Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Caraş-Severin

REVISTA DE MATEMATICĂ

A ELEVILOR ŞI PROFESORILOR

DIN JUDEŢUL CARAŞ-SEVERIN

Nr. 27, An X-2009

Editura „Neutrino”
Reşiţa, 2009

Titlul: Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din judeţul Caraş-Severin
I.S.S.N. 1584-9481

Mobil: 0741017700
www.neutrino.ro
E-mail: editura@neutrino.ro

CUPRINS

Proverbe şi ziceri româneşti

☺ Toată ziua doarme şi noaptea spune că-i obosit.

☺ Toţi sapă, da' el duce câinii la apă.

☺ Trestia care se pleacă vântului nu se frânge niciodată.

☺ Vorbele nu potolesc foamea.

☺ Acul e mic, dar coase haine scumpe.

☺ Şi în colibe se nasc oameni mari.

☺ Şi marea are fund.

☺ Şi stafida e uscată, dar dulceaţa nu şi-o pierde.

☺ Rău faci, rău găseşti.

☺ Românul ştie multe-a suferi, dar nu uită.

☺ Să cumperi şaua după cum e calul.

☺ Să înveţi pentru tine, dar să ştii şi pentru alţii.

☺ Să nu fii uşor la limbă şi greu la fapte.

☺ Să nu te ruşinezi a învăţa şi de cel mai mic.

☺ Pot opri vântul, apele şi gurile oamenilor ?

Principiul invarianților

Adriana şi Lucian Dragomir

Ne propunem în rândurile următoare să prezentăm o tehnică destul de cunoscută, folosită în rezolvarea problemelor în care se dă un obiect matematic sau mai multe(numere, mulțimi, puncte,etc.) asupra cărora se efectuează anumite transformări şi se cere, de obicei, să se arate că în final obiectele nu pot ajunge la o anume formă. Se impune în acest cadru descoperirea unei caracteristici care nu se schimbă, care rămâne la fel, care este *invariantă*, numit aşadar *invariantul transformării.* Dacă obiectul final nu posedă această proprietate, atunci el nu poate fi obținut în acea formă în urma transformărilor succesive. Evident, această metodă, acest principiu, poate fi, credem, cel mai bine înțeles, prezentând câteva exemple:

Problema 1. Într-un tabel cu 5 linii şi 5 coloane se scriu numerele $1, 2, 3, ..., 25$. Pot fi schimbate locurile acestor numere astfel încât să ajungem ca în fiecare coloană suma unor numere să fie egală cu suma celorlalte numere(din acea coloană) ?

(Concurs Rusia)

Soluție: Invariantul oricărei transformări este suma tuturor numerelor din tabel, care este egală cu $1+2+3+...+25=\frac{25\cdot 26}{2}=325$ (număr impar); dacă am obține o aşezare ca în enunț, suma numerelor de pe fiecare coloană ar fi un număr par şi astfel suma numerelor de pe toate coloanele, adică a tuturor numerelor din tabel, ar fi număr par, contradicție. □

Problema 2. Grădinarul regelui a sădit un *pom minune* în care sunt 25 de mere şi 20 de pere. În fiecare zi el culege din pom, pentru fetele regelui, câte două fructe; imediat, în pom creşte un alt fruct. Dacă grădinarul culege două fructe de acelaşi fel, atunci în loc creşte o pară, iar dacă rupe două fructe diferite, creşte în loc un măr. Care este ultimul fruct din *pomul minune* ?

Soluție: Invariantul transformării este numărul impar de mere care rămâne oricum după orice transformare (dacă rupem două mere, rămân 23 mere, dacă rupem fructe diferite, rămân 25 mere, etc.).Aşadar, ultimul fruct care va rămâne va fi măr. □

Problema 3. Numerele 1 , 2 , 3 , ... , 100 sunt scrise pe 100 de bilețele (câte un număr pe fiecare bilețel). Se aleg la întâmplare două bilețele şi în locul lor se pune un bilețel pe care este scris modulul diferenței numerelor de pe cele două bilețele(cele două bilețele se aruncă). Procedăm la fel cu cele 99 de bilețele care se obțin , ş.a.m.d. până când rămâne un singur bilețel. Ce paritate are numărul scris pe acest bilețel ?

RMT

Soluție: Observăm că la o astfel de *operație* , numerele a şi b $(a>b)$ se înlocuiesc cu $a-b$. Deoarece $a+b$ şi $a-b$ au aceeaşi paritate, deducem că orice *operație* lasă neschimbată paritatea sumei elementelor (astfel, dacă în mulțimea M suma elementelor este m , iar în urma unei *operații* ca şi cea din enunț se obține mulțimea N având suma elementelor n, avem că m şi n au aceeaşi paritate). Deoarece mulțimea inițială are suma elementelor egală cu $101\cdot 50$, numărul care se obține în final este par. □

Problema 4. Un cerc este împărțit în şase sectoare, apoi numerele 1, 0, 1, 0, 0, 0 sunt scrise, în această ordine, în sectoarele considerate. La fiecare pas se pot mări cu 1 exact două numere din sectoare vecine. Este posibil ca după câțiva astfel de paşi să obținem şase numere egale?

Soluție: Dacă notăm cu $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ numerele care apar la un moment dat în sectoare, numărul $k=n_1-n_2+n_3-n_4+n_5-n_6$ este invariant. Deoarece inițial $k=2$, evident că nu se poate obține în final $k=0$. □

Problema 5. Zmeul din poveşti are 33 de capete. Fii împăratului verde încearcă să-l răpună. Dacă fiul cel mic îi taie dintr-o lovitură 3 capete zmeului, acestuia îi cresc la loc 7 capete, dacă cel mijlociu taie 6 capete dintr-o lovitură, zmeului îi cresc la loc doar 4 capete, iar dacă fiul cel mare taie odată 9 dintre capete, zmeului îi cresc 3 capete în loc. Evident, zmeul este răpus dacă rămâne fără niciun cap. Este posibil ca, prin mai multe astfel de lovituri, fii de împărat să răpună zmeul ?

RMCS

Soluție: Să observăm că, prin orice lovitură aplicată, numărul de capete cu care rămâne zmeul este impar, deci zmeul nu poate fi(din păcate) răpus(în acest mod).□

Problema 6. Se consideră mulțimea $M=\{1,2,3,...,2008\}$ a tuturor numerelor naturale nenule mai mici sau egale cu 2008. Mulțimea *M* se modifică prin transformări succesive numite *pași*. Un *pas* înseamnă înlocuirea unor elemente ale mulțimii *M* cu restul obținut prin împărțirea sumei acestor numere la 29. Să se determine numărul *x*, dacă, după câțiva *pași*, mulțimea ajunge să fie $M=\{x,2007\}$.

(Concurs T.Lalescu, 2008)

Soluție: Invariantul este restul dat prin împărțirea la 29 a sumei

$$1+2+3+...+2007+2008=\frac{2008\cdot 2009}{2}=1004\cdot 2009=(29\cdot 34+18)\cdot(29\cdot 69+8).$$

Restul despre care vorbim este deci restul împărțirii la 29 a numărului $18\cdot 8=144=29\cdot 4+28$, deci este 28. Folosind teorema împărțirii cu rest, avem că orice număr nou apărut printr-un *pas* este mai mic decât 28. Așadar $x+2007$ dă prin împărțire la 29 restul 28 și, cum $29\cdot 69=2001, 29\cdot 70=2030$, deducem că unicul cât posibil este 69; imediat ajungem la $x=22$. □

Problema 7. Se consideră numerele 3, $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$ și se fac transformări succesive asupra lor, numite *pași*. Un *pas* constă în scrierea a trei numere noi, obținute prin înlocuirea fiecăruia din cele inițiale cu semisuma celorlalte două. Studiați dacă după un număr de *pași* se poate ajunge la numerele 2, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$.

Soluție: După cum ne-am obișnuit, căutăm invariantul transformării și remarcăm că după un *pas*, din numerele a,b,c cu suma $a+b+c$, se obțin numerele $\frac{b+c}{2},\frac{c+a}{2},\frac{a+b}{2}$, care au suma tot $a+b+c$. Deoarece suma numerelor inițiale este 5, iar a celor propuse în final este 6, răspunsul este din nou negativ. □

Problema 8. În sistemul de axe de coordonate xOy, din punctul $M(x,y)$ se face o deplasare într-unul din următoarele patru puncte: $A(x-1,y-1), B(x-1,y+1), C(x+1,y-1), D(x+1,y+1)$. Studiați dacă din punctul $(0,0)$ se poate ajunge în punctele $(2009,2005)$ și $(2008,2009)$.

Soluție: Observăm că un punct (x,y) cu suma coordonatelor $x+y$ număr par se poate deplasa într-un punct cu suma coordonatelor tot număr par: a) $x+y-2$ este par, b) $x+y$ este par, c) $x+y$ este par, d) $x+y+2$ este par. Deoarece $(2008,2009)$ are suma coordonatelor număr impar, nu se poate ajunge la el pornind din origine. Pe de altă parte, avem:

$$(0,0)\xrightarrow{c)}(1,-1)\xrightarrow{c)}(2,-2)\xrightarrow{d)}(3,-1)\xrightarrow{d)}(4,0)\xrightarrow{d)}(5,1)\xrightarrow{d)}...\xrightarrow{d)}(k+4,k)\xrightarrow{d)}(2009,2005)$$

Problema 9. Un triplet (a,b,c) de numere strict pozitive se transformă după un *pas* în tripletul $\left(\frac{b}{c},\frac{c}{a},\frac{a}{b}\right)$. Să se studieze dacă, după un anumit număr de *pași*, se poate obține din tripletul $\left(3,\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$, tripletul $\left(6,\frac{1}{4},\frac{4}{3}\right)$.

Soluție: Remarcăm că,dacă tripletul inițial are produsul componentelor $abc=1$, după un pas produsul componentelor rămâne oricum $\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=1$. Răspunsul este deci negativ. □

Bibliografie:

1) Mircea Ganga – Probleme elementare de matematică, Ed.Mathpress, 2003
2) Vasile Serdean și colectiv – Matematică pentru grupele de performanță, Ed.Dacia, 2004
3) Colecția RMT 1990 – 2008

Profesori, Grup școlar Oțelu – Roșu

Puncte importante în triunghi

3. Centrul de greutate

Marina Constantinescu şi
Mircea Constantinescu

Un alt punct important într-un triunghi este centrul de greutate al acestuia. Admitem cunoscut următorul rezultat:

Teoremă. Într-un triunghi medianele sunt concurente.

Definiţie. Punctul de intersecţie a medianelor unui triunghi se numeşte centrul de greutate al triunghiului. Acesta este caracterizat prin următoarea proprietate:

Teoremă. Dacă $[AM],[BN]$ şi $[CP]$ sunt medianele unui triunghi ABC şi G este centrul de greutate al acestuia atunci $AG=2GM, BG=2GN$ şi $CG=2GP.$

Vom prezenta în continuare câteva aplicaţii ale acestor rezultate.

