Le Nombre d'Or

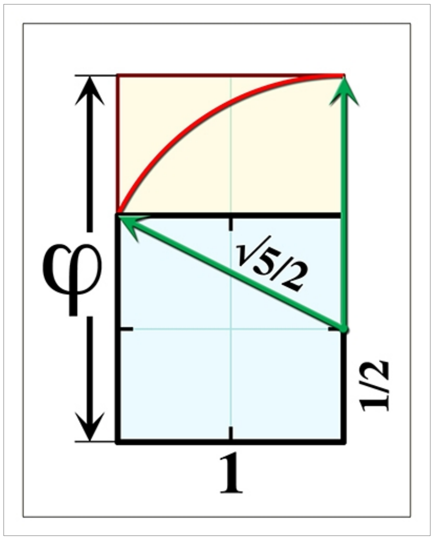
◇ Introduction au Nombre d'Or

Phidias, parrain du Nombre d'Or
Le Nombre d'Or doit son nom au sculpteur **Phidias**, représentant du premier Classicisme de la Grèce Antique. En 460 avant Jésus-Christ, son mécène et ami Périclès lui confia les travaux de l'Acropole (notamment du **Parthénon**). Sa maîtrise des proportions était remarquable. Ainsi, il surprit les habitants d'Athènes par une statue d'Athéna qui leur parut bien maladroite à même le sol. Mais une fois juchée sur son socle, Athéna devint divine à leurs yeux. À la fin de sa vie, le parrain du Nombre d'Or, Phidias, fut victime de mauvais procès et des contemporains jaloux le forcèrent à l'exil, en la ville d'Olympie.

Au XXème Siècle, dans les années 10, le critique et escrimeur britannique Theodore Andrea Cook (1867-1928) se met d'accord avec son ami mathématicien américain Mark Barr pour introduire la notation de φ (la lettre grecque Phi), comme symbole mathématique du Nombre d'Or en référence à Phidias. Le double argument de la consonance de la lettre φ avec celle de Π, autant qu'avec le nom du sculpteur rendu célèbre pour sa maîtrise de la proportion dorée, est rapporté par Cook dans son livre « Les courbes de la vie »**. Il fait le compte des formations en forme de spirale et de leur implication dans la croissance de la Nature, dans la Science, et dans l'Art. Et il se réfère tout particulièrement aux travaux de Léonard de Vinci.
***Cook, Theodore Andrea, The Curves of Life (1914) p. 420, Courier Dover Publications*

Différentes appellation du Nombre d'Or
1 - Nombre scandaleux car irrationnel (Platon)
2 - Proportion d'extrême et moyenne raison (Euclide)
3 - Proportion d'Euclide (Fibonacci)
4 - Section dorée (sectio aurea, Vinci)
5 - Divine proportion (selon Pacioli)
6 - Section d'or (der goldene Schnitt, Zeising)
7 - Nombre d'Or (fixé par Ghyka)
8 - Phi (φ - expression mathématique, Theodore Cook)
9 - Proportion dorée (selon l'usage courant)
anglais : Golden ratio - allemand : Der goldene Schnitt

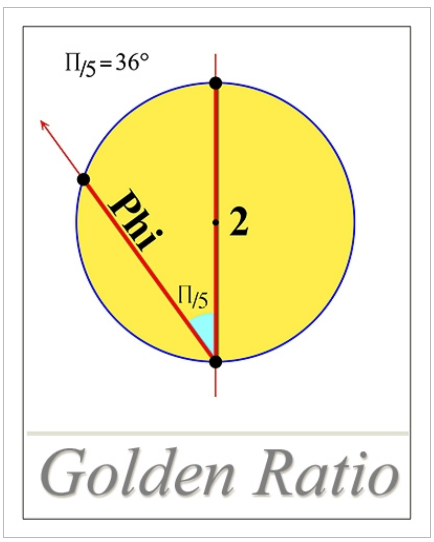
Construction géométrique du Nombre d'Or



<•— La figure ci-contre est la plus classique de la construction du Nombre d'Or. On y voit notamment la base de Phi : La diagonale d'un double carré introduit la racine du cinq : √5.

