteze două laturi alăturate ale poligonului inițial ; astfel , pe lângă suprafața poligonală cu n + 1 laturi se formează şi un triunghi . Concluzia în cazul nostru este imediată . ■

VI. 023. Care dintre următoarele numere este pătrat perfect : $\underbrace{44...4}_{444.cifre}$ sau $\underbrace{55...5}_{555.cifre}$?

* * *

Soluție: Din păcate nici unul : primul are 444 de cifre de 4 , aşadar suma cifrelor sale este 1776 , care este multiplu de 3 , dar nu şi de 9 ; analog , al doilea număr are suma cifrelor 2775 multiplu de 3 , dar nu de 9 . ■

Clasa a VII-a

VII. 015. Se poate construi doar cu rigla negradată şi compasul un unghi cu măsura de $37^0 30'$?

Gazeta Matematică

Soluție: Presupunem că știți cum se construiesc elementar un triunghi isoscel , unul echilateral şi bisectoarea unui unghi (doar cu rigla negradată şi compasul) . Construim aşadar un triunghi ABC echilateral şi

apoi bisectoarea (AD a lui $\angle A$, cu D ∈ (BC) . Pe semidreapta (AD construim cu compasul punctul E astfel ca AE = AB ⇒ în triunghiul ABE isoscel măsurile unghiurilor sunt 30^0 , 75^0 şi 75^0. Nu avem decât să construim acum bisectoarea unuia dintre unghiurile de măsură 75^0 . ■

VII. 016 . Se consideră o mulțime A de numere naturale cu cel puțin trei elemente şi care are proprietatea : ∀ a , b ∈ A , $a \neq b \neq 0$, restul împărțirii lui a la b este element al mulțimii A .

Arătați că :a) 0 ∈ A ;

b) dacă 23 este cel mai mare element al mulțimii A , atunci 1∈A .

* * *

Soluție: a) Fie a,b ∈ A , a > b şi r_1 restul împărțirii lui a la b , r_2 restul împărțirii lui a la r_1 , r_3 restul împărțirii lui a la r_2 , etc. Obținem $b > r_1 > r_2 > ...$ adică un şir descrescător de numere naturale , aşadar există un $r_k = 0$ ⇒ 0 ∈ A ;

b) Folosind raționamentul anterior pentru a = 23 , care este prim , avem că ultimul rest nenul (care îl divide pe a) este 1 , deci 1 ∈ A . ■

VII. 017 . O mulțime nevidă finită A de numere naturale are proprietatea :

$$\forall\ x \in A \Rightarrow (x - 1) \in A \text{ sau } \frac{x}{2} \in A .$$

Arătați că : 5 ∈ A ⇒ 0 ∈ A .

* * *

Soluție: Dacă 5 ∈ A , cum $\frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$, avem că $5 - 1 = 4 \in A$; apoi obținem 3 ∈ A sau 2 ∈ A ; în continuare , deoarece $\frac{3}{2} \notin A, \frac{1}{2} \notin A$, avem 2 ∈ A şi 1 ∈ A , apoi 0 ∈ A . ■

VII. 018. Un bătrân are o capră , o vacă , o iapă şi o claie de fân . Nepotul țăranului a calculat că această claie ar ajunge pentru hrana caprei şi a iepei timp de o lună sau pentru capră şi vacă timp de 3/4 de lună sau pentru vacă şi iapă timp de 1/3 de lună . Bunicul a gândit puțin şi i-a spus

nepotului : " Sau vă învață aiurea la școală sau tu nu ești atent și dormi ! "
De ce s-a adresat astfel bunicul nepotului său ?

Concurs Rusia

Soluție: Presupunem că vaca , iapa și capra mănâncă x , y , respectiv z clăi de fân pe lună . Nepotul a socotit că :

$\frac{1}{y+z}=1, \frac{1}{z+x}=\frac{3}{4}, \frac{1}{x+y}=\frac{1}{3} \Rightarrow$

$y+z=1, z+x=\frac{4}{3}, x+y=3$; cum $1+\frac{4}{3}<3$, ajungem la :

z < 0 , imposibil . ■

VII. 019 . Într-o cutie se găsesc creioane de trei culori : roșii , galbene și albastre , și de trei dimensiuni : scurte , medii și lungi , astfel încât există creioane de toate cele trei culori și de toate cele trei dimensiuni . Se poate afirma că în cutie se găsesc cel puțin trei creioane , două câte două deosebindu-se și prin culoare și prin dimensiuni ?

Concurs Rusia

Soluție: Răspuns negativ. Putem , de exemplu , presupune că avem în cutie 5 creioane : 3 lungi de toate cele trei culori și 2 roșii – unul scurt și unul mediu ; avem astfel că printre oricare trei creioane , două câte două deosebindu-se prin dimensiune , două sunt roșii . ■

VII. 020 . Rezolvați ecuația : $x^{19}+x^{95}=2x^{19+95}$.

Concurs Rusia

Soluție: Notăm $x^{19}=y$ și vom avea $y+y^5=2y^6$; deducem : y = 0 sau $1+y^4=2y^5$, ecuație care are doar soluția y = 1 ; într-adevăr , dacă y > 1 , avem : $1+y^4<y^5+y^5$, iar dacă y < 1, avem $1+y^4>y^5+y^5$. Concluzia e imediată : x = 0 sau x =1 . ■

VII. 021. În cele 64 de pătrate ale unei table de șah se scriu numerele -1, 0 sau 1 . Este posibilă o numerotare astfel încât sumele numerelor de pe linii , coloane și diagonale să fie distincte ?

* * *

Soluție: Cele 18 sume (8 pentru linii , 8 pentru coloane și 2 pentru diagonale) sunt în mulțimea cu 17 elemente {- 8,-7 , … , -1, 0, 1, …,7, 8}; conform principiului cutiei , cel puțin două dintre sume sunt astfel egale . Răspunsul este deci negativ. ■

VII. 022. Pe fiecare din laturile (AB) , (BC) , (CA) ale unui triunghi se consideră câte trei puncte distincte . Câte triunghiuri se pot forma având vârfurile în cele nouă puncte considerate ?

* * *

Soluție: Triunghiurile care se pot forma sunt de două tipuri : a) cu două vârfuri pe o aceeași latură și cu al treilea vârf pe una din celelalte două laturi sau b) cu fiecare vârf pe câte o latură distinctă

Numărăm triunghiurile de tip (a) ; putem alege două varfuri pe (AB) în 3 feluri , iar cel de-al treilea vârf poate fi ales în 6 feluri ; raționăm la fel pentru fiecare latură și avem $3 \cdot 3 \cdot 6=54$ de triunghiuri ; numărul triunghiurilor de tip (b) este $3^3=27$, așadar în total avem 81 de triunghiuri . ■

VII. 023. În interiorul unui triunghi echilateral de latură 1 se află 5 puncte .

Arătați că există cel puțin două puncte care au distanța dintre ele mai mică de $\frac{1}{2}$.

* * *

Soluție: Ducem liniile mijlocii și astfel triunghiul se împarte în 4 triunghiuri echilaterale mai mici , de latură $\frac{1}{2}$; având 5 puncte , conform principiului cutiei , cel puțin două dintre ele se află în interiorul sau pe laturile unui același triunghi mic , deci distanța dintre ele este cel mult egală cu latura triunghiului . ■

Clasa a VIII-a

VIII. 015. Demonstrați că numerele de forma $9n+6$, n ∈ ℕ , nu se pot scrie ca sumă a două pătrate de numere întregi .

Gazeta Matematică

Soluție : Ați citit articolul prof.Bădescu din numărul trecut al revistei ?
Presupunem că ∃ a,b ∈ ℤ cu $9n+6=a^2+b^2 \Rightarrow 3/a^2+b^2$ (*)
Demonstrăm acum că 3/a și 3/b ; dacă 3 nu divide pe a , atunci $a=3k \pm 1$, k ∈ ℤ ⇒ $a^2=9k^2 \pm 6k+1 \Rightarrow a^2 \equiv 1(\bmod 3)$. Dacă 3/b $\Rightarrow 3/b^2 \Rightarrow 3/a^2$, contradicție , așadar 3 nu divide pe b ; analog , $b^2 \equiv 1(\bmod 3) \Rightarrow (a^2+b^2) \equiv 2(\bmod 3)$ contradicție cu (*) , deci 3 / a și 3 /

b $\Rightarrow$ $9/a^2$ şi $9/b^2$ $\Rightarrow$ $9/(a^2+b^2)$, adică $9/(9n+6)$, ceea ce e evident fals. ■

VIII. 016. Determinaţi perechile (x , y) de numere naturale pentru care $(3^x+2^x)^y-(3^y-2^y)^x=1$.

Manuela Prajea , Drobeta Tr.Severin

Soluţie: Dacă $x\neq 0, y\neq 0$, avem că 3^x+2^x şi 3^y-2^y sunt impare , deci diferenţa lor este un număr par (nu poate fi deci egală cu 1) .

Dacă x = 0 , obţinem imediat y = 1 .

Dacă y = 0 avem 1 =1 , ∀ x ∈ℕ*.

Aşadar avem perechile (0,1),(n,0) , n ∈ ℕ* . ■

VIII. 017. Determinaţi tripletele (x , y , z) de numere reale care satisfac:

$$\begin{cases}\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=x\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=y\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=z\end{cases}.$$

G.M.

Soluţie : Obţinem imediat $y+z=z+x=x+y=xyz$ ⇒ x = y = z ; din $\frac{2}{x}=x$ deducem $x\in\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$. Finalizarea e banală . ■

VIII. 018 . Să se determine cel mai mic număr de forma $\left|11^k-5^m\right|$, unde k , m∈ N* .

* * *

Soluţie: Se observă că pentru k = 2 , m = 3 avem $\left|11^k-5^m\right|=4$. Pe de altă parte $\left|11^k-5^m\right|$ se poate termina în 6 sau 4 , după cum $11^k>5^m$ sau $11^k<5^m$; prin urmare minimul căutat este 4 . ■

VIII. 019 . Numerele a şi b satisfac egalitatea $\frac{2a}{a+b}+\frac{b}{a-b}=2$. Găsiţi valorile posibile ale expresiei $E=\frac{3a-b}{a+5b}$.

Concurs Rusia

Soluţie : Din egalitatea dată ajungem imediat la $b(3b-a)=0$. Dacă b = 0 , egalitatea dată este satisfăcută pentru orice a nenul şi E = 3 , iar dacă a = 3b , E = 1 . ■

VIII. 020. Câte numere de 4 cifre există care nu se divid prin 1000 şi la care prima şi ultima cifră sunt pare ?

Concurs Rusia

Soluţie : Prima cifră a numărului poate fi oricare dintre 2 , 4 , 6 sau 8 , a doua şi a treia cifră oricare dintre cele 10 cifre , iar ultima cifră 0 , 2 , 4 , 6 , sau 8 ; un număr de 4 cifre cu prima şi ultima cifră pare apare în $4\cdot10\cdot10\cdot5=2000$ de variante ; ţinând cont şi de condiţia de nedivizibilitate cu 1000 avem în total 2000 – 4 = 1996 de numere . ■

VIII. 021. Se spune că o mulţime nevidă şi finită de numere naturale nenule şi distincte este ***interesantă*** dacă orice submulţime nevidă a sa are media aritmetică a elementelor un număr natural .

a) Determinaţi o mulţime ***interesantă*** care are 4 elemente ;

b) Arătaţi că nu există o mulţime ***interesantă*** cu 4 elemente care să conţină mulţimea { 2 , 4 , 6 } .

* * *

Soluţie: a) De exemplu A = { 24 , 48 , 72 , 96 } ;

b) Dacă A = { 2 , 4 , 6 , x } , din $\frac{2+4+x}{3}\in\mathbb{N}$ avem 3 / x , iar din $\frac{2+6+x}{3}\in\mathbb{N}$, avem 3 / (x + 2) , contradicţie . ■

VIII. 022. Se consideră mulţimea A = { k + $\sqrt{n}$ /k ∈ ℤ , n ∈ ℕ } .

a) Să se arate că $\sqrt{2}-1\in$ A ;

b) Să se arate că $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin A$;

c) Demonstraţi că : $A\cap\left(0;\frac{1}{10}\right)\neq\varnothing$.