Problema 1. Fie un triunghi oarecare ABC. Pe perpendicularele în A,B,C pe planul triunghiului se consideră de aceeaşi parte a planului (ABC) punctele A',B' respectiv C'. Să se arate că dacă G şi G' sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC respectiv $A'B'C'$ atunci $GG'\perp(ABC)$ şi $3GG'=AA'+BB'+CC'.$

Soluţie. Fie M,M' mijloacele segmentelor $[BC]$ respectiv $[B'C']$. Atunci $G\in AM, G'\in A'M'$ şi $AG=2GM, A'G'=2G'M'$. Cum MM' este linie mijlocie în trapezul $BB'C'C$ rezultă că $MM' \parallel BB' \parallel AA'$. Fie $M''\in MM'$ astfel încât $A'M'' \parallel AM$ şi $G''\in A'M''$ astfel încât $A'G''=2G''M''$. Atunci $AA'M''M$ este paralelogram deci $A'G''\parallel AG$ şi $A'G''=AG$, deci $AA'G''G$ este paralelogram şi atunci $GG''\parallel AA'$.

Cum $\dfrac{A'G''}{G''M''}=\dfrac{A'G'}{G'M'}$ obţinem că $G''G'\parallel M''M'\parallel AA'$ deci $G''\in GG'$ şi $GG'\parallel AA'$ deci $GG'\perp(ABC)$. Apoi $GG'=GG''\pm G''G'=$
$AA'+\frac{2}{3}\left(MM'-AA'\right)=AA'+\frac{2}{3}\left(\frac{BB'+CC'}{2}-AA'\right)=\frac{AA'+BB'+CC'}{3}.$

Problema 2. Într-un tetraedru oarecare notăm cu S suma lungimilor celor patru mediane ale tetraedrului şi cu s suma lungimilor celor douăsprezece mediane ale feţelor tetraedrului. Atunci $9S<4s.$

Soluţie. Reamintim că o mediană a unui tetraedru este un segment ce uneşte un vârf al tetraedrului cu centrul de greutate al feţei opuse. Să considerăm aşadar un tetraedru $ABCD$ şi fie G_D centrul de greutate al feţei ABC iar A_1,B_1,C_1 mijloacele muchiilor $[BC],[AC]$ respectiv $[AB]$. Avem:

$$DG_D<DA_1+A_1G_D=DA_1+\frac{1}{3}AA_1$$

$$DG_D<DB_1+B_1G_D=DB_1+\frac{1}{3}BB_1$$

$$DG_D<DC_1+C_1G_D=DC_1+\frac{1}{3}CC_1$$, de unde prin însumare se obţine că

$$DG_D<\frac{1}{3}\left(DA_1+DB_1+DC_1\right)+\frac{1}{9}\left(AA_1+BB_1+CC_1\right).$$

Prin însumarea inegalităţii de mai sus cu celelalte trei inegalităţi corespunzătoare celorlalte trei mediane ale tetraedrului vom obţine că $S<\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)s \Leftrightarrow 9S<4s.$

Problema 3. Fie un trapez $ABCD$ cu bazele $AB=20, CD=10$ şi diagonalele $AC=18, BD=24.$ Să se determine aria trapezului.

Soluţie. Fie $\{O\}=AC\cap BD$ şi $\{E\}=AD\cap BC.$ Cum $DC=\frac{1}{2}AB$ rezultă că DC este linie mijlocie în $\triangle EAB$ şi atunci DB, AC sunt mediane în acest triunghi, deci O este centrul de greutate al triunghiului $EAB.$ Atunci $AO=\frac{2}{3}AC=12, BO=\frac{2}{3}BD=16.$ Cum $AO^2+BO^2=AB^2$ rezultă că $AC\perp BD$ deci aria trapezului este $\frac{1}{2}AC\cdot BD=216.$

Problema 4. Fie $ABCD$ un paralelogram în care $BD \perp DA$ şi $AC \cap BD = \{O\}$. Prin mijlocul M al segmentului $[AO]$ se duce $EF \parallel BD, E \in BC, F \in CD$. Demonstraţi că $FC = 3EO$.

Soluţie. În triunghiul CBD, CO este mediană şi cum $EF \parallel BD$ obţinem că CM este mediană în triunghiul CEF. Pe de altă parte $CO = 2MO$, deci O este centrul de greutate al triunghiului CEF. Din $EF \parallel BD, EC \parallel AD, BD \perp DA$ rezultă că triunghiul CEF este dreptunghic în E. Dacă $\{N\} = EO \cap CF$ obţinem că EN este mediană în $\triangle CEF$ şi cum $EN = \frac{1}{2}CF$ se obţine că $EO = \frac{2}{3}EN = \frac{1}{3}CF$, de unde concluzia.

Problema 5. În triunghiul ABC se consideră A', B', C' mijloacele segmentelor $[AH], [BH]$ respectiv $[CH]$, unde H este ortocentrul triunghiului, iar A_1, B_1, C_1 punctele diametral opuse vârfurilor A, B respectiv C în cercul circumscris triunghiului ABC. Să se arate că dreptele A_1A', B_1B', C_1C' trec prin centrul de greutate al triunghiului ABC.

Soluţie. Fie O şi G centrul cercului circumscris respectiv centrul de greutate al triunghiului ABC.
Cum $BH \perp AC, A_1C \perp AC$ rezultă că $BH \parallel A_1C$. Analog $CH \parallel A_1B$ deci $BHCA_1$ este paralelogram şi fie A_2 mijlocul segmentelor $[BC]$ şi $[A_1H]$. Cum AA_2 este mediană în $\triangle ABC$ rezultă că $G \in AA_2$ şi $GA = 2GA_2$, deci G este şi centrul de greutate al triunghiului AA_1H, deci $G \in A_1A'$. Analog se arată că $G \in B_1B' \cap C_1C'$.

Problema 6. În triunghiul ABC fie A_1, B_1, C_1 simetricele unui punct O_1 faţă de mijloacele A', B', C' ale laturilor BC, CA respectiv AB ale triunghiului. Să se arate că dreptele A_1A, B_1B, C_1C sunt concurente într-un punct O_2 şi că , dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC atunci $G \in [O_1O_2]$ şi $GO_1 = 2GO_2$.

Soluţie. În triunghiul AO_1A_1, AA' este mediană şi cum $AG = 2GA'$ rezultă că G este centrul de greutate al triunghiului AO_1A_1. Analog G este centrul de greutate al triunghiurilor BO_1B_1 şi CO_1C_1. Fie M mijlocul lui $[AA_1]$. Atunci $G \in O_1M$ şi $GO_1 = 2GM$. Analog dacă N, P sunt mijloacele lui $[BB_1]$ respectiv $[CC_1]$ atunci $G \in [O_1N]$ şi $GO_1 = 2GN, G \in [O_1P]$ şi $GO_1 = 2GP$. Aşadar $M = N = P$ şi deci segmentele $[AA_1], [BB_1], [CC_1]$ au acelaşi mijloc $O_2 = M$.

Prezentăm în continuare un rezultat de caracterizare a centrului de greutate al unui triunghi:

Propoziţie. Se consideră un triunghi ABC şi un punct G în interiorul triunghiului. Atunci G este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă şi numai dacă $S_{\Delta ABG} = S_{\Delta ACG} = S_{\Delta BCG}$.

Soluţie. Fie $\{M\} = AG \cap BC$ şi B', C' proiecţiile punctelor B respectiv C pe dreapta AG. Avem:
$S_{\Delta ABG} = S_{\Delta ACG} \Leftrightarrow BB' = CC' \Leftrightarrow \Delta BB'M \equiv \Delta CC'M \Leftrightarrow BM = CM$, adică G se află pe mediana din A a triunghiului ABC. Analog relaţia $S_{\Delta ABG} = S_{\Delta BCG}$ este echivalentă cu faptul că G se află pe mediana din B a triunghiului ABC.
Din aceste considerente rezultă concluzia.

Problema 7. Pe laturile AB, BC şi CA ale triunghiului ABC se consideră punctele R, P, Q astfel încât segmentele $[AP], [BQ], [CR]$ să se intersecteze într-un punct M. Să se arate că dacă $S_{\Delta AMQ} = S_{\Delta AMR}, S_{\Delta BMR} = S_{\Delta BMP}$ şi $S_{\Delta CMP} = S_{\Delta CMQ}$ atunci M este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Soluţie. Fie $S_1 = S_{\Delta AMR}, S_2 = S_{\Delta BMP}, S_3 = S_{\Delta CMQ}$. Atunci $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AR}{RB} = \frac{S_{\Delta ACR}}{S_{\Delta BCR}} = \frac{2S_1 + S_3}{2S_2 + S_3}$, deci $S_3(S_1 - S_2) = 0$, deci $S_1 = S_2$. De aici se obţine că $AR = RB$, deci CR este mediană în triunghiul ABC. Analog AP este mediană în triunghiul ABC, deci M este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Propunem spre studiu următoarele aplicaţii:

Problema 1. În triunghiul ascuţitunghic ABC notăm cu M mijlocul lui $[BC]$ şi cu D piciorul înălţimii din A.. Fie $G \in [AM]$ şi E proiecţia sa pe $MD, E \in [MD]$. Dacă $BD + BC = 3BE$ atunci G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Problema 2. Fie triunghiul dreptunghic ABC $\left(m\left(\sphericalangle A\right)=90^\circ\right)$ cu catetele b şi c în care $AD \perp BC, D \in \left(BC\right)$, iar G este centrul de greutate al triunghiului ABC. Să se arate că $b = c\sqrt{2} \Leftrightarrow DG \perp AC$.

Problema 3. Fie triunghiul dreptunghic ABC $\left(m\left(\sphericalangle A\right)=90^\circ\right)$, $AB = 2, BC = 2\sqrt{3}$. Fie $E \in \left(AC\right)$ astfel încât $BE = \sqrt{6}$. Să se arate că $AD \perp BE$, unde D este mijlocul lui $\left[BC\right]$.

Problema 4. Se consideră triunghiul echilateral ABC, M mijlocul lui $\left[AB\right]$, D simetricul lui B faţă de C, $BE \perp AC, E \in \left[AC\right]$, $BE \cap AD = \left\{F\right\}$, $AC \cap MD = \left\{G\right\}$. Atunci $ABGF$ este trapez dreptunghic.

Problema 5. Fie un triunghi oarecare ABC. Pe perpendicularele în A, B, C pe planul triunghiului se consideră de aceeaşi parte a planului (ABC) punctele A', B' respectiv C'. Să se arate că dacă G şi G' sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC respectiv $A'B'C'$, iar V este volumul corpului $ABCA'B'C'$ atunci $V = S \cdot GG'$, unde S este aria triunghiului ABC.

Problema 6. Fie H ortocentrul triunghiului ascuţitunghic ABC. Pe semidreptele $\left(HA, \left(HB, \left(HC\right.\right.\right.$ se consideră punctele D, E respectiv F astfel încât $HD = BC, HE = AC, HF = AB$. Să se arate că H este centrul de greutate al triunghiului DEF.