Un simple report de compas ajoute √5/2 au 1/2 du carré initial de coté 1. Ce qui donne :

$$\varphi = (1+\sqrt{5}) \div 2$$
$$\approx 1,618\ 034\ \ldots$$



<•— Ci-contre : Cette deuxième méthode de construction n'est pas connue. Vraisemblablement courante dans l'Antiquité, elle repose sur la maîtrise des angles, base de l'Astronomie et de l'Architecture.

En l'occurrence, l'angle de Π/5 (36°) va chercher sur un cercle de diamètre 2 la proportion dorée φ.

Cette figure est à la base des Pentagrammes qui construisent le fameux Polyèdre de Dürer, dans « Melencolia I » (1514).

Le calcul du Nombre d'Or

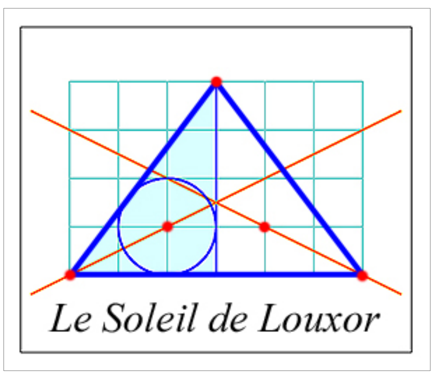
La particularité algébrique du Nombre d'Or est dans l'équation **Phi² = Phi + 1**, et la solution de cette équation est **Phi = (1+√5)÷2 ≈ 1,618 034**… Ce Nombre est irrationnel, en cela qu'aucune division de nombres entiers ne peut l'égaler. Par contre **Phi** (φ) n'est pas transcendant, comme **Π**, puisqu'il est le résultat d'une équation polynomiale **(X² -X -1 = 0)**. Concrètement, cela veut dire que l'on peut construire Phi avec la règle et le compas.

Corrélat de l'équation de base :
1÷Phi = Phi - 1 *(il suffit de diviser les deux branches par Phi)*

◇ L'Histoire et le succès du Nombre d'Or

Le Nombre d'Or est l'objet d'études innombrables et d'enjeux philosophiques, et même politiques, considérables. À l'origine, il a connu deux développements successifs, jusqu'à son identification mathématique. Le premier est purement géométrique, et il est étroitement lié à l'Art : Peinture, Sculpture et Architecture. On le doit aux Égyptiens. Cet aspect sera amplement développé par la suite, au chapitre de la **Géométrie Sacrée du Nombre d'Or**. Le second développement du Nombre d'Or est arithmétique. Les Grecs ont assumé le passage de cette propriété purement géométrique jusqu'à sa définition algébrique (et découvert à cette occasion la difficulté de "calculer l'irrationnel"). D'autres les ont suivi : les Mathématiciens Arabes Al-Khawarizmi et Abu Kamil, puis Léonard de Pise dit "Fibonacci", et enfin Lucca Pacioli, qui fait entrer le Nombre d'Or dans une autre dimension : celle du mythe...

I - De la pratique de la Géométrie au calcul



L'Égypte Antique
Le Soleil offre aux Égyptiens un triangle au Nombre d'Or. Le Solstice de Louxor leur révèle le **Triangle Sacré** : sa bissectrice dorée porte le Nombre d'Or. La **Géométrie Sacrée** se construit sur ce Triangle aux propriétés magiques, et pendant plus de cinq millénaires le Nombre d'Or et le Triangle Sacré vont lier leur sort pour produire les images et les objets du Sacré.

La confusion est grande tant que l'on ignore que la proportion dorée est portée par le Triangle Sacré : en son intimité, sur le Cercle Intime inscrit au triangle. Sans cette coïncidence qui tient du miracle, on ne comprend de la Géométrie que des proportions sans la logique qui les produit. L'harmonie est incomplète.