* * *

Soluţie: a) k = - 1 , n = 2 ; b) dacă $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in A$, atuunci $\sqrt{2}+\sqrt{3}=k+\sqrt{n}$; ridicări convenabil alese la pătrat conduc la $8k\sqrt{6n}\in\mathbb{Q}$, deci k = 0 sau n = 6r^2 ; dacă k = 0 , obţinem $5+2\sqrt{6}$ = n, fals ; dacă n = $6r^2$, ajungem imediat la rk = 1 , adică $r = k = \pm 1$ şi înlocuind , obţinem în fiecare caz egalităţi false ; c) de exemplu :

$$0 < x = \sqrt{101} - 10 = \frac{1}{10+\sqrt{101}} < \frac{1}{10}$$ şi x ∈ A . ■

VIII . 023 . Se consideră numerele distincte $a_1, a_2, ..., a_{20}$ dintre numerele 1 , 2 , 3 , … , 100 . Arătaţi că cel puţin trei dintre diferenţele $a_i - a_j, i \neq j \in \{1,2,...,20\}$ sunt egale .

* * *

Soluţie: Considerăm cele 19 diferenţe $a_{20} - a_{19}, a_{19} - a_{18}, ..., a_2 - a_1$ şi , dacă cel mult două sunt egale , avem :

$(a_{20}-a_{19})+(a_{19}-a_{18})+...(a_2-a_1) \geq 1+1+2+2+...+9+9+10=100$;

pe de altă parte : $(a_{20}-a_{19})+(a_{19}-a_{18})+...(a_2-a_1)=a_{20}-a_1 < a_{20} \leq 100$. , contradicţie ■

Clasa a IX-a

IX. 015 . Determinaţi m ∈ ℝ pentru care există cel puţin un n ∈ ℤ astfel încât $3n^2 - 2mn = 2 - m - m^2$.

Gazeta Matematică (G.M.)

Soluţie: Privim egalitatea ca o ecuaţie în necunoscuta m şi punem condiţia $\Delta(m) = -8n^2 - 4n + 9 \geq 0 \Rightarrow n \in \left[\frac{-1-\sqrt{19}}{4}, \frac{-1+\sqrt{19}}{4}\right]$;

Cum n ∈ℤ , avem : n ∈ { - 1 , 0 }. Analizăm fiecare caz în parte şi ajungem la $m \in \left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, -2, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 1\right\}$. ■

IX. 016 Notăm cu O punctul de intersecţie al diagonalelor paralelogramului ABCD şi cu G_1 , G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor AOD , respectiv BOC. Demonstraţi , prin două metode , că punctele O , G_1 , G_2 sunt coliniare.

Gazeta Matematică

Soluţie : *Metoda sintetică:* Dacă M este mijlocul lui (AD), N mijlocul lui (BC) , evident M , O , N sunt coliniare (de ce ?) – ABCD

paralelogram . Cum G_1 ∈ (OM) şi G_2 ∈ (ON) , avem că O , G_1 , G_2 sunt coliniare .

Metoda vectorială: $\overrightarrow{OG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ şi

$\overrightarrow{OG_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{ON} = = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{G_2O}$ ⇒O, G_1, G_2 sunt coliniare.■

IX. 017 Demonstraţi că pentru orice n ∈ ℕ , numărul $1 + 3^n \cdot (2n-1)$ este divizibil cu 4 .

Iacob Didraga , Caransebeş

Soluţie: Notăm $A_n = 1 + 3^n \cdot (2n-1)$

Metoda I : Utilizăm metoda inducţiei matematice complete , folosind relaţia : $A_{n+1} = 3A_n + 2(3^{n+1} - 1)$

Metoda II: pentru n par avem

$A_n = 1 + (4p+1)(4k-1) = 4(4pk - p + k)$;

Pentru n impar avem :

$A_n = 1 + (4p-1)(4k+1) = 4(4pk + p - k)$. ■

IX. 018 Fie A = { 1 , 2 , 3 , … , 2005 } . Determinaţi funcţiile f : A → A cu proprietatea că

f (b) – f (a) = a – b , ∀ a , b ∈ A .

* * *

Soluţie: Dacă a < b relaţia dată conduce la f(a)>f(b) , adică f este strict descrescătoare ; se obţine imediat :

$f(x) = 2006 - x$. ■

IX. 019. Numărul 2^n are 30 de cifre . Arătaţi că una din cifre se repetă de cel puţin 4 ori .

* * *

Soluţie: Presupunând contrariul avem că fiecare din cele 10 cifre se repetă de exact 3 ori şi astfel suma cifrelor numărului este $3(0+1+2+...+9)$, de unde 3 divide pe 2^n, fals. ■

IX. 020. Determinaţi primele 2005 zecimale ale numărului $\sqrt{0,\underbrace{11...1}_{2005}}$.

* * *

Soluție: Fie $n = 0{,}11....1 \Rightarrow 9n = 0{,}99...9 = 1 - \frac{1}{10^{2005}}$

Deducem : $1 > \sqrt{9n} = \sqrt{1 - \frac{1}{10^{2005}}} > 1 - \frac{1}{10^{2005}}$, de unde :

$\frac{1}{3} > \sqrt{n} > \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 10^{2005}} = 0,\underbrace{33...3}_{2005 cifre}$; aşadar primele 2005 zecimale sunt egale cu 3 . ■

IX. 021. Determinați numerele strict pozitive $a_k, k = \overline{1,n}$ ştiind că

$a_3 = 4$ şi $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{a_k^{\ 2}}\right) = \frac{n \cdot a_n}{2a_{n-1}^{\ 2}}$, ∀ n ∈ ℕ , n ≥ 2 .

Marian Ursărescu , Roman

Soluție: Prin inducție matematică completă se arată că $a_n = n+1$, ∀ n ∈ ℕ , n ≥ 2 . ■

IX. 022. Demonstrați că între lungimile laturilor unui triunghi ABC are loc inegalitatea : $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} + \sqrt{a+b-c}$

Concurs Assian Pacific

Soluție: Notăm $x = \sqrt{b+c-a}$ şi $y = \sqrt{c+a-b}$ şi folosim inegalitatea cunoscută $\sqrt{2(x+y)} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$; continuăm procedeul şi obținem inegalități analoage şi , prin însumarea celor trei , obținem inegalitatea propusă . ■

IX. 023. Determinați m ∈ ℤ pentru care ecuația $mx^2 - (3m+1)x + 2m + 1 = 0$ are rădăcinile întregi .

Lucian Dragomir , Oțelu-Roşu

Soluție: Dacă a,b ∈ ℤ sunt rădăcinile ecuației date , avem $a \cdot b = \frac{2m+1}{m} = 2 + \frac{1}{m} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ m ∈ { - 1 , 1 } ; verificăm şi găsim într-adevăr m ∈ { - 1 , 1 } . ■

Clasa a X-a

X. 015. Rezolvați ecuația :

$(\sin x)^{\cos x} = (\cos x)^{\sin x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. * * *

Soluție : sin x > 0 , cos x > 0 ⇒ $\cos x \cdot \ln(\sin x) = \sin x \cdot \ln(\cos x)$ sau $\frac{\ln(\sin x)}{\sin x} = \frac{\ln(\cos x)}{\cos x}$ (*) . Considerăm funcția $f:(0,1) \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ şi *0<x<y<1* ⇒ $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ şi *lnx<lny<0*⇒ $\frac{\ln x}{x} < \frac{\ln x}{y} < \frac{\ln y}{y}$,

Aşadar f este strict crescătoare , deci injectivă.

Din (*) avem astfel sinx = cos x ⇒ $x = \frac{\pi}{4}$. ■

X.016. Rezolvați ecuația : $(2x)^{\frac{x^2}{2}} = 16$, x ∈ $\mathbb{R}_+^*$.

Concurs Cluj

Soluție: Observăm soluția x = 2 şi demonstrăm că e unica soluție .

Ecuația se poate scrie : $\frac{x^2}{2}\log_2(2x) = 4$; evident nu avem soluții x ≤ $\frac{1}{2}$

şi apoi funcția $f:(\frac{1}{2},\infty) \to \mathbb{R}$, f (x) ==$\frac{x^2}{2}\log(2x)$ este strict crescătoare , deci injectivă ⇒ x = 2 soluție unică . ■

X. 017. Se consideră a > b > 1, $A = \log_a(a-b)$, $B = \log_b(a-b)$. Demonstrați că dacă $a^2 + b^2 = 3ab$, atunci $A + B = 2AB$ .Reciproca este adevărată ?

Dorel Miheț , Timişoara

Soluție: $a^2 + b^2 = 3ab \Rightarrow (a-b)^2 = ab$; cum a>b>1, avem ab>1 ⇒ a – b > 1 şi putem scrie : $A + B = \frac{1}{\log_{a-b} a} + \frac{1}{\log_{a-b} b} = \frac{\log_{a-b} a + \log_{a-b} b}{\log_{a-b} a \cdot \log_{a-b} b} =$

$= \log_{a-b}(a-b)^2 \cdot \log_a(a-b) \cdot \log_b(a-b) = 2AB$.

Reciproca nu este adevărată pentru că nu este asigurată condiția $a - b \neq 1$; e suficient să luăm $a = 5, b = 4$. ■

X. 018 . Fie $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$, Re(z)$\in\mathbb{Q}$ şi Im(z)$\in\mathbb{Q}$.
Arătaţi că $|z^{2n} - 1| \in \mathbb{Q}$.

* * *

Soluţie : Considerăm $z = \cos t + i \sin t$ şi un calcul imediat conduce la $|z^{2n} - 1| = 2|\sin nt|$, este astfel suficient să arătăm că $\sin nt \in \mathbb{Q}$; demonstrăm acum prin inducţie după n simultan că $\sin nt \in \mathbb{Q}$ şi $\cos nt \in \mathbb{Q}$. ■

X. 019. Rezolvaţi ecuaţia : $3 + 5^{\frac{x}{3}} = 2^x$

* * *

Soluţie : Notăm $\frac{x}{3} = y$ şi arătăm că ecuaţia $3 + 5^y = 8^y$ are unica soluţie y = 1 , deci x = 3 ;
Folosim , de exemplu , că funcţia $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x + \left(\frac{5}{8}\right)^x$ este strict descrescătoare (de ce ?) , deci ecuaţia $f(y) = 1 = f(1)$ are cel mult o soluţie (de fapt una singură) . Redactaţi complet , cu toate justificările , soluţia problemei . ■

X. 020 . Fie x , y numere complexe astfel încât $x \neq y$ şi $|x| = |y|$. Arătaţi că : $\frac{1}{2}|x + y| < |x|$.

* * *

Soluţie: Considerăm x = a + ib , y = c + id , cu a,b,c,d $\in \mathbb{R}$; inegalitatea propusă se poate astfel scrie
$(a+c)^2 + (b+d)^2 < 4(a^2 + b^2)$; ţinând cont de egalitatea $|x| = |y|$, avem de arătat că $(a-c)^2 + (b-d)^2 > 0$, care este acum imediată , ţinând cont şi de $x \neq y$ (!) . ■

X. 021. Rezolvaţi ecuaţia : $\log_3 x = 1 - x^3$.

Lucian Dragomir , Oţelu-Roşu

Soluţie : Evident x > 0 ; ecuaţia se poate scrie

$x^3 + \log_3 x = 1$ şi observăm soluţia x = 1 care este unică deoarece funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \log_3 x$ este strict crescătoare (de ce ?) şi astfel f este injectivă ; deducem : $f(x) = f(1) \Rightarrow$ x = 1 . ■

X. 022. Notăm cu $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac proprietatea $f(f(x) + y) = f(x) + f(y)$, ∀ x , y $\in \mathbb{R}$.

a) Determinaţi funcţiile injective din $\mathcal{F}$;

b) Arătaţi că $\mathcal{F}$ conţine funcţii neconstante care nu sunt nici injective , nici surjective .

Dorel Miheţ , Timişoara

Soluţie: a) Relaţia din ipoteză conduce la :
$f(f(x) + y) = f(x) + f(y)$, ∀ x , y $\in \mathbb{R}$ şi
$f(f(y) + x) = f(y) + f(x)$, ∀ x , y $\in \mathbb{R}$; obţinem imediat :
$f(f(x) + y) = f(f(y) + x)$, ∀ , y $\in \mathbb{R}$. Deoarece f este injectivă ajungem la : $f(x) + y = f(y) + x$ sau $f(x) - x = f(y) - y$; considerăm funcţia g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(t) - t$ şi avem astfel că $g(x) = g(y)$, ∀ x , y $\in \mathbb{R}$ ⇒ ∃ a $\in \mathbb{R}$ astfel încât $g(x) = a$, ∀ x $\in \mathbb{R}$ ⇒ $f(x) = x + a$; b) avem , de exemplu , $f(x) = [x]$. Evident , trebuie verificată îndeplinirea tuturor condiţiilor din enunţ (adică f neinjectivă, nesurjectivă şi f $\in \mathcal{F}$) . ■

X. 023. Se consideră sistemul de ecuaţii :

$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2 \\ x^n + y = 12 \end{cases}.$$

Determinaţi n $\in \mathbb{N}$ * pentru care sistemul are soluţii în $\mathbb{Z}^2$ şi găsiţi aceste soluţii .