BIBLIOGRAFIE

1.Gh. Ţiţeica- Probleme de geometrie, Editura Tehnică , Bucureşti.
2. N. Agahanov, O. Podlipsky- Olimpiade matematice ruseşti Moscova 1993-2002, Editura Gil, Zalău.
3. Colecţia Gazeta Matematică.

Profesoară Grupul Şcolar Industrial Tismana
Profesor Colegiul Naţional Ecaterina Teodoroiu Tg-Jiu

Asupra problemei VIII.128 din RMCSnr.26

Aurica şi Mihai Lazarov

Credem că merită prezentată şi o soluţie vectorială a problemei amintite, al cărui autor este profesorul Aurel Doboşan şi care are următorul enunţ:

Problemă: Se consideră un cub $ABCDA'B'C'D'$ în care *M* este mijlocul lui *(CD)*, *N* este mijlocul lui $(A'D')$ şi *O* centrul cubului.Să se determine măsura unghiului dintre dreptele *MN* şi *AO.*

Soluţie: Se notează $AB = a$ (lungimea laturii cubului).
Se consideră un reper cartezian ortogonal (în spaţiu) cu originea în *A*, alegând $AD = Ox$, $AA' = Oy$ şi $AB = Oz$.
Astfel, $A(0,0,0)$, $D(a,0,0)$, $C(a,0,a)$, $A'(0,a,0)$, $D'(a,a,0)$, $C'(a,a,a)$.

Cum M este mijlocul segmentului $[CD]$, deducem $M\left(a, 0, \dfrac{a}{2}\right)$;

N este mijlocul segmentului $[A'D'] \Rightarrow N\left(\dfrac{a}{2}, a, 0\right)$.

Aşadar, $\overrightarrow{MN}\left(-\dfrac{a}{2}, a, -\dfrac{a}{2}\right)$. Pe de altă parte, O este mijlocul segmentului $[AC'] \Rightarrow O\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$ de unde rezultă că $\overrightarrow{AO}\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$.

Făcând produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{AO}$, se obţine $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AO} = -\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = 0$, de unde rezultă că $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{AO}$. Deci, dreptele suport sunt perpendiculare şi, în consecinţă, $m(MN, AO) = 90^\circ$.

Profesori, Liceul Teoretic General Dragalina, Oraviţa

Metode de rezolvare a problemelor cu unghiuri în spațiu (III)

Maria Iancu

Unghiul diedru. Unghiul a două plane.

(a). Unghi diedru.

Fie α şi β două semiplane având aceeaşi frontieră (muchie) d. Se numeşte unghi diedru sau diedru cu muchia d şi fețele α, β, reuniunea $\alpha \cup \beta \cup d$. Dacă α_1 şi β_1 sunt planele suport ale lui α, respectiv β, atunci se numeşte interiorul diedrului figura $(\alpha_1 B \cup \beta_1 A)$, unde $A \in \alpha$, $B \in \beta$.

Dacă α este identic cu β, atunci unghiul dintre α şi β se numeşte diedru nul; unghiul dintre α şi β se numeşte diedru plat, dacă α şi β sunt semiplane opuse. În celelalte cazuri unghiul dintre α şi β este un diedru propriu.

Observație. Dacă planele α şi β se intersectează, atunci ele determină patru diedre cu aceeaşi muchie $\alpha \cap \beta$, două câte două opuse (la muchie).

(b). Unghi plan corespunzător unui unghi diedru. Măsura unui unghi diedru.

Definiție. Fie unghiul dintre α şi β un unghi diedru şi d muchia sa. Numim unghi plan al unghiului diedru, valoarea unghiului dintre două semidrepte a, b ambele având originea într-un punct $P \in d$, conținute respectiv în cele două semiplane care formează diedrul şi perpendiculare pe d.

Observație 1. Unghiul plan corespunzător unghiului diedru dintre α şi β nu este unic, dar toate unghiurile plane corespunzătoare unui diedru sunt congruente ca unghiuri cu laturile respectiv paralele.

Definiție. Se numeşte măsura unghiului diedru dintre α şi β, măsura unui unghi plan al diedrului. Două diedre se numesc congruente, dacă ele au aceeaşi măsură.

Observație 2. Fiecare punct $P \in d$ este vârful unui unghi plan al diedrului dintre α şi β, iar măsura unghiului plan corespunzător

diedrului este un număr din $\left[0^0, 180^0\right]$ unic determinat. Perpendicularele în P pe d, conținute în α şi β, sunt laturile unghiului plan cu vârful P al diedrului format de α şi β. Un diedru este drept dacă admite un unghi plan drept. Măsura unghiului diedru nul este egală cu 0^0, iar a unghiului diedru plat este de 180^0.

(c). Unghiul a două plane. Se numeşte unghiul planelor α şi β un unghi diedru determinat de α şi β, care are măsura cuprinsă în intervalul $\left[0^0, 90^0\right]$.

Dacă planul α este identic cu β, sau α este paralel cu β, atunci unghiul planelor este, prin definiție, unghiul nul şi are măsura 0^0.

(d). ***Plane perpendiculare***. Două plane se numesc perpendiculare dacă reuniunea lor conține un unghi diedru drept, respectiv dacă măsura acestuia este 90^0.

(e). Metode. Pentru evaluarea sau determinarea unghiului a două plane dispunem de metode care derivă din definiție şi de metode derivate.

M1). Dacă d este muchia planelor α şi β, se identifică un punct P pe d în care se consideră perpendicularele în P, situate respectiv în planul α şi în planul β, fie ele a şi b; unghiul dintre dreptele a şi b, va fi unghiul dintre planele α şi β.

M2). Se identifică un punct P ale cărui proiecții pe α şi β, M respectiv, N se pot preciza uşor. Se evaluează $\sphericalangle MPN$ care reprezintă suplementul unghiului celor două plane (reamintim că unghiul planelor α şi β este congruent cu unghiul plan al diedrului, dacă acesta nu este obtuz şi cu suplementul acestuia în caz contrar; două plane secante determină patru unghiuri diedre: două au măsura u, iar celelalte două au măsura $180^0 - u$).

M3). Se identifică un triunghi(sau un poligon convex), în planul α a cărui proiecție în planul β este vizibilă. Atunci unghiul planelor α şi β rezultă din $S_1 = S \cdot \cos u$, unde S este aria poligonului ce se proiectează, iar S_1 este aria poligonului-proiecție şi u unghiul celor două plane.

Când unghiul a două plane se determină folosind metodele **M1)** sau **M2),** în rezolvarea acestui tip de probleme se impun parcurgerea unor etape:

(E1). Aflarea muchiei diedrului.

(E2). Construirea perpendicularelor în acelaşi punct pe muchia diedrului.

(E3). Precizarea unghiului celor două plane.

(E4). Încadrarea unghiului într-o figură geometrică, de obicei într-un triunghi.

(E5). Demonstrarea faptului că acel triunghi este dreptunghic (dacă e posibil !).

(E6). Aflarea unei funcţii trigonometrice a acelui unghi.

Dacă triunghiul nu este dreptunghic se construiesc două înălţimi ale acelui triunghi şi folosind relaţia $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$ **se află elementele necesare pentru a putea calcula sinusul unui unghi sau se află direct cosinusul acelui unghi folosind teorema cosinusului.**

(E7). Precizarea măsurii acelui unghi dacă este posibil.

Exemple.

$C_1)$ *Triunghiurile echilaterale* ΔABC *şi* ΔDBC *sunt situate în plane diferite. Să se afle unghiul diedru dintre aceste plane ştiind că distanţa dintre vârfurile* A *şi* D *este egală cu lungimea laturii triunghiurilor.*

Soluţie. Fie $AB = a \Rightarrow AD = a$

(E₁) : $(ABC) \cap (DBC) = BC$ (muchia diedrului)

(E₂) : $AM \perp BC \Rightarrow M$ mijloc $(BC) \Rightarrow DM \perp BC$.

(E₃): $MA \perp BC$, $AM \subset (ABC)$ şi $DM \perp BC$, $DM \subset (DBC)$

$\Rightarrow \sphericalangle((ABC);(DBC)) \equiv \sphericalangle(AM;DM) \equiv \sphericalangle AMD$.

(E₄): ΔAMD

(E₆): $AM = MD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ .Fie $MN \perp AD$ şi $AA' \perp DM$.

ΔAMD : $AD \cdot MN = MD \cdot AA' \Rightarrow a \cdot MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot AA'$ (1).

Cu T.Pitagora în $\Delta AMN \Rightarrow MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Din relaţia $(1) \Rightarrow AA' = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

$\Delta AMA' \Rightarrow \sin(\sphericalangle AMA') = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

(E₇): Unghiul planelor (ABC) şi (DBC) este unghiul al cărui sinus este egal cu $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

$C_2)$ *În cubul* $ABCDA'B'C'D'$ *de latură* a *cm,* M *este mijlocul segmentului* (BB') *, iar* N *este mijlocul segmentului* (BC)*. Să se afle:*

a) Măsura unghiului format de dreptele MN *şi* $A'D$ *.*

b) Măsura unghiului diedru format de planele (DMN) *şi* (ABC)*.*

Soluţie.

$a)$ $(BCC') \parallel (ADD') \Rightarrow$ planul (DMN) "taie" planul (ADD') după o dreaptă ce trece prin D, paralelă cu MN.

MN =l.mij. $\triangle BB'C \Rightarrow MN \parallel B'C$ şi $B'C \parallel A'D \Rightarrow$

$MN \parallel A'D \Rightarrow m\ (\sphericalangle(MN;A'D)) = 0^0$.

$b)$ Vom afla măsura unghiului celor două plane prin M₃), prin proiecţii.

$pr_{(ABC)}A' = \{A\}$, $pr_{(ABC)}M = \{B\} \Rightarrow pr_{(ABC)}A'MND = ABND$

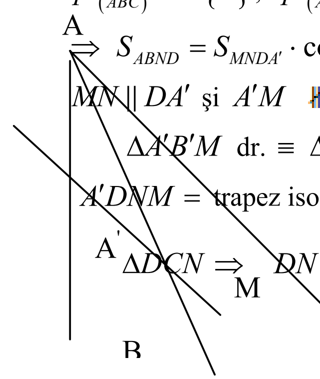
$\Rightarrow S_{ABND} = S_{MNDA'} \cdot \cos\ u$, unde $u = \sphericalangle\ ((DMN);(ABC))$.

$MN \parallel DA'$ şi $A'M \nparallel DN \Rightarrow A'DNM =$ trapez .

$\Delta A'B'M$ dr. $\equiv \Delta DCN$ dr. $(C.C.) \Rightarrow DN = A'M \Rightarrow$

$A'DNM =$ trapez isoscel.

$\Delta DCN \Rightarrow DN^2 = DC^2 + CN^2 \Rightarrow DN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.