La Grèce Antique - Pythagore (-580, -497) et Euclide (-325, -265)
Deux grands mathématiciens grecs ont des rapports avec l'Égypte. Pythagore y fait ses classes, au sixième Siècle avant notre ère, et bien plus tard Euclide (-325,-265) y enseigne les mathématiques, sous Ptolémée Ier. La ville où ce fondateur des Mathématiques Modernes finit ses jours n'est autre qu'Alexandrie, lieu de fusion entre les Civilisations.

Euclide est officiellement le premier à évoquer la proportion dorée dans son célèbre ouvrage « Les Éléments » (-300). Il parle de partage entre extrême et moyenne raison *(En géométrie, raison veut dire proportion)*. Le Nombre d'Or n'est encore qu'une propriété géométrique.

Dans cet esprit, les Pythagoriciens se seraient investis bien avant lui dans la construction du dodécaèdre de façon empirique, mais l'Historien des Sciences Thomas L. Heath attribue la paternité de la découverte à Platon : *« L'idée que Platon commença l'étude (du Nombre d'Or) comme sujet intrinsèque n'est pas sans consistance... »*. À ce sujet, Platon doit beaucoup à l'influence de son précepteur, le mathématicien Théodore de Cyrène, qui montre notamment l'irrationalité de √5, donc celle du Nombre d'Or.

En fait, les Grecs formalisent par l'arithmétique au fil des siècles, ce que les Égyptiens pratiquaient avant eux avec leur Géométrie empirique. Dans cette conquête, ils se heurtent au problème de l'**irrationnel** - dont la première approche est la notion de *nombres incommensurables*, la pierre d'achoppement des Pythagoriciens. L'ambition de la Science est de mesurer les choses. Les Mathématiques ont inauguré ce défi.

Des erreurs de traduction et d'interprétation des textes venant des Grecs peuvent expliquer une certaine confusion autour du Nombre d'Or. Ils employent deux termes pour désigner les proportions : *symmetria* et *proportio*, leur signification varie selon le domaine considéré, Art ou Géométrie. Cependant, le propos de cet article n'est pas linguistique au sens littéraire. Il est une des étapes dans la compréhension du langage de l'Image, qui peut-être un jour aura sa propre linguistique...

Les Arabes - Al-Khawarizmi (783, 850) et Abu Kamil (850, 930)
Pour ces deux Mathématiciens, le Nombre d'Or n'est encore que la solution algébrique à des problèmes parmi d'autres. Une sorte de distance se manifeste entre le monde du calcul et le monde de la pratique géométrique où est né le Nombre d'Or.

Léonardo Pisano, dit Fibonacci (1175-1250)**
Le mathématicien et commerçant **Fibonacci** propose une suite de nombres entiers. Il s'inspire des travaux d'Abu Kamil, dont il précise la relation avec la "proportion d'Euclide". En revanche, il ne perçoit pas encore que la limite de sa suite comme étant le Nombre d'Or :

La Suite de Fibonacci
0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 …
Chaque nombre est la somme des deux précédents.
La division de ce nombre par le précédent se rapproche de Phi au fur et à mesure que la liste s'allonge (tend vers l'infini). Phi est désigné comme "limite" de la suite.

****** C'est ce même Fibonacci qui impose le Zéro à l'Europe en 1202, également dans son livre « **Liber Abaci** ». Il s'adresse plus particulièrement aux commerçants, pour qui* *cette nouvelle numération est un formidable gain de temps. Les Babyloniens auraient pratiqué le zéro au moins deux siècles avant Jésus Christ. Puis on trouve le chiffre en Inde, à Brahmagupta, au VIIème siècle, et plus tard dans un monde arabe en pleine expansion (il nous transmettra ses chiffres). Le mathématicien Gerbert d'Aurillac assume le passage de l'an mille comme Pape sous le nom de Sylvestre II, mais il échoue à introduire ce « cinq moins cinq ». Le zéro reste objet de suspicions au delà du XIIIème Siècle, essentiellement du fait de ses voyages et "origines"*...