Soluţie : Se impun condiţiile x , y ≥ 2 ; aplicăm inegalitatea mediilor în prima ecuaţie şi avem că egalitatea se obţine pentru x = y . A doua ecuaţie devine astfel $x^n + x - 12 = 0$; deoarece x = 2 nu verifică , avem x ≥ 3 ⇒ $12 = x^n + x \geq 3^n + 3$ ⇒

$n \le 2$. Pentru $n = 1$ avem $x = y = 6$ şi pentru $n = 2$ avem $x = y = 3$, $x = y = 4$. ■

Clasa a XI-a

XI. 015. Fie şirul $(a_n)_{n\ge 1}$ definit prin $a_1 = \sqrt{2}$ şi $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $\forall$n≥1. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{2}\right)^{4^n}$.

Dinu Şerbănescu , Bucureşti

Soluţie: E foarte util să observăm (şi să demonstrăm prin inducţie) : $a_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$,$\forall$n≥1;limita cerută se încadrează astfel în cazul exceptat 1^∞ şi , folosind $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x_n}{x_n} = 1$ pentru $x_n \to \infty$, ajungem (destul de repede) la valoarea cerută : $e^{-\frac{\pi^2}{8}}$. ■

XI. 016. Fie A $\in \mathcal{M}_4(\mathbb{Q})$ aşa încât $\det(\sqrt{2}\cdot A + (1+i)\cdot I_4) = 0$. Demonstraţi că $\det(A^2 - I_4) \in \mathbb{N}$.

G.M.

Soluţie: $0 = \det(\sqrt{2}\cdot A + (1+i)\cdot I_4) = 2^2\cdot\det(A + \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot I_4) \Rightarrow$

$\alpha = -\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{3\pi}{4} + i\cdot\sin\dfrac{3\pi}{4}$ este o valoare proprie pentru A $\Rightarrow$ $\alpha^4 = -1$, adică α este o rădăcină a polinomului $X^4 + 1$ (care este ireductibil peste $\mathbb{Q}$) . Deoarece polinomul P caracteristic al matricei A are gradul 4 avem că $P(X) = X^4 + 1 \Rightarrow P(X) = \det(A - X\cdot I_4) = X^4 + 1$ de unde avem imediat :

$\det(A^2 - I_4) = \det(A - I_4)\det(A + I_4) = P(-1)P(1) = 4 \in \mathbb{N}$. ■

XI. 017. Dacă $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = \sqrt{1 + (n+1)x_n}$, $\forall$n$\in\mathbb{N}^*$, calculaţi limita şirului $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)_{n\ge 1}$.

Laurenţiu Panaitopol,Bucureşti

Soluţie: Se arată prin inducţie matematică completă că $n - 1 < x_n \le n$,$\forall$n $\in \mathbb{N}^*$ şi apoi , folosind criteriul cleştelui avem că limita cerută este 1 . ■

XI. 018. Fie $(a_n)_{n\ge 1}$ un şir cu proprietăţile :

(i) şirul dat este strict crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2} = 0$;

(ii) există $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1} - a_n}{n} = L$.

Arătaţi că L = 0 .

Dorin Andrica , Cluj-Napoca

Soluţie: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1} - a_n}{(n+1)^2 - n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1} - a_n}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1} - a_n}{n}\cdot\dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{L}{2}$ Conform lemei Cesaro-Stolz avem $\dfrac{L}{2} = L \Rightarrow$ L = 0 . ■

XI. 019. Arătaţi că şirul având termenul general $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + .. + \dfrac{n}{2^n}$, n ≥ 1 , este convergent .

* * *

Soluţie: Notăm $a_n = \dfrac{n}{2^n}$ şi avem $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{1}{n}) < \dfrac{3}{4}$, $\forall$ n ≥ 2 . Din această inegalitate se deduce imediat

$a_n < \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}\cdot a_2$, $\forall$ n ≥ 3 . Ajungem astfel la

$x_n < 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{4}a_2 + ... + \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}\cdot a_2$, de unde

$x_n < \frac{3}{2} + \left[1 + \frac{3}{4} + ... + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\right] \cdot a_2 < \frac{3}{2} + 2 < \frac{7}{5}$, adică şirul dat este monoton şi mărginit , deci convergent . ■

XI. 020. Se consideră matricele A , B ∈ $\mathcal{M}_3$ (ℂ) care satisfac $A + B = I_3$ şi $A^2 = A^3$. Demonstraţi că $\det(I_3 + AB) \neq 0$.

* * *

Soluţie: $B = I - A, AB = A - A^2 = BA \Rightarrow ABA = A^2 - A^3 = O_3 \Rightarrow$ $(AB)^2 = ABAB = O_3$; pe de altă parte avem şi

$I = I - (AB)^2 = (I - AB)(I + AB)$

Trecem la determinanţi şi avem : $1 = \det I = \det(I - AB) \cdot \det(I + AB)$; concluzia e imediată . ■

XI. 021. Fie a o rădăcină a ecuaţiei $x^3 - x - 1 = 0$ şi $b = 2a^2 - a$. Găsiţi un polinom nenul cu coeficienţi întregi care admite pe b ca rădăcină .

Concurs admitere Universitate

Soluţie: $f(X) = X^3 - 4X^2 + 9X - 11$. ■

XI. 022. Fie A ∈ $\mathcal{M}_2$ (ℝ) . Notăm cu tr (A) suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A . Arătaţi că dacă tr (A^{2004}) = 1 şi $\det(A^{2003} + A^{2002} + ... + A + I_2) = 0$, atunci $\det A = 0$.

* * *

Soluţie : Notăm $B = A^{2004} \Rightarrow B - I_2 = (A - I_2)(A^{2003} + ... + A + I_2)$ $\Rightarrow \det(B - I_2) = 0$; fie f polinomul caracteristic al lui B . Deoarece avem f (1) = 0 , f (x) = $x^2 - x + \det B$

$\Rightarrow$ det B = 0 $\Rightarrow$ det A = 0 . ■

XI. 023 . Demonstraţi că $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}$ astfel încât : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \varepsilon, \forall n \geq m$

* * *

Soluţie: O soluţie rapidă este următoarea :

Deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1$ (justificaţi !) , avem că $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}) = \infty$, de unde rezultă concluzia dorită . ■

Clasa a XII-a

XII.015. Dacă $(G,\cdot)$ e un grup şi f : G → G o funcţie injectivă astfel încât $f(x^2 \cdot f(y)) = x^{-1} \cdot f(xy), \forall$x,y ∈ G , arătaţi că G este abelian .

D.M.Bătineţu-Giurgiu , Bucureşti

Soluţie : În relaţia dată facem x = e ⇒ $f(f(y)) = f(y)$,∀y ∈ G ; cum f e injectivă avem că f(y) = y , ∀y∈G. Relaţia din enunţ devine astfel $x^2 y = x^{-1} xy$, de unde $x^2 = e$,∀x∈G ⇒G abelian (de ce ?) . ■

XII.017. Există funcţii f : ℝ → ℝ* care admit o primitivă F pentru care $F(1-x)F(x)F(1+x) = F(x^n)$, ∀x∈ℝ,n∈ℕ,n≥2. ?

G.M.

Soluţie: Presupunem că există funcţii cu proprietatea din enunţ , derivăm egalitatea dată şi facem x = 0 ⇒ $F^2(1) \cdot f(0) = 0$;ţinând cont de ipoteză ⇒ F(1) = 0 ; pentru x = 0 în egalitatea din enunţ avem F (0) = 0 şi aplicând teorema lui Rolle funcţiei F pe [0,1] obţinem că există c ∈ (0,1) cu f (c) = 0 , contradicţie cu modul de definire al lui f . Răspunsul este deci negativ. ■

XII.018. Fie (G , .) un grup şi H ⊂ G , $\emptyset \neq H \neq G$ o submulţime cu proprietatea :

∀x∈H , ∀y∈G\H ⇒ xy ∈ G\ H .

Demonstraţi că H este un subgrup al lui G .

Marcel Ţena , Bucureşti

Soluție: 1) Dacă e este elementul neutru al grupului G , demonstrăm că e $\in$ H ; presupunem că $e \notin H$ şi fie x $\in$ H $\Rightarrow$ x = xe $\in$ G \ H , contradicție $\Rightarrow$ e $\in$ H ;

2) Fie x $\in$ H şi x^{-1} simetricul său (în G) ;dacă presupunem $x^{-1} \in$ G \ H , avem $e = x \cdot x^{-1}$ $\in$G\H , contradicție , aşadar $x^{-1} \in$ H ;

3) Dacă x , y $\in$ H , presupunând că xy$\in$G\H avem : y = x^{-1} (xy)$\in$G\H, contradicție , deci xy $\in$ H.Finalizarea vă aparține ■

XII.019. Calculați : $\int \frac{x}{1+x+e^x}dx$, x > 0 . * * *

Soluție: $\int \frac{1+x+e^x-1-e^x}{1+x+e^x}dx = \int dx - \int \frac{(1+x+e^x)'}{1+x+e^x}dx =$

$= x - \ln(1+x+e^x) + C$. ■

XII.020. Pe mulțimea M = (0 , ∞) se consideră o lege de compoziție " ☺" care satisface condițiile : a) (x + 1) ☺ x = 1 , $\forall$ x $\in$ M ;

b) (xy) ☺ z = x(y ☺ z) , $\forall$ x , y , z $\in$ M

Calculați $\sqrt{2}$ ☺ $\left(1+\sqrt{2}\right)$.

* * *

Soluție: Putem scrie succesiv :

x ☺ y = $\left(\frac{x}{y+1}\cdot(y+1)\right)$ ☺ y = $\frac{x}{y+1}$((y + 1) ☺ y) = $\frac{x}{y+1}$; rezultatul cerut este deci : $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} = \sqrt{2}-1$ ■

XII.021 . Calculați $\lim_{n\to\infty} n \cdot \int_0^1 x^n \cdot \ln(1+x)dx$.

* * *

Soluție: Integrăm prin părți avem :

$$n \cdot \int_0^1 x^n \cdot \ln(1+x)dx = \frac{n}{n+1}\ln 2 - \frac{n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \ .$$

Deoarece $0 \le \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \le \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x}dx = \frac{1}{n+1} \to 0$

(pentru n $\to\infty$) deducem că limita cerută este ln 2 . ■

XII.022 . Determinați numerele naturale n pentru care există un polinom $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ cu coeficienți reali care satisface : $P(t) > -3$, $\forall$ t $\in$ ℝ şi P (- 2) = P (0) = P (2) = 0 .

Concurs Rusia

Soluție: Din ipoteză avem că n $\ge$ 3 . Dacă n este impar avem : $\lim_{t\to-\infty} P(t) = -\infty$, contradicție cu ipoteza , aşadar n este număr par .

Dacă n = 4 , conform ipotezei avem că P este de forma $P(X) = X(X-2)(X+2)(X-a)$; avem însă în acest caz , pentru a $\le$ 1 , P (1) $\le$ - 3 , contradicție cu ipoteza , aşadar n este par şi n $\ge$ 6 .

Într-adevăr , putem considera $P(X) = X^{n-4}(X+2)^2(X-2)^2$ ■

XII.023. Fie k $\in$ ℝ şi f :ℝ $\to$ ℝ o funcție continuă cu proprietatea că $f(x) + f(-x) = k$, $\forall$ x $\in$ ℝ .

Calculați : I = $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos^2 x}dx$.

Vasile Gorgotă , Râmnicu-Vâlcea

Soluție:

Facem schimbarea de variabilă t = - x şi ajungem la I = k . ■

Concursul Județean al Revistei de Matematică Caraş-Severin Oțelu-Roşu 2006 – Ediția I

prezentare de Lucian Dragomir şi Ovidiu Bădescu

1. Organizare

Concursul a fost precedat de selectarea elevilor participanți la Oțelu-Roşu , care a constat în corectarea soluțiilor la problemele de concurs publicate în revistă în numerele 12 , 13 şi 14 de către profesorul Lucian Dragomir; au fost admişi elevii cu punctajul mai mare de 60 de puncte şi astfel au participat 61 de elevi (deşi au fost calificați mai mulți !!) . Concursul a avut loc în data de 4.02.2006 şi a fost găzduit de Grupul Şcolar din Oțelu-Roşu; mulțumim şi pe această cale organizatorilor, în special Doamnelor Directoare Rozina Ghiorghioni şi Daniela Chelbea , profesorilor de matematică şi tuturor cadrelor didactice ale şcolii gazdă care au depus eforturi deosebite pentru a transforma acest concurs într-un eveniment chiar reuşit. Deschiderea a avut loc la ora 9,30, concursul s-a desfăşurat între orele 10 – 13 , a urmat corectura şi, la ora 17, mult aşteptata festivitate de premiere .