Fie $ME \perp A'D$ şi $NF \perp A'D; E,F \in A'D \Rightarrow FD = \left(a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow FD = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow NF^2 = ND^2 - DF^2 \Rightarrow NF = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow S_{MNDA'} = \left(a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{3a\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9a^2}{8}.$$

$$S_{ADNB} = (BN + AD)\cdot AB\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow S_{ADNB} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow$$

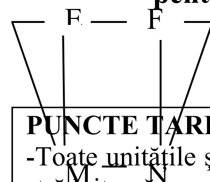
$$\frac{3a^2}{4} = \frac{9a^2}{8}\cdot\cos u \quad \Rightarrow \cos u = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow \sphericalangle((DMN);(ABC))$ este unghiul ce are cosinusul egal cu $\frac{2}{3}$.

BIBLIOGRAFIE :

1. Ion Doru Albu, Geometrie. Concepte pentru metode de studiu, Editura Mirton, Timişoara ,1998.
2. N. Ivăşchescu, C.Basarab, Probleme de matematică pentru clasele V-VIII
   Editura Cardinal,Craiova, 1995.
3. Gh. Ţiţeica, Culegere de probleme de geometrie, Editura Tehnică,Bucureşti, 1991.
4. Gheorghe Adalbert Schneider , Probleme de geometrie cl.VI-X, Editura
   Hyperion , Craiova, 1997.
5. Traian Cohal, Eugenia Cohal, Geometria-o întreagă lume,Editura Dosoftei, Iaşi,1983.

Profesoară, Şcoala "Romul Ladea", Oraviţa



ANALIZĂ SWOT A PROGRAMEI DE MATEMATICĂ
pentru Tezele cu subiect unic la Matematică
An şcolar 2008 – 2009, semestrul I

Irina Avrămescu

PUNCTE TARI	**PUNCTE SLABE**
-Toate unităţile şcolare din ţară s-au străduit să parcurgă materia în ritmul cerut de programă - Au fost tratate cu maximă seriozitate cerinţele programei - Elevii au fost conştienţi că învaţă pentru un examen, care va dovedi capacitatea lor de a acumula o cantitate de informaţii şi de a o transpune în rezolvarea unor exerciţii şi probleme, deci au manifestat mai multă seriozitate	- La clasa a VII-a au trebuit parcurse într-un timp foarte scurt două capitole mari de algebră, pe când la geometrie a fost materie mai puţină, timpul de predare fiind acelaşi - Materia din semestrul II este mult prea largă incluzând materie din semestrul I
OPORTUNITĂŢI	**AMENINŢĂRI**
- O planificare mai unitară a materiei, astfel încât fiecare profesor din ţară să fie la un moment dat în acelaşi loc cu materia - Urmărirea cu atenţie a programei şcolare şi astfel nici un profesor nu tratează nici o temă din programă cu superficialitate	- Programa să nu fie din timp anunţată (adică planificarea profesorului să nu corespundă cu propunerea de programă pentru teză a ministerului)

ANALIZĂ SWOT A SUBIECTELOR DE LA TEZA UNICĂ LA MATEMATICĂ

PUNCTE TARI	**PUNCTE SLABE**
- Există un număr suficient de mare de exerciții cu un grad scăzut de dificultate - Este acoperită o mare parte a materiei - Punctajul este în favoarea elevului	- Exercițiile de la partea I au cerut în unele cazuri mai multe etape până la obținerea răspunsului. Nesolicitându-se decât răspunsul final e posibil ca elevul să fi gândit corect, dar să fi greşit rezultatul, astfel fiind punctat incorect
OPORTUNITĂȚI - Elevii au înțeles că trebuie să fie atenți la detalii, la amănunte şi că nu e suficient să ştii să rezolvi exerciții - Elevii vor da mai multă atenție teoriei matematice, când vor înțelege că aceasta a fost cauza principală a rezultatelor slabe	**AMENINȚĂRI** - Elevii să fie atât de speriați de subiecte şi de teze unice încât să refuze de acum matematica - Subiectele să fie tot mai dificile, elevii să le abordeze tot mai greu

ANALIZĂ SWOT A BAREMELOR PENTRU EVALUARE ŞI NOTARE LA TEZELE UNICE LA MATEMATICĂ

PUNCTE TARI	**PUNCTE SLABE**
-	- Baremul nu este suficient de clar, lasă loc interpretărilor - La clasa a VII-a nu s-a punctat figura la problema de geometrie, deşi elevii au pierdut timp prețios să o realizeze - Cum tezele unice au scopul de a realiza o notare cât mai unitară, baremul trebuia alcătuit astfel încât să se meargă în cel mai mic amănunt al rezolvărilor, specificând chiar variante de răspuns
OPORTUNITĂȚI - Realizarea unor bareme care să excludă posibilitatea de interpretare a corectorului	**AMENINȚĂRI** - Notarea incorectă a elevilor - Analiza împreună cu ei a rezolvărilor şi explicarea unor note care nu neapărat coincid cu cele ale corectorului 2 crează elevului impresia unei mari nedreptăți

Profesoară, Şcoala Generală nr. 9 Reşița

Concursul de Matematică al Revistei RMCS, Ediția a IV-a, 28 februarie 2009, Oțelu-Roşu

prezentare de Lucian Dragomir
şi Ovidiu Bădescu

1. Organizare

Concursul a fost precedat, ca în fiecare an, de selectarea elevilor participanți la Oțelu-Roşu; aceasta a constat în corectarea soluțiilor la problemele de concurs publicate în revistă în numerele 23, 24, 25 şi 26 de profesorul Lucian Dragomir; calificarea elevilor s-a făcut, ca de obicei, în ordinea descrescătoare a punctajelor obținute. S-au calificat 140 elevi, dar au participat 122 de elevi, oricum trebuie să remarcați că în acest an au fost mulți calificați. Concursul a avut loc în data de 28.02.2009 şi a fost găzduit, din nou, de Grupul Şcolar din Oțelu-Roşu; mulțumim şi pe această cale organizatorilor, în special Doamnelor Directoare Rozina Ghiorghioni şi Daniela Chelbea, profesorilor de matematică şi tuturor cadrelor didactice ale şcolii gazdă, care au depus eforturi deosebite pentru a transforma acest concurs într-un eveniment chiar reuşit. Deschiderea Concursului a avut loc la ora 9, concursul s-a desfăşurat între orele 10 – 13, a urmat corectura şi, la ora 17, mult aşteptata festivitate de premiere.

2. Sponsori, alte activități

Costul mesei de prânz, de altfel foarte bună, ca şi *întregul fond de premiere*, a fost suportat în acest an de Consiliul Local şi Primăria oraşului Oțelu-Roşu. Toți elevii participanți au primit câte o diplomă (pentru că o meritau prin simplul fapt că au ajuns să concureze), iar cei câştigători au primit diplomă de premiere, precum şi premii în bani (comparativ cu alte concursuri de gen din țară, premiile au fost substanțiale); sumele acordate au fost de 120 RON (premiul I), 100 RON (premiul II), 70 RON (premiul III) şi 40 RON (mențiune). Au fost, deasemenea, acordate cărți şi premii speciale pentru elevii care au obținut punctaje foarte mari, de către Domnul profesor *Tudor Deaconu*, directorul CCD Caraş – Severin. Cheltuieli colaterale necesare bunei desfăşurări a concursului au fost posibile folosind fonduri proprii ale Filialei (provenite din cotizațiile membrilor şi din vânzarea revistei, care, una peste alta, nu aduce beneficii decât minore din punct de vedere financiar; câştigurile sunt, credem, în plan intelectual...) şi din donații ale unor persoane fizice apropiate învățământului matematic(mai există şi astfel de oameni!) : fam.Bîrsilă şi fam.Colcear.

În mod special, se cuvine să mulțumim efectiv din suflet Domnului Primar al oraşului Oțelu-Roşu, Iancu Simion – Simi, care a fost trup şi suflet, de la începuturile acestui concurs, alături de noi, simțind că orice manifestare care adună minți luminate într-o comunitate va aduce, cândva, lumină în comunitate. Şi nu în ultimul rând, mulțumiri Domnului Viceprimar al localității gazdă, Enache Dragoş, care a susținut permanent cauza şcolii, a performanței în matematică în special, ca o certitudine a viitoarelor împliniri. Cei care cred altfel, pacea să fie cu ei.

3. Profesori participanți

Pe lângă cadrele didactice din şcoală, un număr *mare*, şi de fapt, *mic*, de profesori de specialitate din județ au participat, chiar cu drag credem, la această manifestare(de fapt, aceştia sunt printre puținii totuşi care şi-au îndemnat elevii să rezolve probleme din reviste pentru a avea astfel şansa participării; sperăm, că numărul acestora va creşte în anii ce vin). Cu mare dragoste amintim dascălii care ne – au ajutat, prin tot ce au făcut pentru elevii lor, pentru profesia lor :

Comisia de evaluare :

- Clasa a IV-a (înv.Camelia Suru, prof.Lucian Dragomir)
- Clasa a V-a (prof.Mariana Iancu, prof.Antoanela Buzescu, prof.Mariana Drăghici, Prof.Vasile Chiş)
- Clasa a VI-a (prof.Marius Şandru, prof.Adriana Dragomir, prof. Pavel Rîncu, prof.Liliana Maier)
- Clasa a VII-a (prof.Ion Belci, prof.Dana – Emilia Schiha, prof. Camelia Pîrvu, prof.Heidi Feil)
- Clasa a VIII-a (prof. Irina Avrămescu, prof.Aurica Lazarov, prof.Iulia Cecon, prof.Arjentia Ferdean)
- Clasa a IX-a (prof. Ovidiu Bădescu, prof.Mihai Lazarov)
- Clasa a X-a (prof. Costel Bolbotină, Nicolae Stăniloiu)
- Clasa a XI-a (prof. Delia Dragomir, prof.Marius Golopența)
- Clasa a XII-a (prof.Antoanela Buzescu, prof.Lucian Dragomir)

4. Subiecte

Subiectele au fost selectate în acest an de profesorii Mihai Monea (Deva) şi Dragomir Lucian (Oțelu – Roşu) (nu se poate să nu remarcați, din nou, că *multe dintre probleme sunt preluate din Gazeta Matematică, revista care n-ar trebui să lipsească de pe masa nici unui pasionat de matematică.* Puteți să vă abonați la orice oră, trebuie numai să întrebați... Alte probleme au fost prelucrări din RMCS....(subiecte, bareme de corectare, rezultate – toate le puteți găsi şi la adresa: www.neutrino.ro).

Vă propunem în continuare să vă încercați puterile cu toții cu subiectele din concurs:

Clasa a IV-a

1. În exercițiul $9 \cdot 4 : 2 + 10 - 2$ folosiți paranteze pentru a obține pe rând rezultatele:

a) 106; b) 90; c) 1.

Gazeta Matematică

2. Dacă 4 stilouri şi 3 cărți costă 100 de lei, iar două stilouri şi o carte costă 40 de lei, calculați:

a) cât costă un stilou şi cât costă o carte ;

b) câte stilouri şi câte cărți se pot cumpăra cu 50 de lei, folosind întreaga sumă, astfel încât să avem cel puțin un obiect din fiecare.