Gros plan sur la Renaissance

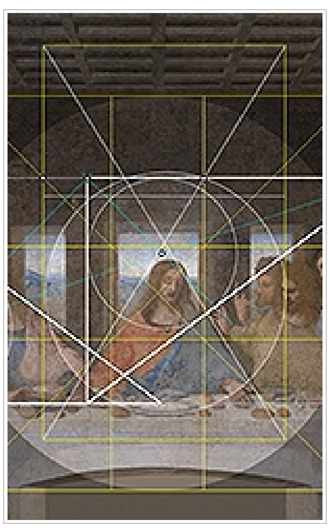
Luca Pacioli (1445-1517) *dit Luca di Borgo*

Ce célèbre Professeur et ami intime de Vinci publie à Venise, en 1509, « De Divina Proportione ». Cet ouvrage est écrit à Milan, entre 1496 et 1498, et comporte des illustrations de Léonard de Vinci, et les gravures pourraient être de la main d'Albrecht Dürer (Vinci n'était pas graveur). « De Divina Proportione » comporte une étude sur le Nombre d'Or, son application dans l'architecture et la peinture et une étude des polygones semi-réguliers. C'est donc le premier a aborder le Nombre d'Or sous tous ses aspects.

NB : Dans la même ville, durant la même année, Luca Pacioli publie une édition en latin des « Éléments » d'Euclide.

Léonard de Vinci (1452-1519)

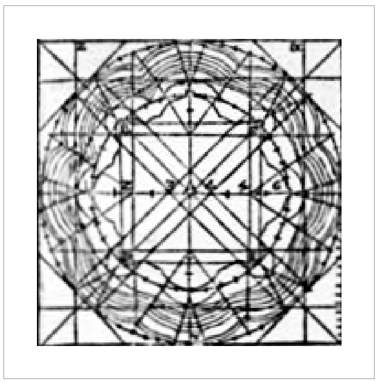
Vinci réfléchit aux proportions idéales du corps humain, basées sur le nombre d'or qu'il désigne par *sectio aurea.* En 1492, il réalise le fameux "Homme de Vitruve" qui illustrerait la divine proportion, mais reste sur ce point sujet à controverse. Il mentionne la divine proportion dans son Traité de Peinture *(La première édition du **«Tratatto della Pittura»**, parue en 1651, en italien puis en français, est basée sur une copie du Codex Urbinas latinus 1270 que possédait Cassiano Dal Pozzo)*



Comme nombre des artistes de son temps, Vinci met en oeuvre toute une Géométrie Sacrée dans sa Peinture. Le Nombre d'Or y occupe une place importante, mais il ne faut pas réduire la dimension d'un Système de valeurs à une simple logique de proportions.

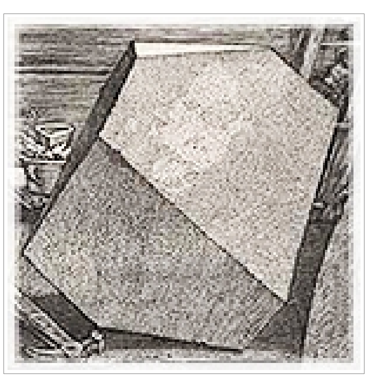
La redécouverte « De Architectura » de Vitruve (Ier Siècle av J-C)

« De Architectura » (en français « au sujet de l'architecture ») est un traité d'architecture en latin de Vitruve, écrit vers 25 av J-C, dédié à l'empereur Auguste. C'est la source majeure de connaissance sur les méthodes et techniques des Romains pour leurs aqueducs, palais, thermes, ports, etc., mais auss machines, outils et instruments de mesure. On y trouve aussi la célèbre histoire d'Archimède et de sa baignoire. Unique texte qui nous soit parvenu de l'Antiquité sur l'Art de construire, il sert de référence à l'Architecture Occidentale depuis la Renaissance et jusqu'à la fin du XIXème Siècle. Selon Petri Liukkonen (2008), ce texte a profondément influencé Leon Battista Alberti (1404-72), Leonard De Vinci (1452-1519), et Michel-Ange (1475-1564). Et aux dix volumes de « De Architectura » ne succèderont que ceux d'Alberti, en 1452.