2. Sponsori , alte activități

Costul mesei de prânz, de altfel foarte bună, a fost suportat de Consiliul Local şi Primăria oraşului gazdă. În timp ce lucrările elevilor erau evaluate, aceştia au putut vizita Muzeul de Geografie Literară al liceului, unic în țară (şi poate nu numai). Toți elevii participanți au primit câte o diplomă (pentru că o meritau prin simplul fapt că au ajuns să concureze), iar cei câştigători au primit diplomă de premiere, precum şi premii în bani (comparativ cu alte concursuri de gen din țară , premiile au fost substanțiale); sumele acordate au fost de 100 RON (premiul I), 80 RON (premiul II), 60 RON (premiul III) şi 30 RON (mențiune) . Fondul de premiere a fost constituit din: fonduri proprii ale Filialei (provenite din cotizațiile membrilor şi din vânzarea revistei) şi din donații ale unor persoane fizice apropiate învățamântului matematic (mai există şi astfel de oameni!): fam.Colcear , fam.Ciovican , fam.Unguraş , farm.Stanciu Constanța, Dr. Faur Mariana şi, nu în ultimul rând, Domnul Primar al oraşului Oțelu-Roşu, Iancu Simion, care a fost trup şi suflet, de la început, alături de organizatori. În plus, premianții clasei a IX a au primit câte o

carte cu "Numere Complexe", oferită de Domnul Profesor Mircea Iucu , inițiatorul Revistei noastre .

3. Profesori participanți

Pe lângă cadrele didactice din şcoală, un număr mare de profesori de specialitate din județ au participat, chiar cu drag credem , la această manifestare (de fapt, aceştia sunt printre puținii totuşi care şi-au îndemnat elevii să rezolve probleme din reviste pentru a avea astfel şansa participării; suntem convinşi, de fapt sperăm, că numărul acestora va creşte în anii ce vin) .

La festivitatea de deschidere au participat şi: Prof.Drd.Paul Mihai Şuşoi, inspector de matematică la ISJ Caraş-Severin, Ing.Claudiu Popescu, reprezentant al Consiliului Local Oțelu-Roşu.

Comisia de evaluare a fost formată din următorii profesori :
Moatăr Lavinia, Dragomir Ioan-Adrian (clasa a V-a), Mirulescu Marița, Drăghici Alexandru (clasa a VI-a), Humița Dorina, Feil Heidi (clasa a VII-a), Mara Adriana, Dragomir Delia(clasa a VIII-a), Golopența Marius, Bădescu Ovidiu (clasa a IX-a), Hurduzeu Diana, Didraga Iacob (clasa a X-a) , Iucu Mircea, Dragomir Lucian (clasa a XI-a) , Buzescu Antoanela, Stăniloiu Nicolae (clasa a XII-a) .

4. Subiecte

Subiectele au fost selectate de profesorul Dragomir Lucian
(nu se poate să nu remarcați că multe dintre probleme sunt preluate din Gazeta Matematică, revista care n-ar trebui să lipsească de pe masa nici unui pasionat de matematică;să amintim numai că anul trecut Gazeta a aniversat 110 ani de existență,iar viața atât de lungă i se datorează tuturor celor care au iubit-o :elevi,studenți, profesori ,părinți,…).
Vă propunem în continuare să vă încercați puterile cu toții :

Clasa a V-a

1. Produsul vârstelor a trei frați exprimate prin numere naturale este 80 . Doi frați sunt gemeni , iar tatăl copiilor are 26 de ani. Ce vârste au cei trei copii ?

(RMCS , enunț modificat)

2. O familie este formată din trei persoane : tata , mama şi copilul . Acum suma vârstelor lor este de 67 de ani , iar cu 10 ani în urmă această sumă era de 45 de ani . Câți ani are acum mama , dacă tatăl este cu 32 de ani mai mare decât copilul ?

(RMCS, enunț modificat)

3. O pereche (a , b) de numere naturale este scrisă pe tablă ; se stabileşte ca un pas să fie ştergerea perechii de pe tablă şi înlocuirea ei cu perechea (a + 2 , b + 1) .
După câți astfel de paşi succesivi se poate ajunge de la perechea (1 , 1) la o pereche (x , y) cu x + y = 2006 ?

(Lucian Dragomir)

4. a) Determinați numerele naturale a , b , c pentru care

$$5^a + 6^b + 8^c = 125;$$

b) Scrieți numărul 5^{2005} ca sumă de trei pătrate perfecte nenule.

(Lucian Dragomir)

Clasa a VI-a

1. Determinați numerele $\overline{ab}$ scrise în baza 10 pentru care numărul $\overline{ab} + \overline{ba} + 7a + 7b$ este pătrat perfect .

(Adriana Dragomir , RMCS – enunț modificat)

2. Suma a 11 numere naturale distincte este egală cu 70 .
Arătați că produsul acestor numere se divide cu 420 .

(Constantin Borăscu , Rm.Vâlcea – GM 6/2006)

3. Folosind toate cifrele 2 , 3 , 4 , … , 9 , dar fiecare o singură dată, se formează două numere naturale . Poate unul dintre aceste numere să fie dublul celuilalt ?

(Concurs Rusia)

4. De aceeaşi parte a lui A_1 , se consideră pe o dreaptă punctele $A_1, A_2, A_3, ..., A_{11}$ aşa încât $A_1A_2 = 2$, $A_2A_3 = 3$, … , $A_{10}A_{11} = 11$.

a) Dacă fiecare dintre segmentele $(A_1A_2), (A_2A_3), ..., (A_{10}A_{11})$ se colorează cu una dintre culorile roşu , galben sau albastru , arătați că există cel puțin patru segmente de aceeaşi culoare ;

b)Dacă M e un punct oarecare în interiorul segmentului (A_1A_{11}), N este mijlocul lui (A_1M) şi P este mijlocul lui (MA_{11}) , calculați lungimea segmentului (NP) .

(Lucian Dragomir)

Clasa a VII-a

1. Determinați numerele întregi a şi b pentru care

$$\frac{a}{b+1} + \frac{a+1}{b} = \frac{a}{b} .$$

(Gazeta Matematică – Adrian Ursu , Botoşani)

2. Se consideră O un punct oarecare în planul triunghiului ABC şi D , E , F simetricele punctului O față de mijloacele laturilor (BC), (CA) , respectiv (AB).
Demonstrați că dreptele AD , BE , CF sunt concurente .

(Gazeta Matematică – Liliana Dinescu ,Făgăraş)

3. Un triunghi din hârtie s-a îndoit după o dreaptă astfel încât vârful C a ajuns pe latura AB , iar părțile neacoperite reprezintă două triunghiuri isoscele la care laturile congruente se întâlnesc în A , respectiv B. Care este măsura unghiului $\angle ACB$ (înainte de îndoire) ?

(concurs Rusia)

4. a) În interiorul unui triunghi echilateral de latură 1 se află 5 puncte . Arătați că există cel puțin două puncte situate la o distanță mai mică de $\frac{1}{2}$.

(RMCS nr. 14)

b) Arătați că numărul $A = 3^{40} - 2^{40}$ este divizibil cu 5.

(RMCS nr. 13)

Clasa a VIII-a

1. a) Determinați cea mai mică valoare posibilă a expresiei

$$E(y) = 4y^2 + 3y + 3 \text{ , } y \in \mathbb{R} .$$

b) Determinați numerele naturale x , y care satisfac :

$$x^2 = 4y^2 + 3y + 3 .$$

(Gazeta Matematică , Constantin Apostol-Rm.Sărat)

2.Determinați numerele naturale m , n care satisfac

$$5^m + 144 = n^2 .$$

(RMCS , enunț modificat)

3. Într-o piramidă triunghiulară SABC notăm cu D , E , F proiecțiile vârfului S pe laturile (BC) , (AC) , respectiv (AB) ale laturilor tringhiului ABC.
Dacă SD = SE = SF , arătați că dreptele AD , BE , CF sunt concurente .

(Florin Nicolaescu , Balş- GM 5-6/1988)

4. Pe fețele unui cub se scriu numere naturale nenule (câte unul pe fiecare față) , iar în fiecare vârf se scrie produsul celor trei numere scrise pe fețele care se întâlnesc în vârful respectiv. Să se găsească suma numerelor de pe toate fețele știind că suma numerelor din vârfuri este egală cu 70.

(concurs Rusia)

Clasa a IX-a

1. a) Câte numere de 4 cifre există care nu se divid prin 1000 şi la care prima şi ultima cifră sunt numere pare ?

(RMCS 14)

b) Să se determine șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 1$ şi astfel încât

pentru orice n ∈ ℕ , n ≥ 2 , există k ∈ { 1 , 2 , … , n – 1 } cu $a_n = a_k + a_{n-k}$.

(Laurențiu Panaitopol , GM 2/2005)

2. Dacă numerele reale strict pozitive a , b , c satisfac $a + 2b + 3c = 4$, arătați că :

a) $\sqrt{a} + \sqrt{2b} + \sqrt{3c} \leq \frac{7}{2}$;

b) $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 9$

(Dorin Mărghidanu , Corabia – Lucian Dragomir, Oțelu-Roşu)

3. Se consideră o funcție f : (0 , ∞) → (0, ∞) cu proprietatea

că : $f(x) = y \cdot f\left(\frac{x}{y}\right)$, ∀ x , y > 0 .

Dacă f (1003) = 59 , calculați :

a) f (2006) ;

b) f (34) .

(RMCS – enunț modificat Lucian Dragomir)

4. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele M ∈ (AB) , N ∈ (BC) , P ∈ (CA) și se notează

$$\frac{MA}{AB} = m \ , \ \frac{NB}{BC} = n \ , \ \frac{PC}{CA} = p \ .$$

Demonstrați că centrul de greutate al triunghiului MNP aparține medianei din A a triunghiului ABC dacă și numai dacă $2n = m + p$

(Marian Andronache , Bucureşti – GM 3/2000)

Clasa a X-a

1. Fie M ⊂ ℂ o mulțime care satisface proprietățile :

a) 0 ∈ M ;

b) $x \in M \Rightarrow (\cos x + i \cdot \sin x) \in M$;

c) $(\cos 2x + i \cdot \sin 2x) \in M \Rightarrow x \in M$.

Arătați că :

(i) M conține cel puțin trei numere întregi ;
(ii) M conține o infinitate de numere iraționale
(iii) M conține o infinitate de numere complexe nereale .

(Lucian Dragomir)

2. Să se rezolve în ℝ ecuația :

$$x^2 + \log_3(x^2 + x + 1) = 2x + \log_3 x$$

(RMCS enunț modificat , Lucian Dragomir)

3. Fie u , v numere complexe şi $\alpha=\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}$.

Demonstraţi inegalitatea :

$$|u-\alpha\cdot v|\le|u|+|u-v| .$$

(Gazeta Matematică , Romeo Ilie – Braşov)

4. Fie a ∈ ℝ şi f : ℝ → ℝ o funcţie pentru care :

$$f(x)\cdot f(y)+f(x)+f(y)=f(x\cdot y)+a\ ,\ \forall\ x , y \in \mathbb{R}$$

Determinaţi a ∈ ℝ ştiind că f este bijectivă . Calculaţi în acest caz f (- 1) , f (0) şi f (1) .

(Gazeta Matematică 2/2003 – Marcel Chiriţă , Bucureşti)

Clasa a XI-a

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&2\\2&-2&4\end{pmatrix}$. Calculaţi A^n şi $\det(A^n)$, n ∈ ℕ*

(Gazeta Matematică , Aurel Doboşan – Lugoj)

2. Fie A ∈ $\mathcal{M}_2$(ℤ) o matrice inversabilă pentru care $\det(A+A^{-1})<0$.

Arătaţi că $\det A\le -1$.