Lucian Dragomir

3. Aflați cinci numere naturale ştiind că suma lor este 2009 şi dacă din fiecare scădem un acelaşi număr obținem 7, 8, 13, 17, respectiv 24.

Gazeta Matematică

4. Familia Popa are trei copii: Andrei, Bogdan şi Ciprian. Tatăl, Popa Dumitru, are 35 de ani. Dublul sumei vârstelor celor trei copii este cu 5 mai mică decât vârsta tatălui şi egală cu vârsta mamei, Popa Elena.Cu un an înainte, cel mai mare dintre copii avea vârsta egală cu suma vârstelor fraților săi.

a) Calculați câți ani are Elena ;

b) Calculați câți ani are Ciprian, cel mai mare dintre frați;

c) Dacă Andrei are vârsta de trei ori mai mică decât cea a lui Bogdan, câți ani are cel mai mic dintre frați ?

Lucian Dragomir, RMCS(enunț modificat)

Clasa a V-a

1. Calculați suma numerelor mai mari decât 29 şi mai mici decât 290 care prin împărțire la 4 dau restul 1.

Antoanela Buzescu, RMCS (enunț modificat)

2. Se consideră numărul $a = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{290}$.

a) Să se arate că numărul a este divizibil cu 93 ;

b) Să se arate că numărul a nu este pătrat perfect.

Lucian Dragomir

3. Un număr suferă o transformare *acceptabilă* dacă se înmulţeşte cu 3, apoi la rezultatul obținut se adună 4 ; un număr suferă o transformare *bună* dacă se înmulţeşte cu 4 apoi la rezultatul obținut se adună 5 şi un număr suferă o transformare *foarte bună* dacă se înmulţeşte cu 5 apoi la rezultatul obținut se adună 6.

a) Arătați că există un număr care printr-o transformare *acceptabilă* sau printr-o transformare *bună* devine 29 ;

a) Stabiliți dacă există un număr care printr-o transformare *acceptabilă* sau printr-o transformare *bună* , se transformă în 2009.

b) Stabiliți dacă există un număr care prin trei transformări succesive, una *acceptabilă,* apoi una *bună*,apoi una *foarte bună*, devine 2031 .

Lucian Dragomir,RMCS(enunț modificat)

4. Să se arate că, dacă suma cifrelor numărului $\overline{abc}$ este 25, iar suma cifrelor numărului $\overline{abc} + 2$ este un pătrat perfect, atunci produsul cifrelor numărului $\overline{abc}$ este un număr ale cărui cifre sunt numere consecutive.

Gazeta Matematică

Clasa a VI-a

1. În jurul punctului O se formează cinci unghiuri, cu măsurile proporționale cu cinci numere naturale consecutive. Determinați măsura celui mai mic dintre unghiuri, ştiind că unghiul cel mai mare are măsura egală cu $88°$.

Lucian Dragomir

2. Pe o dreaptă d se consideră, în această ordine, punctele A,B,C,D,E astfel încât B este mijlocul lui (AD), D este mijlocul lui (BE), C mijlocul lui (AE) ,iar $BC = 3cm$. Dacă F şi G sunt separate de dreapta d astfel încât $FC \perp d, GD \perp d, FC = 6cm, GD = 7cm$, atunci :

a) Calculați lungimea segmentului (AE) ;

b) Comparați lungimile segmentelor (FH) şi (EG) , unde $H \in (AB)$ astfel încât $HA = 2cm.$

Delia şi Adrian Dragomir,RMCS (enunț modificat)

3. La un concurs de matematică sunt premiaţi şase concurenţi, cu sume diferite de bani. Fiecare dintre primii patru premianţi primeşte cât următorii doi clasaţi la un loc. Dacă orice premiant primeşte cel puţin 26 de lei, iar elevul care a câştigat premiul I primeşte 260 de lei, calculaţi ce sumă totală de bani s-a folosit pentru a premia pe cei şase învingători.

Gazeta matematică

4. Pe o tablă sunt scrise patru numere. O operaţie *interesantă* constă în : se aleg două dintre cele patru numere, li se adaugă câte o unitate şi se scriu pe tablă numerele obţinute în locul celor alese.

Este posibil ca, prin mai multe operaţii *interesante*, să se ajungă, pornind de la numerele 2, 0, 0, 9, la patru numere egale?

Concurs Rusia

Clasa a VII-a

1. Să se determine numerele întregi x şi y pentru care $1 + xy + 2x = y^2$.

Gazeta Matematică

2. Să se determine numerele naturale nenule *a, b, c* pentru care

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 1 \quad \text{şi} \quad \frac{a\cdot\sqrt{3}+b}{b\cdot\sqrt{3}+c}=2 .$$

Lucian Dragomir

3. Înălţimile unui triunghi ascuţitunghic ABC se intersectează în punctul H. Se ştie că $AB = CH$. Să se determine măsura unghiului $\measuredangle ACB$.

* * *

4. Pe laturile *AB, BC, CD, DA* ale pătratului *ABCD* cu $AB = 1$, se iau respectiv punctele *K, L, M* şi *N* astfel încât $AK + LC + CM + NA = 2$.

Să se arate că : $MK \perp LN$.

Concurs Rusia

Clasa a VIII-a

1. Se consideră numerele $p,q \in \mathbb{N}, 1 \leq q \leq p$ şi

$$a=\left(p+\sqrt{p^2+q}\right)^2 \ , b=\left(p-\sqrt{p^2+q}\right)^2 .$$

Să se arate că :

a) nu există $p,q \in \mathbb{N}, 1 \leq q \leq p$, pentru care $a + b = 2009$;

b) a este iraţional .

RMCS 25

2. a) Să se arate că există un singur număr natural n pentru care

$$\frac{n^3+4n+13}{n+2} \in \mathbb{N} \ ;$$

b) Să se determine numerele naturale m pentru care $m + 4^m = (m+1)\cdot 2^m$;

c) Să se arate că nu există numere naturale p pentru care $1 + 2^p + 4^p$ este pătrat perfect.

Lucian Dragomir

3. Pe planul pătratului *ABCD* cu lungimea laturii de 2 cm, se duce perpendiculara în A pe care se ia punctul E astfel încât $AE = 2\sqrt{2}$ cm . Să se calculeze:

a) măsura unghiului $\measuredangle ECA$;

b) măsura unghiului determinat de dreptele *EC* şi *AD ;*

c) distanţa dintre dreptele *EC* şi *BD.*

Gazeta Matematică

4. Se consideră un număr prim p , $p \neq 3$, pentru care există a şi b numere întregi astfel încât $p \,/\, (a+b)$ şi $p^2 \,/\, (a^3+b^3)$.

a) Să se dea un exemplu de triplet $(p,a,b),\ a,b \neq 0, a \neq b$, care satisface condiţiile din enunţ ;

b) Să se arate că $p^2 \,/\, (a+b)$ sau $p^3 \,/\, (a^3+b^3)$.

(*Prin* $x \,/\, y$ *se înţelege că numărul natural x divide numărul natural y).*

Baraj OBMJ 2008

Clasa a IX-a

1. Să se arate că, dacă $x, y \in [1,3]$ şi $x \cdot y = 4$, atunci

$$2 \le \frac{x}{\sqrt{4y-y^2}} + \frac{y}{\sqrt{4x-x^2}} \le 2\cdot\sqrt{3}$$

Ovidiu Bădescu,RMCS(enunţ modificat)

2. Să se determine funcţia $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că

$$\left(x+2^{f(y)}\right) \text{ divide pe } \left(f(x)+2^y\right),\ \forall x,y\in\mathbb{N}^*.$$

Gazeta Matematică

3. Numerele 9, 25 şi 49 sunt termeni ai unei progresii aritmetice cu raţia strict pozitivă. Să se arate că numărul 2009 este deasemenea termen al acestei progresii.

Adaptare Concurs Rusia

4. Fie *ABCDE* un pentagon inscriptibil şi H_1, H_2, H_3, H_4 respectiv ortocentrele triunghiurilor *ABC, BCD, CDE* şi *ACE*. Demonstraţi că patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.

* * *

Clasa a X-a

1. Să se rezolve ecuaţia : $a^{x-1} = (1-a)\cdot x + 3a - 2$, unde $a\in(0,\infty)$.

RMCS

2. Să se determine funcţiile $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ cu proprietatea că

$$f\left(x^2\cdot f(y)\right) = x\cdot y\cdot f(f(x)),\ \forall x,y\in(0,\infty).$$

Gazeta Matematică

4. a) Să se determine numărul funcţiilor $f:\{1,2,3,...,8\}\to\{0,1,2\}$ cu proprietatea că:

$$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(8)=3.$$

RMCS

b) La un turneu de şah au participat de două ori mai mulţi băieţi decât fete. Fiecare pereche de participanţi a jucat exact o dată şi nu s-au înregistrat remize. Raportul între numărul victoriilor obţinute de fete faţă de cele obţinute de băieţi a fost $7:5$.

Găsiţi câţi participanţi au fost la acest turneu.

OBMJ, 2000

4. a) Să se arate că, pentru orice $\alpha\in\mathbb{R}$, este adevărată egalitatea:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\ ;$$

b) Să se demonstreze că, dacă numerele reale *x, y, z* satisfac egalităţile

$$\cos x + \cos y + \cos z = 0 \text{ şi } \cos 3x + \cos 3y + \cos 3z = 0,$$

atunci $\cos 2x\cdot\cos 2y\cdot\cos 2z \le 0$.

Bogdan Enescu

Clasa a XI-a

1. Să se arate că dacă numerele reale *a,b,c,* satisfac relaţiile $a+2b+3c=3, a+3b+4c=4, 2a-b+c=1$, atunci

$$3\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 2.$$

RMCS

2. Să se arate că dacă vârfurile unui triunghi sunt situate pe parabola de ecuaţie $y = x^2 - 3x$, iar abscisele lor sunt numere întregi consecutive, atunci aria triunghiului este un număr întreg.

Iacob Didraga

3. Se consideră şirul $(a_n)_{n\ge1}$ definit prin $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \frac{1+a_n^2}{n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{\ln n}$.

4. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcție monotonă pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(2x)-f(x)\right)=0$. Să se arate că pentru orice $a>0$ avem $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(ax)-f(x)\right)=0$.

Clasa a XII-a

1. Să se arate că un grup $(G,\cdot)$ cu proprietatea că există $a,b\in G$ astfel încât $ab^2=b^3a^2$ şi $b^4=e$, conține un subgrup izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_2,+)$.

Lucian Dragomir,RMCS

2. Fie A un inel finit comutativ cu proprietatea că funcția $f:A\to A$, $f(x)=x^2$ este injectivă.

Să se arate că:

a) $1+1=0$;

b) pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi $a\in A$, polinomul $P(X)=X^{2n}+a$ se poate scrie ca produsul a două polinoame de grad cel puțin 1, cu coeficienți în A.