Il faut souligner que Vitruve ne fait nulle part référence à Euclide et ses "Eléments". Il présente des fractions architecturales comme 2/3 (=0.666...) et 3/5 (=0.600...) ainsi que le rapport 5/8, qui sont symboliquement liées au Nombre d'Or puisqu'ils reprennent un à un les éléments de la suite de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., Fn = Fn–1+Fn–2) et s'accrochent ainsi au mythe. Autre fait important : dès le XVIème Siècle, il est prouvé que le rapport entre les éléments successifs de la suite tend, à l'infini, vers le Nombre d'Or. Cette considération n'est pas possible ni conforme à l'objectivité de Vitruve. Ses éditeurs zélés ont introduit cette notion à la Renaissance. En bon ingénieur romain, Vitruve énonce des principes réalistes et pratiques qui se passent de la dimension "Spirituelle" des Égyptiens et des Grecs à leur l'apporche du Nombre d'Or.

En résumé, à la Renaissance, l'avancée de l'Arithmétique permet aux Architectes et aux Peintres de VOIR ce Nombre d'Or, et donc de prolonger le discours de Vitruve. Sa redécouverte est un catalyseur pour la lignée des Pacioli, Alberti et tous les artistes de la Renaissance. Ils se ressourcent dans une Géométrie Sacrée qu'en plus de pratiquer, ils peuvent désormais comprendre par l'Arithmétique. Quatre villes italiennes sont à retenir pour cet élan : Milan, Venise, Florence et Ferrare (qui se cachait dans l'ombre de sa soeur si brillante).



Albrecht Dürer (1471-1528)

Il n'est pas une ligne de cet article qui ne se soit nourrie des leçons d'Albrecht Dürer. Le maître absolu de la Géométrie Sacrée était, de tous les artistes de la Renaissance, celui qui en savait de plus sur le Nombre d'Or. L'Histoire ne retient souvent de lui que image d'un pionnier du Système Perspectif et d'un Professeur de Dessin publiant à l'intention d'humbles manuels... Cependant, ses oeuvres ont résisté à toute analyse géométrique jusqu'à ce que la **Géométrie Comparée** s'en préoccupe. Dürer représente un courant de pratique qui prend sa source sur le Nil bien avant les pyramides, et il en signe l'achèvement par la production d'une véritable Encyclopédie Symbolique : les Tarots de Marseille (modèle de Nicolas Conver). Ses démonstrations permettent de comprendre le rôle réel du Nombre d'Or au coeur du Système de Composition de la Géomérie Sacrée.

Johannes Kepler (1571-1630)
La proportion divine ou dorée est symbolisée par le dodécaèdre, synthèse géométrique de cette relation (le dodécaèdre rassemble 12 pentagones). Johannes Kepler trouve Dieu dans cette expression du Nombre d'Or, et il fonde la Science à Prague à partir de cette révélation.

II - Le développement d'un mythe

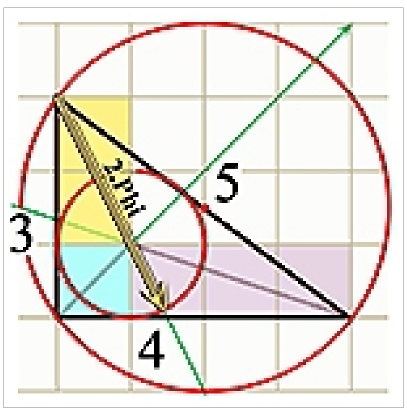
Adolf Zeising (1810-1876)
Ce Docteur en philosophie allemand inaugure le terme de "section d'or" (der goldene Schnitt), autre expression du Nombre d'Or, pour en promouvoir l'importance esthétique, mythique et mystique, en Art et Architecture.