(Gazeta Matematică , Marius Burtea - Alexandria)

3. Fie $A=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$ o matrice cu a , b ∈ ℝ , $0\le a^2+b^2<1$. Arătaţi că dacă $n\to\infty$, elementele matricei A^n , n ∈ ℕ* , sunt termenii generali ai unor şiruri convergente.

* * *

4. a) Fie f : ℕ → ℕ o funcţie injectivă . Demonstraţi că $\lim_{n\to\infty} f(n)=\infty$

b) Calculaţi limita şirului $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\ge1}$ ştiind că $x_1=1$ şi $x_{n+1}=\sqrt{1+(n+1)\cdot x_n}$ ∀ n ∈ ℕ* .

(RMCS nr. 13)

(RMCS nr. 14)

Clasa a XII-a

1. Fie $(G,\cdot)$ un grup multiplicativ cu elementul neutru e şi f : G → G un morfism injectiv astfel încât

$$f(f(x))\cdot f(x)=e\ ,\ \forall\ x\in G .$$

Arătaţi că G este un grup abelian .

* * *

2. Determinaţi mulţimea H de numere reale dacă H are o structură de grup în raport cu legea definită prin $x\circ y=\ln(e^x+e^y-a)$, ∀ x , y ∈ H , unde a > 0 este fixat .

* * *

3. a) Demonstraţi că : $e^x\ge 1+x$, ∀ x ∈ ℝ .

b)Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\ge1}$ definit prin $a_n=\int_1^n e^{-x^2}dx$ este convergent .

(Lucian Dragomir , GM 1/2001)

4. Funcţia continuă f : ℝ → ℝ verifică relaţia :

$$6f(-3x)+2f(x)=x^3\ ,\ \forall\ x\in\mathbb{R} .$$

Calculaţi : $I=\int_{-12}^{4} f(x)dx$.

(Ilie Stănescu , Sibiu – GM 5/2005)

5. Lista elevilor premiați :

Clasa a V-a

Premiul I : Nasta Laura (Grup Şcoalar Oțelu-Roşu) - prof.Adriana Dragomir

Premiul II : Dumitresc Cecilia (Grup Şcolar Oțelu-Roşu) - prof.Adriana Dragomir

Mențiuni : Popeangă Raluca (Lic.Hercules Băile-Herculane) , prof. Marius Golopența

Tabugan Călina Dana (Lic.Hercules Băile-Herculane) , prof. Marius Golopența

Codoşpan Florinela (Şcoala Rusca –Teregova) - prof.Sorin Ciucă

Dragomir Claudiu (Grup Şcolar Oțelu-Roşu) - prof.Adriana Dragomir

Clasa a VI-a

Premiul I : Stanciu Ioan (Colegiul Național Carol I , Craiova) , prof. Monica Stanca

Premiul II : Mocanu Ioana Dora (Lic.Traian Doda Caransebeş), prof.Delia Dragomir

Premiul III : Paşan Petru (Şcoala Rusca – Teregova) - prof. Sorin Ciucă

Mențiuni : Szabo Cristian (Lic.Traian Doda Caransebeş), prof.Delia Dragomir

Ştreangă Stelian (Şcoala Generală nr. 1 Oțelu-Roşu) , prof. Heidi Feil

Duma Andrei (Şcoala Generală nr.1,Oțelu-Roşu) , prof. Heidi Feil

Clasa a VII-a :

Premiul I : Prunar Victor (Lic.Pedagogic Caransebeş) - prof.Diana Hurduzeu

Premiul II : Ciucă Sorin Cristian (Şcoala Teregova) - prof. Ilie Damian

Zanfir Cristian (Lic.Traian Doda Caransebeş), prof.Delia Dragomir

Premiul III : Novăcescu Dorin (Lic.Traian Doda Caransebeş), prof.Delia Dragomir

Mențiuni : Cherloabă Edith (Liceul de Artă Reşița) - prof. Adriana Mara

Clasa a VIII-a :

Premiul I : Milcu Roxana (Lic.Pedagogic Caransebeş) - prof. Lavinia Moatăr

Premiul II : Stăniloiu Ovidiu (Şcoala Gen . 2 Bocşa) - prof.

Premiul III : Vlad Adina (Lic.Pedagogic Caransebeş) - prof. Lavinia Moatăr

Mențiuni : Moatăr Alexandra(Lic.PedagogicCaransebeş) - prof. Lavinia Moatăr

Megan Ligia (Lic.Pedagogic Caransebeş) - prof. Lavinia Moatăr

Lupu Vlad (Şcoala Generală 3 Oțelu-Roşu) - prof.Felicia Boldea

Timofte Andrei (Lic.Pedagogic Caransebeş) - prof. Lavinia Moatăr

Mureşan Alexandru-Ioan(Lic.Pedagogic Caransebeş), prof.Dorina Humița

Clasa a IX-a :

Premiul I : Unguraş Dragoş (Grup Şcolar Oțelu-Roşu) , prof.Lucian Dragomir

Premiul II : Kremer Emanuela(Lic.Pedagogic Caransebeş) - prof. Lavinia Moatăr

Premiul III : Gurgu Caius (Lic.Pedagogic Caransebeş) - prof. Lavinia Moatăr

Mențiuni : Dragomir Lucia (Grup Şcolar Oțelu-Roşu) , prof.Lucian Dragomir

Buzuriu Alina (Grup Şcolar Oțelu-Roşu) , prof.Lucian Dragomir

Drăgan Alin (Grup Şcolar Oțelu-Roşu) , prof.Lucian Dragomir

Clasa a X- a :

Premiul I : Popovici Doru (Lic. Traian Lalescu,Reşița) , prof. Ovidiu Bădescu

Premiul II : Labo Laurențiu (Lic.Pedagogic Caransebeş)
- prof.Marița Mirulescu
Premiul III : Faur Olivia (Grup Şcolar Oțelu-Roşu) ,
prof.Lucian Dragomir
Mențiuni : Petruş Laura (Lic.Traian Doda Caransebeş),
prof.Lavinia Moatăr
Dochin Luminița(Lic.Traian Doda Caransebeş),
prof.Lavinia Moatăr
Iacob Alexandra(Lic.Traian Doda Caransebeş),
prof.Delia Dragomir
Voinea Alexandra(Lic.Traian Doda Caransebeş),
prof.Lavinia Moatăr
Istodor Cosmin (Grup Şcolar Oțelu-Roşu) ,
prof.Lucian Dragomir

Clasa a XI-a :

Premiul I : Chesoi Carmen (Lic.Traian Doda Caransebeş),
prof.Lavinia Moatăr
Mențiuni : Ceauşu Ioana (Lic.Traian Doda Caransebeş),
prof. Iacob Didraga
Mureşan Viorel Dan(Lic.TraianDoda),
prof. Lavinia Moatăr

Clasa a XII-a :

Premiul I : Chiş Andrei (Lic. Traian Lalescu,Reşița) ,
prof. Ovidiu Bădescu
Mențiuni : Radu Mihai (Grup Şcolar Oțelu-Roşu) ,
prof.Lucian Dragomir
Sandu Ionela (Grup Şcolar Oțelu-Roşu) ,
prof.Lucian Dragomir
Andrei Corina Ionela (Lic.TraianDoda) ,
prof.Iacob Didraga
Teişanu Iuliana(Grup Şcolar Oțelu-Roşu) ,
prof.Lucian Dragomir

6. Concluzii

Credem că , în ansamblu, concursul a fost reuşit şi evident , trebuie continuat; regretăm absența unora dintre elevii cei mai buni din județ (nu au trimis soluții la problemele din revistă sau, cu totul regretabil, nici măcar nu au avut revista; în acest caz, trebuie să o spunem, credem că vinovat este profesorul. Poate ne înşelăm, chiar am vrea să fie aşa; privind însă lista rezolvitorilor constatăm, cu durere chiar, că lipsesc zone întregi din județ. Oricum, nu putem decât spera că situația se va schimba). Cu toate acestea, premianții sunt dintre elevii cu rezultate notabile la olimpiade şi concursuri de matematică .

Au fost clase la care unele premii nu s-au acordat din cauza punctajelor mici obținute .

Subiectele au fost , în general , “frumoase” , echilibrate, surprinzătoare poate. Având în vedere punctajele obținute , putem cataloga drept mai dificile problemele 3 şi 4 de la clasa a V-a , problema 3 – clasa a VI-a (doar elevul Ioan Stanciu a obținut 6,5 puncte din 7 posibile), problemele 2 şi 3 – clasa a VII-a (Victor Prunar – 7 puncte, respectiv Sorin Ciucă – 7 puncte), problema 4 – clasa a IX-a (din păcate, în concurs, o greşeală de tehnoredactare a făcut să apară în concluzie o egalitate falsă; cu toate acestea, Dragoş Unguraş a descoperit greşeala şi a rezolvat perfect problema; dealtfel a fost singurul elev din concurs care a obținut punctajul maxim posibil: 28 puncte). Continuând , avem problemele 3 şi 4 – clasa a X-a (elevul Doru Popovici a obținut 7 puncte la fiecare), problema 2 de la clasa a XII-a (nici un concurent nu a obținut peste 3 puncte) .

Încheiem aici cu speranța că ediția următoare va fi mai reuşită, că aria de selecție a participanților se va mări (poate şi cu alte județe), deci va creşte şi nivelul competiției. Succes , spor la treabă şi nu uitați: e esențial să participi !

Concursul Județean al Revistei de Matematică Caraş-Severin , Ediția a II-a

Regulament

Ediția a II a a Concursului Revistei demarează acum, cu problemele propuse în acest număr. Fiecare elev trebuie să rezolve (subliniem din nou: **singur! ;** altfel e posibil să vă treziți calificați la concurs şi acolo să nu faceți mare lucru → dați naştere la întrebări şi credem că nici n-o să vă simțiți prea bine), aşadar să rezolve cât mai multe probleme de la clasa sa , de la clasa precedentă sau de la orice clasă superioară (am avut anul acesta multe situații şi de acest gen). Redactați îngrijit fiecare problemă pe câte o foaie separată (enunț + autor + soluție + numele vostru) , completați talonul de concurs de pe ultima pagină a revistei şi trimiteți totul într-un plic adresat astfel : Prof.Lucian Dragomir , Grup Şcolar Industrial Oțelu-Roşu, str.Republicii 10-12, 325700, Oțelu-Roşu, Caraş-Severin, cu mențiunea "probleme rezolvate". Insistăm asupra trimiterilor în plic (nu în folii de plastic) şi asupra respectării cu strictețe a termenelor finale indicate de fiecare dată - plicurile primite după data limită nu vor fi luate în considerare.

După data limită de trimitere a soluțiilor, acestea sunt evaluate şi în numul următor al revistei vor fi publicați toți rezolvatorii cu punctajele obținute.

La ediția a II-a a concursului vor fi selectați concurenții în funcție de punctajele obținute din rezolvarea problemelor publicate în numerele 15, 16, 17 şi 18 ale revistei noastre. În jurul datei de 20 ianuarie 2007 se va întocmi clasamentul general (prin însumarea punctelor obținute) şi astfel primii clasați vor fi invitați, împreună, ca şi în acest an, să participe la concurs; acesta va avea loc tot la începutul lunii februarie într-un oraş care va fi anunțat în timp util .

Subiectele vor fi alese tot din probleme de genul RMCS sau G.M. sau ceva cât de cât nou.

Noutatea ediției din acest an constă în faptul că ne adresăm de-acum şi elevilor de **ciclu primar.**

Demarăm cu această ocazie şi un concurs (cu premii din nou) de probleme propuse de către elevi; acestea trebuie trimise în plic separat de eventualele probleme rezolvate, cu mențiunea " Probleme Propuse " . Încercați ! Oricum , n-o să vă pară rău .

Spor la treabă tuturor : elevi , profesori , părinți sau prieteni !

(*Informații suplimentare se pot obține la : prof. Lucian Dragomir , tel: 0255/530303 sau 0722/883537*). ■

Probleme propuse

(pentru participare la concurs şi nu numai)

(Data limită de trimitere a soluțiilor : **24 martie 2006**)

Clasa a IV-a

IV.001 Într-o operație de împărțire , suma dintre deâmpărțit şi împărțitor este 1022 , câtul este 14 , iar restul 47. Aflați deâmpărțitul şi împărțitorul.

Instit. Elena Minea , Caransebeş

IV.002 Patru vaci şi 36 de oi consumă zilnic 120 kg de nutreț.O oaie consumă cu 10 kg mai puțin decât o vacă.Ce cantitate de nutreț îi este necesară unui gospodar pentru a hrăni timp de 61 de zile două vaci şi zece oi ?