Gazeta Matematică

3. Să se arate că: $1\le\int_3^5\frac{1}{\sqrt{8x-x^2-12}}dx\le\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lucian Dragomir

4. a) Să se arate că: $\ln(1+x)\le x,\forall x\ge 0$;

b) Să se demonstreze că dacă $a>0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\int_0^1\frac{x^n}{a+x^n}dx=\ln\frac{a+1}{a}$.

5. Premianți.

Lista completă cu tot, sau aproape tot ce doriți să aflați despre acest concurs, ne repetăm, o găsiți de mult de fapt, pe *www.neutrino.ro.* Oricum, credem că şi paginile revistei noastre pot găzdui cu mare căldură, premianții şi din acest an:

Clasa a IV-a

Premiul I : *Burcin Andreea* , 27 puncte(*cu o lucrare absolut remarcabilă pentru clasa a IV-a, sintetic redactată,corect,la obiect)*
(Lic.Hercules Băile Herculane, înv.Gaiță Alexa)
Premiul II*: Simu Victor*
(Şcoala Romul Ladea Oravița, înv. Suru Camelia)
Premiul III*: Străinescu Andra*
(Lic.Hercules Băile Herculane, înv. Doina Zah)
Mențiuni: *Nicoară Denisa*(Lic.Hercules Băile Herculane, înv.Doina Zah), *Vătavu – Pepa Cătălina*(Lic.Hercules Băile Herculane, înv.Doina Zah), *Szabo Ciprian*(Lic.Traian Doda Caransebeş, înv.Minea Elena)

Clasa a V-a

Premiul I: *Ciobanu Anca* , 28 puncte*(cu o lucrare excepțională, redactare completă, justificări exemplare)*
(Şcoala Generală nr.2 Reşița, prof.Şandru Marius)
Premiul II: *Murgu Teodora*
(Şcoala Romul Ladea Oravița, prof.Camelia Pîrvu)
Premiul III: *Balmez Andrada*
(Şcoala Romul Ladea Oravița, prof.Camelia Pîrvu)
Mențiuni: *Țolea Lorena*(Şcoala Gen.1 Oțelu – Roşu, prof.Feil Heidi), *Iliescu Alexandru Constantin*(Lic.Traian Doda Caransebeş, prof. Miuță Janet), *Stanciu Ani(*Lic.Hercules Băile Herculane,Prof.Bolbotină Constantin).

Clasa a VI-a

Premiul I: *Ciulu Miruna Dalila,* 28 puncte*(soluții fără greşeli, fără ezitări, redactare matură,lectura lucrării produce efectiv plăcere şi admirație)*
(Şcoala Generală nr.6 Reşița, prof.Simulescu Susana)
Premiul II: *Ştefănescu Andrei*
(Şcoala Gen.1 Oțelu – Roşu, prof.Feil Heidi)
Premiul III: *Dinulică Petru Augustin*
(Lic.Ped.C.D.Loga Caransebeş, prof.Buzescu Antoanela)
Mențiuni: *Gheorghişan Călin*(Şcoala Romul Ladea Oravița, prof. Camelia Pîrvu), *Dinulică Septimiu*(Lic.Ped.C.D.Loga Caransebeş, prof.Buzescu Antoanela), *Pîrvu Ancuța Iulia*(Şcoala Romul Ladea Oravița, prof.Camelia Pîrvu)

Clasa a VII-a

Premiul I: *nu s – a acordat*
Premiul II: *Lazăr Silviu – Ioan*
(Şcoala Generală nr.9 Reşiţa, prof.Avrămescu Irina)
Aghescu Monica Elena
(Şcoala Generală nr.2 Reşiţa, prof.Drăghici Mariana)
Premiul III: *Radu Ionela*
(Şcoala Gen.1 Oţelu – Roşu, prof.Feil Heidi)
Menţiuni: *Ţeudan Adina* **(**Şcoala Generală nr.2 Reşiţa, prof.Drăghici Mariana), *Drăghici Livia Liliana* **(**Şcoala Generală nr.2 Reşiţa, prof.Drăghici Mariana), *Peptan Alexandru Florin* **(**Şcoala Generală nr.9 Reşiţa, prof.Avrămescu Irina)

Clasa a VIII-a

Premiul I: ***Krocoş Lorena***
(Şcoala Gen.1 Oţelu – Roşu, prof.Feil Heidi)
Premiul II: *Stoicănescu Gelu*
(Lic.Traian Doda Caransebeş, prof.Dragomir Adrian)
Premiul III: *Kuhn Anne Marie*
(Şcoala Gen.1 Oţelu – Roşu, prof.Feil Heidi)
Menţiuni: *Dumitresc Cecilia* (Grup Şcolar Ind. Oţelu – Roşu, prof.Dragomir Adriana), *Nasta Laura* (Grup Şcolar Ind. Oţelu – Roşu, prof.Dragomir Adriana), *Pascu Andra Diana* **(**Şcoala Generală nr.2 Reşiţa, prof.Drăghici Mariana)

Clasa a IX-a

Premiul I: ***Semenescu Anca***
(Lic.Ped. C.D.Loga Caransebeş, prof. Humiţa Doina)
Premiul II: *nu s – a acordat*
Premiul III: *Szabo Cristian*
(Lic.Traian Doda Caransebeş, prof.Dragomir Delia)
Mocanu Ioana Dora
(Lic.Traian Doda Caransebeş, prof.Dragomir Delia)
Menţiuni: *Bugariu Răzvan* (Grup Şcolar Ind. Oţelu – Roşu, prof.Dragomir Lucian)

Clasa a X-a

Premiul I: ***Zanfir Cristian***
(Lic.Traian Doda Caransebeş, prof.Dragomir Delia)
Premiul II: *Meşter Sergiu*
(Lic. Traian Lalescu Reşiţa, prof.Bădescu Ovidiu)
Premiul III: *Prunar Victor*
(Lic.Traian Doda Caransebeş, prof.Dragomir Delia)
Menţiuni: *Bona Petru* (Lic.Traian Doda Caransebeş, prof.Dragomir Delia), *Cococeanu Oana* (Grup Şcolar Ind. Oţelu – Roşu, prof.Dragomir Lucian), *Pricop Romina* (Lic.Gen.Dragalina Oraviţa, prof. Mihai Lazarov).

Clasa a XI-a

Premiul I: ***Stăniloiu Ovidiu***
(Lic.Tata Oancea Bocşa, prof. Todor Ioan)
Premiul II: *nu s-a acordat*
Premiul III: *Vlad Adina Alexandra*
(Colegiul Naţional Moise Nicoară Arad, prof.Bodrogean Ovidiu)
Menţiuni: *Mureşan Ana Maria*(Lic.Ped.C.D.Loga Caransebeş, prof.Buzescu Antoanela), *Mureşan Alexandru Ioan* (Lic.Ped.C.D.Loga Caransebeş, prof.Buzescu Antoanela)

Clasa a XII-a

Premiul I: ***Unguraş Dragoş Cristian***
(Grup Şcolar Ind. Oţelu – Roşu, prof.Dragomir Lucian)
Premiul II: *Răşinariu Nicolae Lucian*
(Lic.Gen.Dragalina Oraviţa, prof. Mihai Lazarov).
Nu s-au acordat alte premii.

Felicitări încă odată tuturor celor care au participat la concurs, dascălilor lor, părinţilor.

Concursul Județean al Revistei de Matematică Caraş-Severin, Ediția a V-a

Regulament

Ediția a V-a a Concursului Revistei demarează acum, cu problemele propuse în acest număr. Fiecare elev trebuie să rezolve(subliniem din nou: **singur!;** altfel e posibil să vă treziți calificați la concurs şi acolo să nu faceți mare lucru, dați naştere la întrebări şi credem că nici n-o să vă simțiți prea bine), aşadar să rezolve cât mai multe probleme de la clasa sa, de la clasa precedentă sau de la orice clasă superioară. Redactați îngrijit fiecare problemă pe câte o foaie separată*(enunț + autor + soluție + numele vostru +clasa)*, completați talonul de concurs de pe ultima copertă a revistei şi trimiteți totul într-un plic format *coală ministerială*, adresat astfel **(FOARTE IMPORTANT)**: Prof. Lucian Dragomir, Grup Şcolar Industrial Oțelu-Roşu, str.Republicii 10-12, 325700, Oțelu-Roşu, Caraş-Severin(*în colțul din dreapta jos a plicului*), cu mențiunea **"**probleme rezolvate, clasa ...." (*în colțul din stânga jos ,scrieți evident clasa în care sunteți*). Colțul din *stânga sus* vă este rezervat(expeditor), acolo vă scrieți numele, prenumele, adresa. Insistăm asupra trimiterilor în plic (nu în folii de plastic) şi asupra respectării cu strictețe a termenelor finale indicate de fiecare dată - plicurile primite după data limită nu vor fi luate în considerare. Revenim: redactați complet, justificați, răspundeți exact la cerința problemei.

Rezolvări poate trimite orice elev, indiferent de județul în care învață, el va apărea ca şi rezolvitor cu punctajul corespunzător, însă la Concursul RMCS pot fi invitați, cel puțin deocamdată, doar elevii județului Caraş-Severin. Ne cerem scuze pentru acest inconvenient elevilor şi colegilor din țară.

După data limită de trimitere a soluțiilor, acestea sunt evaluate şi în numărul următor al revistei vor fi publicați toți rezolvitorii cu punctajele obținute.

La ediția a V-a a concursului vor fi selectați concurenții în funcție de punctajele obținute din rezolvarea problemelor publicate în numerele 27, 28, 29 şi 30 ale revistei noastre. În jurul datei de 20 ianuarie 2010 se va întocmi clasamentul general(prin însumarea punctelor obținute) şi astfel primii clasați vor fi invitați, împreună, ca şi în acest an, să participe la concurs; acesta va avea loc în luna februarie sau martie, într-un oraş care va fi anunțat în timp util . Marea noutate este că ne adresăm de acum tutor elevilor, începând cu bobocii, cu cei mai mici, cu cei de clasa a I-a !!! Respectând regulile de trimitere la concurs, este posibil să

câştigați, din când în când, sau constant, câte un premiu, mic, mare, nu contează... veți arăta copiilor voştri, peste ani, cât ați muncit, cu ce rezultate, cât de mult sau de puțin v-au ajutat eforturile tinereții....

Subiectele vor fi alese tot din probleme de genul **RMCS** sau **G.M.** sau ceva cât de cât nou. Veți remarca, desigur, că unele probleme pe care vi le propunem sunt din numere mai vechi ale Gazetei Matematice, în speranța că vă vom trezi interesul pentru una dintre cele mai serioase şi vechi reviste de matematică din lume. Abonați-vă la ***Gazeta Matematică***, sigur veți avea numai de câştigat!