Matila Costiescu Ghyka (1881–1965)
Ce prince, ingénieur et diplomate roumain, s'appuie sur les travaux d'Adolf Zeising et de Gustav Theodor Fechner (physicien) pour établir ce qui deviendra le mythe du Nombre d'Or. Il en fixe d'ailleurs l'appellation. Cette proposition est vivement combattue du fait de ses dérives ethno-centriques. Le Nombre d'Or se retrouve improprement rattaché à un processus colonialiste qui cherche ses alibis. Il n'en demeure pas moins que l'ouvrage « Le Nombre d'Or »** reste une référence quant à la dimension spirituelle qui le caractérise.
***« Le Nombre d'Or », Matila C. Ghyka, Gallimard, 1931 (renouvellé en 1959 et réédité)*

Les artistes du XXème Siècle
L'Art du XXème Siècle reprend à son compte essentiellement cette dimension mythique à des fins médiatiques et commerciales. La grande Culture du Sacré est oubliée, et il n'en reste que le principe de multiplication répétée du Nombre d'Or. Les artistes de la ***Section d'or*** y voient la porte de l'harmonie : Léger, Kupka, Duchamp, Jacques Villon, etc. Ensuite Lecorbusier avec son *modulor (1946)* reprend le même principe, et plus tard Dali, qui utilise le rectangle d'or dans un tableau : « Demi - tasse géante volante, avec annexe inexplicable de cinq mètres de longueur »... Cette humour nous fera-t-il oublier l'oubli ?

Roger Penrose
Néanmoins, dans les années 70, Roger Penrose met au point une méthode de pavage très intéressante. Ce procédé a, il faut le souligner, des précédents au Moyen-Age, à la mosquée de Darb-i Imam à Isfahan, et aussi dans les dessins d'Albrecht Dürer. Ceux-ci peuvent eux-même être mis en connexion avec le travail de Johannes Kepler** ! Albrecht Dürer va, rappelons-le, bien au-delà de la pratique qu'on lui connaît de ce Nombre d'Or, et il le démontre dans deux de ses grands travaux: son **triptyque de gravures** autour de « Melencolia I », 1514, et la version idéale des **Tarots de Marseille**, celle que Nicolas Conver perpétue jusqu'en 1760. Ces deux pans de la création de Dürer sont intimement liés, et le Nombre d'Or est une des clés de leur composition.
** *« Dürer-Kepler-Penrose the development of pentagonal tilings »*
Luck R., Mat. Sci. Eng. 294-6, année 2000, 263-7.

III - La place initiale du Nombre d'Or



Pour le peintre, le nombre d'Or n'est pas le résultat d'un calcul, mais une particularité géométrique. Si le mathématicien sait que l'angle de 36° sur le cercle lui donne la proportion dorée, c'est pour lui un constat. Il ne bâtit pas de vaste théorie sur cette propriété. En revanche, cette figure élémentaire de la Géométrie peut servir le peintre dans sa façon de construire une oeuvre.

Le Nombre d'Or dans la Grèce Antique
Ainsi les Grecs développent brillamment les Mathématiques sans qu'aucune conséquence ne se manifeste dans leur Peinture. Ils sont Mathématiciens avant d'être Peintres, et leur production se consacre essentiellement à la décoration d'objets usuels - plats, vases etc. Ces surfaces capricieuses rendent improbable la mise en oeuvre d'un système de composition complet avec son exigeante précision. En revanche, la Sculpture Grecque et surtout l'Architecture dépassent sans doute les mises en proportions et les canons disciplinés qu'on leur attribue. Si les développements sophistiqués de l'Art Sacré propres au Moyen-Âge ne sont pas encore là, l'héritage des Égyptiens l'est toujours. La Géométrie Comparée trouvera sur ce champ de nombreuses possibilités d'étude.

Le Nombre d'Or et l'Égypte Antique
Les premiers a utiliser explicitement la proportion dorée sont les Égyptiens, et leur

civilisation ne commence pas par édifier des pyramides : des millénaires précèdent cette apothéose *Page consacrée au Sphinx de Gizeh*. Les artistes comme les architectes égyptiens ne disposent manifestement pas des mathématiques que produisent les Grecs par la suite. Pythagore et Euclide en auraient parlé. Ils apprennent là-bas les figures magiques qui fondent la Géométrie Sacrée, une pratique qu'ils ne dénigrent pas mais qu'ils prolongent au contraire de leur réflexion. Les Égyptiens pratiquent avec leurs mains un Nombre d'Or que les Grecs traduisent par la pensée. Bien plus tard, les Byzantins** unissent ces deux approches dans leurs Icônes, jusqu'à établir des modèles que les Orthodoxes Russes reprendront pour leur apporter le mouvement. Notamment **Rublev**, avec un grand système de triangles planétaires...