Instit. Elena Minea , Caransebeş

IV.003 Un croitor foloseşte pentru confecționarea a 4 rochii şi 4 costume 20 m de stofă , iar pentru 4 rochii şi 8 costume , 32 m de stofă. Câți metri de stofă se folosesc pentru o rochie şi câți pentru un costum ?

Instit. Elena Minea , Caransebeş

IV.004 Ionel îl întreabă pe bunicul său câți ani are.Acesta îi răspunde : " Dacă voi mai trăi un sfert din ceea ce am trăit şi încă 5 ani , atunci voi avea 85 de ani." Aflați câți ani are bunicul .

Instit. Elena Minea , Caransebeş

IV.005 Calculați $a + b + c + d + e$, dacă :

1) a este cu 392 mai mare decât b ;
2) b este de 5 ori mai mic decât sfertul lui c ;
3) c este de 4 ori mai mare decât jumătatea lui d ;
4) d este dublul lui e ;
5) 4560 este triplul lui e .

Instit. Elena Minea , Caransebeş

IV.006 Suma dintre un număr , jumătatea sa şi treimea sa este 660.Care este numărul ?

Instit. Mirela Tătar , Caransebeş

IV.007 Tavi a citit în vacanță o carte. Verişoara sa l-a întrebat câte pagini are cartea şi Tavi i-a spus : " Dacă mai avea un sfert din numărul de pagini şi încă 50 , cartea ar fi avut 550 de pagini , dar nu are aşa de multe ." Verişoara , care ştie ceva aritmetică , a scris ceva pe o foaie şi i-a spus : " Sigur ai citit mai puțin de 432 de pagini." Ştie aritmetică verişoara ?

Instit. Mirela Tătar , Caransebeş

IV.008 Tavi (acelaşi) colecţionează timbre şi l-a convins pe prietenul său Sebi să încerce şi el . Împreună , colecţia lor are acum 238 de timbre . Din toate acestea , Tavi îi face cadou prietenului 24 de timbre şi astfel Sebi are acum de şase ori mai puţine timbre decât Tavi. Câte timbre ar avea Sebi , dacă Tavi i-ar mai da jumătate din timbrele sale ? Câte timbre avea Tavi la început ?

Instit. Mirela Tătar , Caransebeş

IV.009 Câte zile sunt într-o perioadă care începe şi se sfârşeşte cu un an bisect ?

Înv.Rodica Putiţincuş , Caransebeş

IV.010 Într-o clasă sunt de două ori mai multe fete decât băieţi.

Pot fi 25 de elevi în clasă ? Dar 24 ?Care din următoarele numere poate fi numărul elevilor din clasă : 17 , 18 , 19 , … , 32 ?
(Încercaţi o soluţie cât mai scurtă a probemei) .

Înv.Elena-Stanca Codilă , Caransebeş

Clasa a V-a

V.024 La o împărţire cu rest, mărind deâmparţitul cu 91, câtul a crescut cu 7.

a) Aflaţi deâmpărţitul;
b) Care sunt deâmpărţitorii pentru câtul egal cu 154 ?

Prof. Ion Belci, Reşiţa

V.025 Determinaţi numerele naturale $\overline{ab}$ scrise în baza 10 pentru care sunt îndeplinite simultan condiţiile :

1) $a^b + b^a$ este divizibil cu 5 ;
2) $\overline{ba} - ab$ este cub perfect .

Prof.Delia Marinca , Timişoara

V.026 Reconstituiţi adunarea :

$$(COD + COD) + (COD + COD) = TON \text{ .}$$

(Sperăm că vă place să mâncaţi peşte ; dacă nu , educaţi-vă , e foarte sănătos .Lăsând gluma la o parte , probabil că ştiţi că literelor diferite le corespund cifre diferite şi literelor identice le corespund aceleaşi cifre) .

* * *

V.027 O bunică are doi nepoţi. Vârsta bunicii este un număr format din două cifre astfel încât prima cifră indică vârsta unui nepot , iar a doua

cifră vârsta celuilalt . Ce vârste au fiecare dacă suma vârstelor lor este 69 de ani ?

Concurs Bulgaria

V.028 Un tren parcurge distanţa de 60 km dintre Timişoara şi Lugoj într-o oră. În acelaşi timp cu trenul , o rândunică porneşte în zbor din Timşoara spre Lugoj cu o viteză de 90 km/oră şi ajunge mai devreme decât trenul la destinaţie , apoi se întoarce zburând spre tren până la întâlnirea cu el , apoi din nou spre Lugoj; rândunica îşi continuă astfel zborul , până când ajunge odată cu trenul la Lugoj. Ce distanţă a parcurs rândunica efectuând aceste zboruri ?

* * *

V.029 Tatăl şi fiul au de făcut o lucrare în 3 zile.Tatăl lucrează de 3 ori mai repede decât fiul său.Dacă lucrează numai fiul , în câte zile termină lucrarea ?

Prof.Mariana Zălog , R.M.T

V.030 Se dau numerele naturale consecutive a şi b (a > b) .

(i) Care este restul împărţirii lui a la b ? ;
(ii) Care este restul împărţirii lui b la a ? .

(Încercaţi , eventual , pe un exemplu concret) Justificaţi toate răspunsurile .

Gazeta Matematică

V.031 Determinaţi mulţimile A şi B de numere naturale care satisfac proprietăţile :

a) A are trei elemente ;
b) 1 ∈ A şi 3 ∈ A ;
c) suma elementelor lui B este egală cu 25 ;
d) pentru orice a , b ∈ A , avem $a \cdot b \in$ B .

Prof.Adriana Dragomir , Oţelu-Roşu

V.032 Determinaţi produsul $a \cdot b \cdot c \cdot d$ dacă

$a + c = b + d$ şi $\overline{abba} + \overline{bab} = \overline{bacd}$.

Prof.Adriana Dragomir, Oţelu-Roşu

V.033 Două numere naturale de câte cel mult şase cifre sunt scrise numai cu cifrele 1 , 4 , 6 şi 9 . Poate fi unul dintre numere de 17 ori mai mare decât celălalt ?

Concurs Bulgaria

Clasa a VI-a

VI.024 Determinați numărul natural par n știind că suma divizorilor săi este 1 + n .

* * *

VI.025 Pe laturile (AB) şi (AC) ale triunghiului ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABX şi ACY. Notăm cu P , Q , R respectiv mijloacele segmentelor [AX] , [AY] şi [BC] . Este triunghiul PQR echilateral ?

Concurs India (RMT)

VI.026 Într-un bloc sunt 88 de apartamente cu două şi respectiv cu trei camere. Câte apartamente de fiecare fel sunt dacă numărul camerelor este 198 ?

Prof.Nicolae Ivăşchescu , Craiova – Gazeta Matematică

VI.027 Fie [OA bisectoarea unghiului EOD, semidreapta [OD este opusa semidreptei [OB. Ştiind că A şi C se găsesc în semiplane diferite faţă de dreapta BD, OC⊥OA şi că m(∠COD)=$47^0$44'23",

a) Calculati m(∠EOB);
b) Dacă (OF∈int(∠BOE), m(∠EOF) este cu $5^0$28'46" ma mare decât m(∠BOA), aflaţi m(∠BOF).

Profesor Ion Belci, Reşiţa

VI.028 Împărţiţi în trei unghiuri congruente un unghi de măsură 108^0 folosind numai rigla şi compasul .

Prof.I.Nicolaescu – Gazeta Matematică

VI.029 Se poate împărţi numărul 2006 în părţi direct proporţionale cu numerele 0,4 , 0,6 şi 0,7 ?

Prof. Adriana Dragomir , Oţelu-Roşu

VI.030 În triunghiul ABC isoscel avem $m(\angle BCA) = 100^0$. Bisectoarea unghiului $\angle CAB$ intersectează pe BC în punctul D. Demonstraţi că există m ∈ ℕ astfel încât : $m \cdot AB = AD + CD$.

Concurs Bulgaria

VI.031 Fie ABCD un romb de latură 1 . Pe laturile (AB) şi (AD) există punctele P , respectiv Q astfel încât perimetrul triunghiului APQ este 2 şi $m(\angle PCQ) = \frac{1}{2} m(\angle BCD)$ .Determinaţi unghiurile rombului dat.

Cristinel Mortici , R.M.T.

VI.032 O grădină de formă dreptunghiulară are lungimea x metri şi lăţimea y metri (x , y numere întregi). Determinaţi x şi y ştiind că grădina poate fi încercuită cu o alee de lăţime un metru şi astfel încât aria aleii să fie egală cu aria grădinii.

Concurs Bulgaria

VI.033 La plecarea în vacanţă 7 elevi au decis ca fiecare dintre ei să trimită exact la 3 colegi câte o scrisoare fiecăruia. Este posibil ca fiecare elev să primească scrisori de la toţi colegii cărora el le-a scris ?

Concurs Moldova

Clasa a VII-a

VII.024 Dacă numerele naturale a , b , c sunt direct proporţionale cu 11 , 9 , respectiv 7 , iar numerele naturale c , d , e , f sunt invers proporţionale cu numerele 15 , 21 , 35 , respectiv 105 , demonstraţi că :

$$\left(\frac{f}{a-b}\right)+\left(\frac{f}{b-c}\right)^2+\left(\frac{f}{c-d}\right)^3+\left(\frac{f}{d-e}\right)^4+\left(\frac{f}{e-f}\right)^5<1.$$

Prof. Delia Marinca , Timişoara

VII.025 Fie patrulaterul inscriptibil ABCD, I intersecţia diagonalelor sale şi punctul V astfel încât I este centrul cercului înscris în triunghiul VAB. Să se demonstreze că $VI \perp CD$.

Prof. Petrişor Neagoe , Anina

VII.026 a) Arătaţi că există o infinitate de numere iraţionale a , b pentru care a + b este raţional ;

b) Dacă $\left(1+\sqrt{2}\right)^{2006} = A + B\sqrt{2}$, cu A , B ∈ ℚ , arătaţi că $A^2 - 2B^2$ este raţional .

Prof. Ecaterina Zsibriczki , Bocşa

VII.027 Într-un ΔABC cu AB=AC se notează cu E şi M punctele de intersecţie ale bisectoarei respectiv înălţimi din B, cu latura AC.

Să se demonstreze că $BC^3 = 2MC \cdot CE(AB + BC)$.

Prof. Anghel Păun , Reşiţa

VII.028 Se consideră mulţimea A = { 1 , 2 , … , 10 } . Determinaţi mulţimile B şi C care satisfac : a) $B \cup C = A$; b) $B \cap C = \varnothing$; c) B are două elemente ; d) produsul elementelor din B este egal cu suma elementelor din C .

* * *

VII.029 Fie un unghi cu măsura de 30^0 cu vârful în O. Pe una din laturile unghiului se ia punctul A_1, diferit de vârf. Piciorul perpendicularei din A_i, i=1, 2, …, n, pe cealaltă latură este B_i, piciorul perpendicularei din B_i pe OA_1 este A_{i+1}.

a) Să se găsească i astfel încât $OA_i \le A_iA_1$;

b) Cât reprezintă A_iA_1 din OA_1 ?

Prof. Ion Belci, Reşiţa

VII.030 a) Arătaţi că există numere întregi a , b , c astfel încât

$$a^2 + b^2 - 8c = 9;$$

b)Arătaţi că nu există numere întregi a , b , c astfel încât

$$a^2 + b^2 - 8c = 6.$$

Concurs Bulgaria , Chile

VII.031 În triunghiul oarecare ABC , fie M mijlocul laturii [BC] , E $\in$ (AC) , F $\in$ (AB) astfel încât [ME este bisectoarea unghiului AMC . Demonstraţi că [MF este bisectoarea unghiului AMB dacă şi numai dacă EF este paralelă cu BC .

Prof. D . M . Bătineţu-Giurgiu , Bucureşti

VII.032 În paralelogramul ABCD punctul E este mijlocul laturii (AD) . Demonstraţi că dacă F este piciorul perpendicularei din B pe CE , atunci triunghiul ABF este isoscel .

Concurs Moldova

VII.033 Iepuraşul va împărţi un număr de bomboane la 13 băieţi şi 10 fete astfel încât fiecare dintre ei să primească cel puţin o bomboană.Fiecare fată şi fiecare băiat va primi acelaşi număr de bomboane.Copii au constatat că există un singur mod de a împărţi în acest fel bomboanele.Care e numărul maxim de bomboane pe care îl va avea iepuraşul ?

Concurs Moldova

Clasa a VIII-a

VIII.024 Dacă a , b , c sunt numere strict pozitive care au suma egală cu 3 , arătaţi că : $\sqrt{1+a} + \sqrt{2+b} + \sqrt{c+3} < 6$.