Din nou, spor la treabă tuturor: elevi, profesori, părinți sau prieteni! (*Informații suplimentare se pot obține la: prof.Ovidiu Bădescu, tel: 0741017700 sau prof. Lucian Dragomir, tel: 0255/530303 sau 0722/883537, e-mail: lucidrag@yahoo.com).* ■

Probleme rezolvate

Inaugurăm, începând cu acest număr al revistei, o nouă modalitate de a prezenta soluțiile problemelor propuse: rezolvările problemelor propuse în numărul 26 vor fi prezentate în numărul 28 al revistei, problemele propuse în numărul 27, vor avea soluțiile prezentate în numărul 29,... Credem că e mai bine, din mai multe puncte de vedere. Mulțumim pentru înțelegere şi sperăm că veți urmări cu aceeaşi pasiune fiecare nouă apariție.

Probleme propuse
(se primesc soluții până în data de 27 aprilie 2009)
Notă: Se pot trimite şi soluții la problemele propuse în articolele apărute în ultimele două numere ale revistei

Clasa I

I.1. Opt pitici sapă de zor
Colo-n grădinița lor.
Şi mai vin trei să-i ajute
Lucrul să-l gate mai iute.
Cinci se duc să se-odihnească.
Câți rămân să mai muncească ?

Prof.Heidi Feil, Iulia Cecon, Oțelu-Roşu

I.2. Am ales un buchet de trandafiri galbeni şi roşii pentru ziua mamei mele.Dacă mai pun doi trandafiri roşii în buchet, voi avea cinci trandafiri roşii, iar dacă mai pun doi trandafiri galbeni, voi avea în buchet patru trandafiri galbeni. Câte flori are buchetul pe care vreau să îl ofer celei mai bune mame din lume de ziua ei?

Prof. Adriana Dragomir, Oțelu-Roşu

I.3. Ce număr x trebuie pus în următoarea egalitate astfel încât să fie adevărată?

$$21 + x + 21 = 44$$

* * *

I.4. Patru prieteni, cu vârstele de 8, 9, 10 şi 11 ani, au făcut împreună o plimbare de 8 kilometri.Câți kilometri a parcurs cel mai mic dintre ei?

Dan Emil Bugariu, elev,Oțelu-Roşu

I.5. Emil se joacă cu liftul într-un bloc.Pleacă de la etajul 7, coboară la etajul 4, apoi urcă 5 etaje şi coboară 9. La ce etaj este Emil acum?

Dan Emil Bugariu, elev, Oțelu-Roşu

I.6. Câte numere impare sunt între 28 şi 82?

* * *

I.7. Andreea are un frate şi trei surori. Câte surori are fratele ei ?

Raluca Lascu, elevă, Reşița

I.8. Stabileşte regula şi continuă şirul numerelor: 69; 70; 72; 75 cu încă trei numere.

Daniel Gherasim, elev, Reşița

I.9.Într-o vază sunt 17garoafe şi frezii. Dacă 5 dintre ele nu sunt garoafe, aflați câte frezii şi câte garoafe sunt.

Inst. Mariana Mitrică, Reşița

1.10. Dintr-o cutie cu 28 bomboane de ciocolată, Ovidiu şi-a servit toți colegii de clasă. Ştiind că în cutie au mai rămas 5 bomboane, aflați:
a) Câți colegi are Ovidiu?
b) Câți elevi sunt în clasă?

Inst. Mariana Mitrică, Reşița

Clasa a II-a

II.1.Câte numere de trei cifre încep şi se termină cu 4 ?

Dan Emil Bugariu, elev, Oțelu – Roşu

II.2. Emil trebuie să coloreze o cană şi o farfurioară în culori diferite, având la dispoziție culorile verde, galben şi albastru. Câte posibilități are Emil?

Dan Emil Bugariu, elev, Oțelu – Roşu

II.3. Avem nouă bile, dintre care opt sunt identice, iar una este mai uşoară, dar are aceeaşi formă ca şi celelalte. Dacă dispuneți de o balanță, puteți găsi bila mai uşoară prin maxim două cântăriri?

* * *

II.4. Calculați suma numerelor de trei cifre care sunt scrise numai cu cifrele 1, 2 şi 3.

* * *

II.5.Mă gândesc la un număr. Scad din el 45 şi obțin cel mai mare număr impar scris cu două cifre diferite. La ce număr m-am gândit?

Raluca Imbrescu, elevă, Reşița

II.6.Într-un tramvai sunt mai mulți călători. La prima stație coboară 12 călători şi urcă 19. Acum, numărul călătorilor reprezintă cel mai mic număr scris cu trei cifre. Câți călători au fost la început?

Denis Remo, elev, Reşița

II.7. Aflați cel mai mic număr scris cu trei cifre diferite care îndeplineşte următoarele condiții :

a) este mai mare decât 200;
b) suma cifrelor sale este 13.

Inst.Mariana Mitrică, Reşița

II.8.În trei coşuri sunt 56 kg mere. Câte kg sunt în fiecare coş dacă în primul şi al doilea sunt 38 kg, iar în al doilea şi al treilea sunt 35 kg?

Inst.Mariana Mitrică, Reşița

II.9. Suma a trei numere este 815. Primii doi termeni au suma 579, iar ultimul termen este mai mic decât al doilea cu 94. Care este primul număr?

Inst.Mariana Mitrică, Reşița

II.10. Opt prune cântăresc cât două mere, iar un măr cât trei caise. Câte prune cântăresc tot atât cât cântăresc nouă caise?

* * *

Clasa a III-a

III.1.În cât timp poate fi umplut un bidon de 10 litri cu apă, ştiind că dintr-un robinet curg 3 litri într-o oră, iar în acelaşi timp se scurge din bidon, printr-o spărtură, 1 litru de apă?

Andreea Petrescu, elevă, Tulcea

III.2. Casa lui Mihai se află pe drumul ce leagă două oraşe, respectiv Reşița şi Caransebeş. Dacă Mihai merge în oraşul Caransebeş, el parcurge o distanță de trei ori mai mare decât până în oraşul Reşița. Dacă merge în Reşița, el parcurge cu 20 km mai puțin decât până în Caransebeş.

Ce distanță este între cele două oraşe?

Înv. Elisaveta Vlăduț, Reşița

III.3. Ioana şi Andrei privesc acelaşi număr de două cifre, Ioana de la dreapta la stânga, iar Andrei, invers, de la stânga la dreapta. Ioana spune că numărul văzut de ea este de cinci ori mai mare decât cel văzut de Andrei, iar Andrei, mic copil, susține că nu e adevărat ce spune sora sa. Care dintre cei doi frați are dreptate?

Prof.Heidi Feil, Iulia Cecon, Oțelu-Roşu

III.4. Buna Mia are patru nepoți: Lucia, Cristina, Andrei şi Ioana.Nepoții se joacă zilnic mai mult decât ar trebui poate, şi, într-o zi, au spart un geam din casă. Destul de supărată, bunica i-a întrebat cine a spart geamul.Nepoții s-au grăbit să răspundă:

Lucia: ,,Eu nu l-am spart, nici nu-mi vine să cred că te poți gândi la mine!"

Cristina: ,,Andrei a spart geamul, trebuie să recunosc, asta este!"

Andrei: ,,Lucia l-a spart şi ăsta e adevărul!"

Ioana : ,,Cristina nu l-a spart!"

Dacă ştim sigur că, din păcate, unul dintre nepoți nu spune adevărul, putem găsi cine a spart geamul?

Prof. Adriana Dragomir, Oțelu-Roşu

III.5. Ce număr trebuie pus în locul semnului de întrebare din ultimul tabel? $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & ? \end{pmatrix}$. Explicați de ce.

Prof.Heidi Feil, Iulia Cecon, Oțelu-Roşu

III.6. Ce număr trebuie pus în locul semnului de întrebare din următorul tabel? $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & ? \end{pmatrix}$. Explicați de ce.

Dan Emil Bugariu, elev, Oțelu- Roşu

III.7. Emil doarme 9 ore pe noapte.

Câte ore este treaz Emil în luna martie ?

Dan Emil Bugariu, elev, Oțelu-Roşu

III.8.Câte minute sunt în trei ore şi trei sferturi ?

Dan Emil Bugariu, elev, Oțelu-Roşu

III.9. Adina a primit de la bunica sa 50 de lei. O carte costă 12 lei, iar un caiet 3 lei.

Dacă Adina şi-a cumpărat 3 cărţi, câte caiete îşi poate cumpăra?

Dan Emil Bugariu, elev, Oţelu – Roşu

III.10. De la Lugoj la Timişoara sunt 60 de kilometri. Emil şi Andrei vor să parcurgă această distanţă mergând cu bicicletele. Emil merge cu 20 km pe oră, iar Andrei cu 15 km pe oră, amândoi fără oprire.

Dacă Andrei pleacă la ora 8 din Lugoj, iar Emil la ora 9, cine ajunge primul în Timişoara ?

Dan Emil Bugariu, elev, Oţelu-Roşu

Clasa a IV-a

IV.130. Puteţi împărţi numărul 50 în trei părţi, astfel încât dacă la prima parte adunăm 2, din a doua scădem 2, iar a treia parte o înmulţim cu 2, rezultatele să fie egale?

Prof. Adriana Dragomir, Oţelu-Roşu

IV.131. Un pescar a prins un peşte despre care spune: " Coada are 2 kg, capul cântăreşte cât coada şi o treime din trunchi, iar trunchiul cântăreşte cât capul şi coada la un loc". Cât cântăreşte peştele?

Prof. Irina Avrămescu, Reşiţa

IV.132.Într-o sală de spectacole s-au ocupat doar trei sferturi dintre locuri. La pauză, o cincime dintre spectatori au plecat şi au mai rămas 312.Câte locuri are sală?

Inst.Mariana Mitrică,Reşiţa

IV.133. Un biciclist a parcurs într-o zi 24 km, distanţă care reprezintă 2/5 din drumul ce-l avea de parcurs. A doua zi a parcurs cu 5 km mai puţin decât în prima zi.Câţi kilometri mai are de parcurs?

Inst.Mariana Mitrică,Reşiţa

IV.134. Dacă $6a+b=6$ şi $b+c=8$, calculaţi $8a+14b+6c$.

Inst.Mariana Mitrică,Reşiţa

IV.135. Suma a două numere naturale este 824. Dacă ambele se împart la 4, se obţin două numere a căror diferenţă este 108. Să se afle cele două numere. Verificaţi!

Înv. Elisaveta Vlăduţ, Reşiţa

IV.136. Dacă elevii claselor a IV-a dintr-o şcoală s-ar grupa câte 9 pe rând, ar fi cu 10 rânduri mai puţin decât dacă s-ar grupa câte 7 pe rând.
Câţi elevi sunt în acea şcoală în clasa a IV-a?

Înv. Elisaveta Vlăduţ, Reşiţa

IV.137. Sunt un număr natural de două cifre cu suma lor 9. Dublul meu se termină în 6, iar triplul este un număr impar. Cine sunt?

Înv. Elisaveta Vlăduţ, Reşiţa

IV.138.Într-o curte sunt oi şi găini. Dacă Emil vede 20 de picioare şi 7 capete, puteţi spune câte găini sunt în curte?

Dan Emil Bugariu, elev, Oţelu-Roşu

IV.139. Suma a trei numere naturale consecutive este 2943.
Care sunt numerele?