** *Les moines byzantins sont les seuls en Europe à lire le grec au Moyen-Age. Dans « Le matin des mathématiciens » (Ed. Belin, Paris, France - 1985), M. Caveing et E. Noel établissent ceci : « les mathématiques grecques ont survécu grâce aux moines byzantins qui, contrairement aux moines occidentaux, lisaient les auteurs grecs dans le texte. Au Moyen Age, les mathématiques étaient pratiquement abandonnées jusqu'à l'arrivée des Arabes à Bagdad »*

Les Mégalithes et le Nombre d'Or

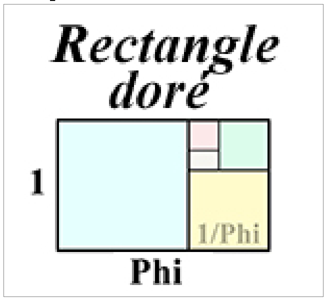
La Géométrie du Nombre d'Or se traduit par plusieurs figures de référence.
- Ses rectangles associés permettent de dessiner une première spirale.
- Le Pentagramme.
- **Le Triangle d'Or**, issu du Pentagramme dont on ne garde d'une pointe. Ce triangle est aussi associé à une spirale et ses grands cotés ont la mesure de la base multiplié par Phi, le Nombre d'Or. Cette figure du Triangle d'Or est explicite sur le **site Mégalithique** du Mont-Saint-Michel**. Les Égyptiens ne sont donc pas les seuls à pratiquer le Nombre d'Or à la période du Néolithique. Si aucune trace du Triangle Sacré ni de son quadrillage associé ne se sont révélés, d'autres notions de Géométrie comme l'Hexagramme font leur apparition sur cette toile de neuf cents kilomètres carrés !

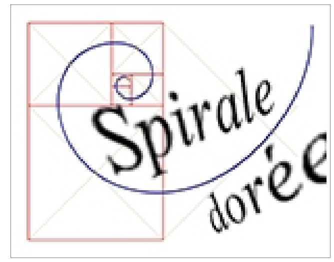
** *Christophe de Cène lui consacre une **étude complète**.*

◇ Les figures classiques du Nombre d'Or

Le succès du Nombre d'Or est légitime. Il n'est pas transcendant au sens mathématique, et justement parce qu'il est à la portée du compas et de la règle, il participe à construire un langage de l'image - au sens strict.

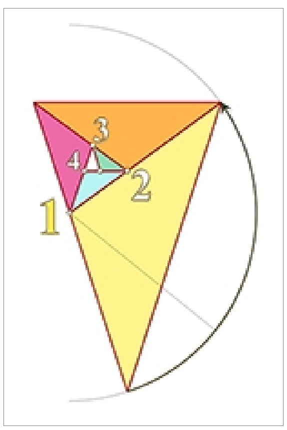
• **La présentation classique du Nombre d'Or**





Rectangles doré — Dévéloppement doré — Spirale dorée

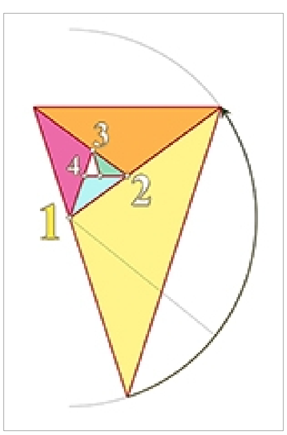
C'est ainsi que l'on a pris l'habitude de présenter le Nombre d'Or. Tout rectangle doré en engendre un autre quand on lui retire un carré - et réciproquement. La courbe qui joint les centres de tous les carrés est appelée Spirale dorée. Deux sens sont possibles à partir du même rectangle initial.