Prof. Adriana Dragomir, Oţelu-Roşu

VIII.025 În paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' , A_1 este intersecţia dreptei AA' cu semidreapta cu originea în B care face ca $\angle$ABA' ≡ $\angle ABA_1$, AP mediană în ΔABA_1 iar Q intersecţia dreptelor AD cu A_1D'.

Aflaţi volumul poliedrului APQA'BD' în cazul când :

a) AB≡AD≡AA'=a

b) AA'=a; AB=b;AD=c.

Prof. Ion Belci, Reşiţa

VIII.026 Determinaţi câte triplete (x , y , z) de numere naturale cu x < y există astfel încât numărul $n = \overline{abx} \cdot \overline{aby} + z^2$ este pătrat perfect .

Prof.Delia Marinca , Timişoara

VIII.027 Pe planul ΔABC cu m($\angle$BAC)=90^0 se ridică perpendiculara DP, P$\in$(AC). Ştiind că AB=24 cm, BD=30 cm şi m($\angle$PAD)=60^0, calculaţi distanţa de la B la PD.

Dacă BC=30 cm, calculaţi distanţa de la A la (BDC).

Profesor Ion Belci, Reşiţa

VIII.028 Laboratorul de biologie are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 8m , 8m şi 4m. În laborator au scăpat , dintr-o cutie , 33 de fluturi care s-au împrăştiat , zburând în toată sala , fără a ieşi. Arătaţi că în orice moment există doi fluturi la o distanţă mai mică de 3,50 m unul de altul.

Prof.Gh.Efrim , Gazeta Matematică

VIII.029 Araţi că dacă în paralelipipedul dreptunghic $[ABCDEFG]$ are loc inegalitatea $\frac{3}{2} \le \frac{A[ABCD]}{AC^2} + \frac{A[ABFE]}{AF^2} + \frac{A[ADHE]}{AH^2}$, atunci paralelipipedul este cub.

Prof. D . M . Bătineţu-Giurgiu , Bucureşti

VIII.030 a) Scrieţi numărul 3^{25} ca o sumă de trei pătrate perfecte ;

b) Arătaţi că ecuaţia $x^2 + y^3 + z^4 = t^5$ are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor naturale .

Prof.Dr.Dorin Mărghidanu , Corabia

VIII.031 Găsiţi , dacă există , tripletele (x , y , z) de numere pozitive pentru care avem : $\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 = xyz \end{cases}$

Concurs Canada

VIII.032 Un săpun are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 2 cm , 4 cm şi 8 cm.În fiecare zi se pierde din săpun aceeaşi cantitate. În câte zile se consumă săpunul ştiind că după 7 zile are din nou forma unui paralelipiped dreptunghic , dar cu dimensiunile exact de două ori mai mici (adică 1 , 2 , 4 cm) ? Concurs Bulgaria

VIII.033 Fie m > n numere naturale . Pentru orice număr natural k notăm $a_k = \left(\sqrt{5}+2\right)^k + \left(\sqrt{5}-2\right)^k$. Arătați că :

$$a_{m+n} + a_{m-n} = a_m \cdot a_n .$$

Concurs Moldova

Clasa a IX-a

IX.024 Arătați că : $\frac{x^2+y^2-2xy}{x+y-2\sqrt{xy}} > 2\sqrt{xy}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $x \neq y$

Prof. D . M . Bătinețu-Giurgiu , București

IX.025 Fie a, b, c ∈ $\mathbb{N}^*$, b > a + c și

A={x∈ℝ/ $ax^2+bx+c=0$} .Demonstrați că :

a) A are exact două elemente ;

b) A ∩ ℤ are cel mult un element ;

c) Există a , b , c astfel încât A ∩ ℤ are exact un element .

Prof.Lucian Dragomir ,Oțelu-Roșu

IX.026 Determinați numărul tripletelor (x , y , z) de numere reale care satisfac :

$$\begin{cases} xy = z - x - y \\ yz = x - y - z \\ zx = y - z - x \end{cases}$$

Concurs Canada

IX.027 Demonstrați că dacă numerele strict pozitive a , b , c au suma egală cu 3 , atunci $\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1} \geq \frac{3}{2}$.

Prof.Dorin Mărghidanu , R.M.T. (prelucrare)

IX.028 Rezolvați ecuația : $\{x\} = \frac{x+[x]+(x)}{10}$, unde {x} este partea fracționară a lui x , [x] este partea întreagă a lui x , iar (x) este cel mai apropiat întreg de numărul real x .

Prof. Nicolae Bișboacă , Alba Iulia – Gazeta Matematică

IX.029 O dreaptă variabilă taie laturile AB , BC , CD și Da ale unui dreptunghi respectiv în M , N , P și Q . Arătați că :

$$\frac{AB^2}{NQ^2}+\frac{BC^2}{MP^2} = \text{constant} .$$

Gazeta Matematică

IX.030 Fie a , b > 0 . Determinați funcțiile f : ℝ → ℝ pentru care

$$f(x-\frac{b}{a})+2x \leq \frac{a}{b}x^2+2\frac{b}{a} \leq f(x+\frac{b}{a})-2x \text{ , } \forall \text{ x} \in \mathbb{R}$$

și $f(0)=\frac{a}{b}$.

Prof.Dr.Dorin Mărghidanu , Corabia

IX.031 Lui Alin îi place mult cifra 5 , dar lui Dragoș nu-i place deloc. Alin a scris toate numerele de 7 cifre care conțin cel puțin o cifră de 5 (i-a cam luat ceva timp !) , iar Dragoș a scris toate numerele de 7 cifre în care nu apare cifra 5 . Care dintre cei doi a scris mai multe numere (adică a cam pierdut vremea) ?

* * *

IX.032 Fie ABC un triunghi cu B și C fixe, iar A variabil astfel încât tg B + tg C = k (constant). Găsiți locul geometric al ortocentrului triunghiului ABC.

(Gazeta Matematică)

IX.033 Determinați cel mai mare număr natural n pentru care inegalitatea $\frac{4}{x}+\frac{9}{y} \geq \frac{n}{x+y}$ este adevărată pentru orice x , y >0.

Concurs Moldova

Clasa a X-a

X.024 Determinați funcțiile injective f : $\mathbb{N}^*$→$\mathbb{N}^*$ cu proprietatea că f (2) = 2 și $x \cdot f(x)+y \cdot f(y)+x \leq f(x-y+1)+2xy+y$, ∀ x , y ∈ $\mathbb{N}^*$, x > y .

Prof. D . M . Bătinețu-Giurgiu , București

X.025 Arătați că dacă $a+b\cos x+c\cos 2x+d\cos 3x=0$ pentru orice x ∈ ℝ , atunci a = b = c = d = 0 .

* * *

X.026 Determinați funcțiile $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ cu proprietatea :

$$f(xyz) \geq f(x) + f(y) + f(z) \geq \frac{\ln(xyz)}{1 + |\ln x \cdot \ln y \cdot \ln z|}, \forall x,y,z \in \mathbb{R}_+^*.$$

Prof. D . M . Bătinețu-Giurgiu , București

X.027 Rezolvați ecuația : $\log_{12}\left(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}\right) = \frac{1}{2} \cdot \log_9 x$

Prof.Manole Neagu – Gazeta Matematică

X.028 Fie f , g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții care satisfac simultan relațiile :

a) $f^3(x) + 3 \cdot f(x) \cdot g^2(x) = \cos^2 x$, $\forall$ x $\in \mathbb{R}$;

b) $g^3(x) + 3 \cdot g(x) \cdot f^2(x) = \sin^2 x$, $\forall$ x $\in \mathbb{R}$.

Arătați că :

(i) Există x , y $\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $x \neq y$, f (x) + g (y) $\in \mathbb{Q}$;

(ii) f și g nu sunt injective.

Prof.Dr.Dorin Mărghidanu , Corabia

X.029 Demonstrați că dacă ABCD este un patrulater inscriptibil , atunci centrele de greutate ale triunghiurilor ABC , BCD , CDA , ADB sunt conciclice.

* * *

X.030 Dacă z $\in \mathbb{C}$ astfel încât $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$,

rezultă $z^n + \frac{1}{z^n} \in \mathbb{R}$, $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$?

* * *

X.031 A , B și C sunt trei puncte pe un cerc de rază R astfel încât AB = AC $\leq$ R , iar D este punctul din interiorul cercului astfel încât triunghiul ACD este echilateral ; dreapta BD mai intersectează cercul în E . Arătați că DE = R .

Test tabără națională

X.032 În patrulaterul convex ABCD diagonalele AC și BD sunt perpendiculare și se intersectează în E. Arătați că simetricele lui E față de AB , BC , CD ,DA sunt puncte conciclice .

Concurs SUA

X.033 Notăm cu D , E , F mijloacele arcelor mici BC , CA , respectiv AB ale cercului circumscris triunghiului ascuțitunghic ABC.Arătați că

dacă triunghiurile DBC , ECA , FAB au arii egale , atunci triunghiul ABC este echilateral.

Prof.Lucian Dragomir ,Oțelu-Roșu

Clasa a XI-a

XI.024 Se dă un șir strict crescător $(a_n)_{n \geq 0}$ de numere reale . Notând $A = \{a_n / n \geq 0\}$, determinați funcțiile injective f : A $\to$ A pentru care există o funcție surjectivă g : A $\to$ A astfel încât

f(g(x)) $\leq$ g(x) , $\forall$ x $\in$ A .

Prof. D . M . Bătinețu-Giurgiu , București

XI.025 Fie matricele A , B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ care satisfac proprietățile :

a) Există m $\in \mathbb{N}$, m $\geq$ 2 , astfel încât $A^m = A^{m+1}$;

b) A + B = I_n .

Arătați că matricea I_n – AB este inversabilă .

Prof. D . M . Bătinețu-Giurgiu , București

XI.026 Arătați că dacă A $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci există o infinitate de numere complexe α astfel încât matricele $\alpha \cdot I_n + P(A)$ să fie inversabile , oricare ar fi polinomul P cu coeficienți întregi.

Prof.Univ.Dr.Constantin Niculescu , Gazeta Matematică

XI.027 Dacă 0 < a < b și $x_n = b + (-1)^{n-1} a$, n $\in \mathbb{N}^*$, calculați

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \text{ și } \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n} .$$

Gazeta Matematică

XI.028 Fie a , b , c $\in \mathbb{C}$ cu $|a| \leq 1, |b| \leq 1, |c| \leq 1$ și $A = \begin{pmatrix} c & 1 & -1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente :

a) Există două șiruri $(x_n), (y_n)$ de numere complexe cu proprietatea că pentru orice n $\in \mathbb{N}$ avem : $A^n = x_n \cdot I_3 + y_n \cdot A$;

b) $A^2 = O_3$.

Prof.Univ.Dr.Ion Chițescu , Gazeta Matematică

XI.029 Un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ are proprietăţile :

a) $|x_m - x_n| \leq \frac{|m-n|}{m+n}$, ∀ m , n ≥ 1 ; b) $\lim_{n\to\infty} x_{n^2} = 1$.

Demonstraţi că : $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

Conf.Univ.Dr.Cristinel Mortici , Gazeta Matematică

XI.030 Calculaţi $\lim_{x\to 0}\frac{tg(ax)-\sin(ax)}{tg(bx)-\sin(bx)}$, unde a,b ∈ $\mathbb{R}^*$, fără a folosi derivatele .

Gazeta Matematică

XI.031 Se consideră f : ℝ → ℝ o funcţie care satisface condiţiile :

a) f are limită în orice punct a ∈ ℝ şi f(a – 0) ≤ f (a) ≤ f (a + 0);

b) pentru orice a,b ∈ ℝ , a < b , avem : f (a – 0) < f (b – 0) .

Demonstraţi că f este strict crescătoare .

Prof.M. Piticari , S. Rădulescu- Gazeta Matematică

XI.032 Fie f : ℝ → ℝ o funcţie cu proprietatea lui Darboux astfel încât $f\circ f$ este injectivă . Arătaţi că $f\circ f$ este strict crescătoare.

Gazeta Matematică

XI.033 Arătaţi că ∀ a ∈ (0, 1] , ∃ n ∈ ℕ şi ∃ x ∈ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ astfel încât

$\sin^{2n} x + \cos^{2n} x = a$

* * *

Clasa a XII-a

XII.024 Determinaţi funcţiile f : ($\mathbb{Z}_p$, +) → ($\mathbb{Z}_p$, +) , cu p număr prim , care satisfac :

$f(x+f(y)) = y + f(x)$, ∀ x , y ∈ $\mathbb{Z}_p$.