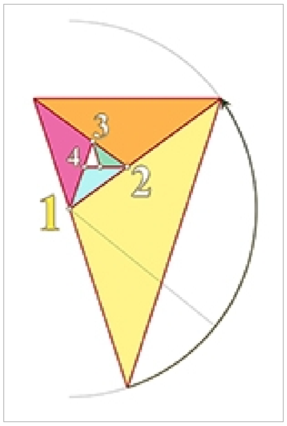
• **Le Triangle d'Or**

<•— Ci-contre : Les proportions du Triangle d'or sont : un petit coté de valeur relative 1, pour deux grands de valeur Phi. Il est aigu. Le Triangle d'Argent est formé de deux petits cotés de valeur 1 par rapport à un grand de valeur Phi. Il est obtus. Sur le visuel, le grand Triangle d'Or se décompose en une série décroissante de Triangles d'Argent.

L'angle aigü est de 36° (∏/5) et l'angle obtus est du double : 72° (2∏/5). Cette figure liée au 5 symboliquement et à sa racine est la pointe du Pentagramme, étoile à cinq branches.



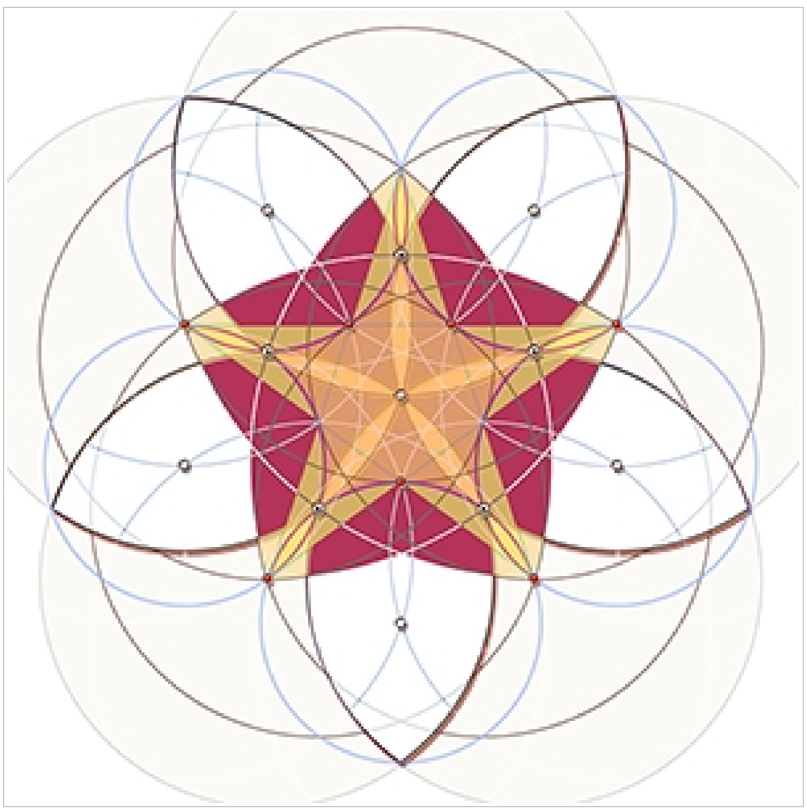
<•— Ci-contre : Les sommets notés 1, 2, 3, 4 etc. sur la figure précédente permettent de tracer un arc de cercle qui se lie au suivant. Ces arcs liés par les sommets des triangles d'argent engendrent une courbe qui n'est pas tout à fait régulière du fait du changement brutal du rayon de courbure à chaque point où l'on plante le compas.



<•— Ci-contre : Une fois corrigée, cette courbe devient une magnifique Spirale dorée. Dans la composition des Tarots, elle prend le nom de Spirale du Coeur, pour souligner son origine sur toutes les cartes.

La Spirale dorée parle de l'énergie et du temps. Le temps cyclique et solaire qui tourne en boucle, et le temps saturnien qui avance inexorablement. La courbe relie des points essentiels de la composition, ceux qui participent au mouvement et expriment la force active, suivie d'un effet réel. La Spirale dorée montre le développement de l'énergie dans l'action, le déploiement d'un principe initial.

• **Le Pentagramme** et développements dorés (modules) de Rublev et Dürer seront l'objet d'un futur article.



Le Pentagramme