Conf.Univ.Dr.Cristinel Mortici , R.M.T.

XII.025 Fie (M , *) un monoid şi e elementul său neutru . Este posibil să existe $H\subset M$ aşa încât (H , *) să fie grup , iar elementul neutru al lui H să fie diferit de e ?

Prof. Liliana Niculescu , Craiova – Gazeta Matematică

XII.026 Fie $(A,+,\cdot)$ un inel şi a , b ∈ A cu proprietăţile :

(i) Există m ∈ ℕ , m ≥ 2 astfel încât $a^m = a^{m+1}$;
(ii) a + b = 1 .

Arătaţi că 1 – ab este inversabil .

Prof. D . M . Bătineţu-Giurgiu , Bucureşti

XII.027 Fie f : ℝ → ℝ o funcţie derivabilă cu proprietăţile :

a) Există $\lim_{x\to\infty} x\cdot f'(x) = L$;

b) Dacă F este o primitivă a lui f , atunci $\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x} = 1$

Calculaţi L şi $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Prof.Mihai Bălună , Gazeta Matematică

XII.028 Calculaţi integrala : $\int_0^{\ln 2} arctg(e^x - 1)dx$.

Prof. D . M . Bătineţu-Giurgiu , Bucureşti

XII.029 Calculaţi integrala : $\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^x}dx$

Prof.Lucian Tuţescu , Craiova

XII.030 Fie $(G,\cdot)$ un grup multiplicativ comutativ şi a ∈ G . Dacă funcţia f : G → G are proprietatea că $f(x)\cdot(f\circ f)(x) = a$,∀x∈G , arătaţi că f este injectivă dacă şi numai dacă este surjectivă .

Prof. D . M . Bătineţu-Giurgiu , Bucureşti

XII.031 Calculaţi integrala : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\sin x+\cos x}dx$

Prof. Drd.Manuela Prajea, Drobeta Tr.Severin

XII.032 Fie $(G,\cdot)$ un grup multiplicativ şi H un subgrup al său astfel încât dacă M este subgrup al lui G şi M este izomorf cu H , atunci M = H. Arătaţi că ∀ g ∈ G şi ∀ h ∈ H ⇒ ghg^{-1} ∈ H.

Prof.Florin Nicoară , Oradea

XII.033 Pentru ce valoare a lui m > 0 aria mulţimii

$A = \left\{(x,y)/\, m \leq x \leq 2m, 0 \leq y < x + \frac{6}{x^2}\right\}$ este minimă ?

* * *

Notă : Rugăm toţi colaboratorii care ne trimit probleme propuse , note, articole, etc., să tehnoredacteze materialele pe calculator şi să le ataşeze ca fişier la mesajul lor, apoi să folosească adresa : ***lucidrag@yahoo.com*** (cu menţiunea : materiale pentru RMCS)

Rubrica rezolvitorilor

– punctaje realizate pentru soluțiile problemelor din RMCS nr. 14 (în paranteză apare punctajul total realizat pentru concurs)

Clasa a V-a :

Şcoala nr.1 Anina (prof. Manuela Skopecs):
Rotaru Ana-Maria 43(43) , Drăgilă Patricia 43(43),Luca Marius 42(42),Vrînceanu Cezar 42(42)
Liceul Hercules Băile Herculane (prof.Marius Golopența):
Iacobici Pavelina 36 (36) , Anton Alexandru 36 (74) , Bogdan Esther Maria 36 (76) , Tabugan Călina Dana 119 (173) , Muică Mihaela 34(34),Manța Florin Claudiu 57(107),Popeangă Raluca Ştefania , Basarabă Drăgan George , Martin Patricia 18 (44) ,Petronescu Ducu George 18(18).
Şcoala Bozovici (prof.Iosif Găină) :
Radomir Denisa Laliana 80(80),Bratosin Felix 80(80),Barbeş Cezara 80(80) , Băcilistina 80 (80) , Păunescu Alexandra 80 (80)
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (prof.Marița Mirulescu)
Untaru Mădălina 47(47), Sâsâeac Iulia 63 (63) , Tătar Octavian 62(111) , Ion Răzvan 72(72)
Grup Şcolar Industrial Oțelu-Roşu (prof.Adriana Dragomir) :
Dumitresc Cecilia Grațiela 58(98), Albai Cosmin 53 (93) , Dragomir Claudiu 76 (116) , Nasta Laura 100(140)
Şcoala Rusca-Teregova (prof.Ciucă Sorin) :
Stepanescu Georgeta Mihaela- (18), Codoşpan Florinela 38(73),Milu Ionela 9(26),Banda Dani 18(18), Humița Maria 15(32),Blaj Marinela Alisa 5 (23) , Berzescu Nicolae 6(24).

Clasa a VI-a

Şcoala Berzasca (prof. Dana Emilia Schiha) : Furdui Vasile – Gabriel 39(39),Radovan Cosmin 30 (30) , Balaban Alin Mihai 30(30) , Lupşici Lia Loredana 30(30), Petrescu Oana-Andreea 37(37) , Şişcu Cristina-Adriana 30(30) .
Şcoala Bozovici (prof. Maria Bololoi) : Borchescu Ana Maria 70(70).
Liceul Traian Doda Caransebeş (prof.Delia Dragomir):
Mocanu Ioana Dora 131(231) , Szabo Cristian 80(137)
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş(prof.Dorina Humița):

Pleşko Cosmin Peter 28(28) , Semenescu Anca 100(100) , Stepanescu Richard 62(62) , Borcean Gheorghe 60 (60) , Bucă Ioana 50(50) , Bob Cristiana 43(43) , Bejeriță Loredana 35(35) , Mihai Cristian 54(54).
(prof. Marița Mirulescu) Antonescu Nicoleta 21(21) , Todorovici Lucian 57(57) .
Colegiul Național Carol I Craiova (prof. Monica Stanca):
Stanciu Ioan 113 (113) .
Liceul de Artă Reşița (prof.Adriana Mara) :
Munteanu Cosmin 12 (42) , Goicovici Denisa 68 (146) .
Şcoala Generală 2 Reşița (prof.Marius Şandru):
Borțun Ana-Maria 30(30), Bugărin Liza-Maria 20(20) , Azap Bianca 30(30).
Şcoala Rusca-Teregova (prof.Ciucă Sorin):
Paşan Petru 73(73) , Lințu Florin Cosmin 13(13),Blaj Ilie Dănuț 56(56) , Vernicuța Petronela 56(56) , Stepanescu Elisabeta 39(39) , Banda Vasile 34(34) , Banda Ionela Mitra 9(9) , Dumitrică Eva Daniela 24(24) .
Şcoala Generală nr. 1 Oțelu-Roşu (prof.Heidi Feil):
Bugariu – Kozilek Timeea 98 (187) , Duma Andrei 108 (196)

Clasa a VII-a

Şcoala nr.1 Anina (prof. Manuela Skopecs):
Golîmba Pavelina-Adelina 15(15) , Cleşiu Marian Cătălin 30 (30) .
Şcoala Rusca-Teregova (prof.Ciucă Sorin) : Stepanescu Ana-Patricia 39 (62) , Gherga Ionela 7 (16) , Humița Toma 6(54) , Iciu Gheorghe 8(52) , Stepanescu Mihai 13(64) , Raduia Ştefan 9(29) , Gherga Ionuț-Barbu 34(89) , Banda Anca 6(24) , Stepanescu Ianăş 6(56) , Moacă Ion 23(23) , Rădoi Georgeta 18(18) , Gherga Petru 23(23) , Popa Petru-Ionuț 39(39) , Banda Iosif 6(6) , Berzescu Maria 16(16) .
(prof.Ilie Damian) : Ciucă Cristian Sorin 112 (304) .
Liceul Traian Doda Caransebeş (prof.Delia Dragomir):
Novăcescu Dorin 97 (255) , Zanfir Cristian 167 (167) , Baneu Petru 108(108) .
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş(prof.Diana Hurduzeu) :
Prunar Victor 254 (550) .
Liceul de Artă Reşița (prof.Adriana Mara) :
Cherloabă Edith 73 (208) .
Şcoala Generală nr. 3 Oțelu-Roşu (prof.Felicia Boldea):
Ştefănigă Sebastian 42 (102) .

Clasa a VIII-a

Şcoala Rusca-Teregova (prof.Ciucă Sorin) : Codoşpan George 24(42) , Humiţa Maria – Mirabela 16 (37) , Gherga Patricia 16 (39) , Stepanescu Anca-Liliana 13 (30) , Stepanescu Adamescu Ioan 13(30) , Humiţa Elisabeta 5 (21) ,Banda Dan 16(16) , Banda Traian 9 (9) , Cobel Ştefania Ionela 9 (9) , Gherga Constantin 7(7) .
Şcoala Generală nr. 2 Bocşa (prof. Veronica Todor) :
Stăniloiu Ovidiu 143 (416) .
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş(prof.Lavinia Moatăr):
Milcu Roxana 176 (516) , Timofte Andrei 111 (111) , Cristescu Loga Cella 54 (146) , Moatăr Alexandra 113 (326) , Vlad Adina 192 (510) , Megan Ligia 104 (156).
(prof.Dorina Humiţa) Mureşan Alexandru Ioan 70 (216) , Mureşan Ana Maria 70 (216) .
Şcoala Generală nr. 3 Oţelu-Roşu (prof.Felicia Boldea):
Lupu Vlad 98 (199) .

Clasa a IX-a

Liceul Teoretic Bozovici (prof.George Pascariu):
Şuveţi Pavel 10(10),Nezbeda Harald 12(12),Răşinariu Lucian 30(30).
Liceul Traian Doda Caransebeş (prof.Iacob Didraga):
Hurduzeu Ovidiu 18(18)
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş(prof.Lavinia Moatăr):
Kremer Emanuela 93 (362) , Gurgu Caius 73 (154) , Iliescu Marcel 62 (101) .
Grup Şcolar Industrial Oţelu-Roşu (prof.Lucian Dragomir):
Unguraş Dragoş 113 (279) , Dragomir Lucia 65 (197) , Buzuriu Alina 95 (135) , Drăgan Alin 78 (78) .

Clasa a X-a

Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (prof.Mariţa Mirulescu):
Labo Laurenţiu 71 (132) , Roată Ramona 18 (59) , Mărgan Larisa 26 (26) , Stănilescu Maria 17(17) , Miron Bogdan 17(17) , Colţan Anca 24 (24) , Cornianu Ioan Cristian 17 (57) , Beja Ancuţa 17(17) .
Liceul Traian Doda Caransebeş (prof.Lavinia Moatăr) :

Zoican Andrei 33(33) , Voinea Alexandra 70 (70) Dochin Luminiţa 58 (175) , Marghescu Marian 46 (46) , Mutuleanu Alexandra 91 (91) , Cuţitoi Simina 65 (65) , Petruş Laura 76 (76) , Ştefănuţ Paula Loredana 76 (182) , Aghescu Loredana 76(76) , Guţulescu Oana 73(73) .
Grup Şcolar Industrial Oţelu-Roşu (prof.Lucian Dragomir):
Istodor Cosmin 58 (263) .
Liceul Teoretic Traian Lalescu Reşiţa (prof.Ovidiu Bădescu) :
Popovici Doru Adrian Thom 126 (304).

Clasa a XI-a

Liceul Teoretic Traian Doda Caransebeş (prof.Lavinia Moatăr):
Sferle Bogdan 58 (58) Carmen 86(86) , Enache Bianca Emilia 27(27) , Mureşan Viorel Dan 68 (68) .
(prof.Iacob Didraga) : Ceauşu Ioana 40 (140) , Mandreşi Elena 80 (122) .

Clasa a XII-a

Liceul Teoretic Traian Doda Caransebeş (prof.Iacob Didraga)
Andrei Corina Ionela 75 (122) .
Liceul Teoretic Traian Lalescu Reşiţa (prof.Ovidiu Bădescu) :
Chiş Andrei Vasile 127 (194) .
Grup Şcolar Industrial Oţelu-Roşu (prof.Lucian Dragomir):
Teişanu Iuliana 52 (83) , Sandu Ionela 52 (83) , Stancu Alexandra 48 (68) , Chiriac Anca 49 (64) , Enache Alexandra 48 (66) , Ionescu Maria 48 (69) , Vişescu Daniela 50 (83) , Radu Mihai 68 (68) , Greuceanu Emanuel 27 (27) .