* * *

Clasa a V-a

V.130 Se consideră numărul $A=\overline{5a}+\overline{a5}$.

a) Determinaţi *a* pentru care *A* este pătrat perfect;
b) Arătaţi că nu există *a* pentru care *A* este cub perfect;
c) Determinaţi *a* pentru care restul împărţirii lui *A* la 5 este 4.

Prof. Heidi Feil, Oţelu – Roşu

V.131 Să se arate că : $2^{2009} > 256^{15} \cdot 15^{256}$.

Prof. Adriana Dragomir, Oţelu – Roşu

V.132 Să se determine câte numere naturale de cinci cifre, scrise în baza 10, au produsul primelor două cifre egal cu un număr prim p, iar suma ultimelor două cifre egală cu p^2 .

Prof. Adriana Dragomir, Iulia Cecon,, Oţelu – Roşu

V.133 Dacă x şi y sunt numere naturale de două cifre astfel încât restul împărţirii numărului $2\cdot x$ la $2\cdot y$ este 4, iar restul împărţirii numărului $3\cdot x$ la $4\cdot y$ este 1, găsiţi restul împărţirii numărului $11\cdot x$ la y.

Prof. Adriana Dragomir, Oţelu – Roşu

V.134 Găsiţi cel mai mic număr natural nenul b pentru care există a natural nenul astfel încât:
i) restul împărţirii lui a la b este 3;
ii) restul împărţirii lui $2\cdot a$ la $3\cdot b$ este 11.

Prof. Adriana Dragomir, Oţelu – Roşu

V.135 Determinaţi numerele a şi b pentru care $\overline{ba}-\overline{ab}$ este multiplu de 4, iar $\overline{ba}+\overline{ab}$ este multiplu de 5.

Prof. Adriana Dragomir, Oţelu – Roşu

V.136 Precizaţi, justificând răspunsul, dacă există numere naturale n pentru care $2^n+3\cdot 2^{n+1}=2009$.

Prof. Adriana Dragomir, Oţelu – Roşu

V.137 Găsiţi toate perechile (A,B) de mulţimi A şi B care satisfac următoarele condiţii:
a) A şi B au câte trei elemente, numere naturale nenule;
b) suma elementelor mulţimii A este egală cu suma elementelor mulţimii B şi este egală cu 10;
c) $A\cap B$ are un singur element.

Prof. Adriana Dragomir, Oţelu – Roşu

V.138 Aflaţi ultimele patru cifre ale numărului

$$n=3^{2009}+3^{2008}+3^{2006}+3^{2003}.$$

Prof. Pavel Rîncu, Dalboşeţ

V.139 Arătaţi că nu existe numere naturale x şi y pentru care $N=x^8+7(10y^2+1)$ este pătrat perfect.

Prof. Pavel Rîncu, Dalboşeţ

Clasa a VI-a

VI.130 La începutul anului şcolar, 40% din elevii unei clase sunt fete. În timpul anului şcolar mai vin trei băieţi şi pleacă o fată şi astfel, la sfârşitul anului şcolar sunt de două ori mai mulţi băieţi decât fete. Câţi elevi au fost la începutului anului şcolar în acea clasă?

Concurs Bucureşti, 2003

VI.131 Să se arate că printre oricare cinci numere naturale nenule există cel puţin două a căror diferenţă este divizibilă cu 4.

* * *

VI.132 Fie $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle BOC$ două unghiuri adiacente şi suplementare, iar M şi P două puncte astfel încât M este în interiorul unghiului $\measuredangle AOB$, iar P în interiorul unghiului $\measuredangle BOC$. Dacă M este egal depărtat de $(OA$ şi $(OB$, iar P este egal depărtat de $(OB$ şi $(OC$, determinaţi măsura unghiului $\measuredangle MOP$.

Prof. Irina Avrămescu, Reşiţa

VI.133 Fie a,b,c trei numere naturale nenule care satisfac condiţia $a=\dfrac{b}{0,2}=\dfrac{c}{0,(3)}$, iar numerele $a+b$ şi c sunt prime între ele.
a) să se arate că $a+b$ este divizibil cu 18;
b) să se determine numerele a,b,c.

Prof. Nistor Budescu, Dalboşeţ

VI.134 Se dau numerele $a=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+...+\dfrac{2002}{2003}$, $b=\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{5}{7}+...+\dfrac{4003}{4005}$, $c=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot...\cdot\dfrac{2001}{2002}$ şi $d=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{7}\cdot...\cdot\dfrac{2002}{2003}$. Arătaţi că:

a) $a>b$; b) $c<d$; c) $d^2>\dfrac{1}{2003}$.

Prof. Lucian Dragomir, Oţelu – Roşu

VI.135 Măsurile unghiurilor (măsurate în grade) din jurul unui punct, sunt *x, y, z, t* .Numerele *2x, 3y, 4z, 5t* sunt direct proporționale cu 4, 6, 12 şi respectiv *a*, unde *a* este un număr natural nenul. Determinați *a, x, y, z, t*, ştiind că $x+t=y+z$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

VI.136 Determinați numerele întregi *x* şi *y* pentru care
$2xy-2009=4x-3y$.

Concurs Vaslui , 2003

VI.137 Se consideră numerele naturale $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6$. Spunem că mulțimea $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$ are proprietatea *(P)* dacă pentru orice $k\in\{3,4,5,6\}$, există $i,j\in\{1,2,3,4,5,6\}, i\neq j$, astfel încât $a_k=a_i+a_j$. Să se afle câte mulțimi cu proprietatea *(P)* sunt de forma $\{1,2,a,b,c,d\}$.

Concurs Iaşi, 2003

VI.138 Să se găsească perechile (a,b) de numere naturale pentru care

$$5a-2b\le 3 \text{ şi } 2a+b\le 3 .$$

Prof. Heidi Feil, Oțelu – Roşu

VI.139 Să se determine numerele prime *a* şi *b* pentru care

$$\frac{a}{b+1} \text{ şi } \frac{2b+2}{a-1} \text{ sunt numere naturale.}$$

Prof. Adriana Dragomir, Oțelu – Roşu

Clasa a VII-a

VII.130 Fie: $S=1+2+3+...+n$ şi

$$P=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right), n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$$

Arătați că numărul $A=\sqrt{S\cdot P}$ este rațional.

Prof. Delia Marinca, Timişoara

VII.131 Pentru $n\in\mathbb{N}$, considerăm numărul $A(n)=\sqrt{n^2+7n+12}$

a) Aflați prima zecimală a numărului $A(0)$.

b) Aratați că $\forall n\in\mathbb{N}$,numărul $A(n)$ este irațional.

c) Arătați că, partea fracționară a numărului $A(n)$ este mai mică decât 0,5, $\forall n\in\mathbb{N}$..

Prof. Irina Avrămescu, Reşița

VII.132 Să se afle $x,y\in\mathbb{N}$ astfel încât $(x-3)(y-2)=72$ şi numărul $x+y$ să fie pătrat perfect sau cub perfect.

Prof. Irina Avrămescu, Reşița

VII.133 Câte triunghiuri dreptunghice ale căror laturi sunt numere naturale au o catetă egală cu 15?

Prof. Loreta Ciulu, Reşița

VII.134 Se dă un trapez *ABCD*, $AD>BC$, $BC\parallel AD$. Pe *CD* se ia un punct *K*, pe *AB* punctul *L* astfel încât $AK\parallel CL$. Să se arate că $DL\parallel BK$.

Prof. Loreta Ciulu, Reşița

VII.135 Arătați că $\sqrt{6^n+5n+7}\notin\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Prof. Pavel Rîncu, Dalboşeț

VII.136 Determinați măsurile unghiurilor unui triunghi ştiind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) un unghi este congruent cu complementul altui unghi;
b) măsurile a două unghiuri sunt direct proporționale cu numerele 1 şi 3.

Prof. Constantin Apostol, Rm.Sărat

VII.137 a) Dacă $3x=\overline{3,a}$, care este cel mai mic număr cu care poate fi egal *x* ? Dar cel mai mare ?

b) Dacă $7x=\overline{9,b}$, care este cel mai mic număr cu care poate fi egal *x* ? Dar cel mai mare ?

c) Să se determine numărul x şi cifrele nenule a , b pentru care avem: $\begin{cases} 3x = \overline{3,a} \\ 7x = \overline{9,b} \end{cases}$

Prof. Constantin Apostol, Rm.Sărat

VII.138 Suma pătratelor a 18 numere naturale nenule este 2009.Arătaţi că cel puţin două dintre numere coincid.

* * *

VII.139 Fie V mulţimea vârfurilor unui poligon regulat cu 20 de laturi şi $A \subset V$ o submulţime arbitrară.Să se arate că:

a) Dacă A are cel puţin 9 elemente, atunci există în A trei puncte care sunt vârfurile unui triunghi isoscel;

b) Dacă A are cel puţin 11 elemente, atunci există în A trei puncte care sunt vârfurile unui triunghi dreptunghic isoscel.

Concurs Cluj – Napoca, 2008

Clasa a VIII-a

VIII.130 Să se găsească perechile de numere naturale consecutive astfel încât cubul primului număr şi pătratul celuilalt să fie tot numere consecutive.

Prof. Sânefta Vladu, Moldova Nouă

VIII.131 Un corp în formă de paralelipiped dreptunghic are la bază un dreptunghi cu dimensiunile de $x^2 - 1$ şi $(x+2)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Dacă $h = \dfrac{1}{(x+2)(x^2+3x+2)}$, determinaţi valorile reale ale lui x , astfel încât volumul corpului să fie subunitar.

b) Dacă $h = 3$, determinaţi valorile lui x astfel încât aria laterală a corpului să fie minimă şi determinaţi această valoare.

Prof. Sânefta Vladu, Moldova Nouă

VIII.132 Se consideră triunghiul echilateral ABC , un punct O în interiorul triunghiului şi M, N, P proiecţiile punctului O pe $[BC], [CA]$ respectiv $[AB]$. Să se arate că dacă triunghiul MNP este echilateral atunci O este centrul de greutate al triunghiului ABC .

Prof.Mircea Constantinescu, Tg-Jiu

VIII.133 Să se precizeze dacă numărul $a = 2^{30} + 2005^{32}$ este prim, justificând răspunsul.

Prof. Pavel Rîncu, Dalboşeţ

VIII.134 Câte ecuaţii de gradul al doilea cu coeficienţii diferiţi şi care aparţin mulţimii $M = \{-3, 1, 2\}$ există ? Arătaţi că toate aceste ecuaţii au o rădăcină comună.

Prof. Constantin Apostol, Rm.Sărat

VIII.135 Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi M, N, P mijloacele muchiilor $[AB], [CC']$ respectiv $[A'D']$. Să se demonstreze că $B'D \perp (MNP)$.

Prof. Marina Constantinescu, Tismana

VIII.136 Să se demonstreze că dacă $\overline{abc}$ este prim, atunci $b^2 - 4ac$ nu este pătrat perfect.

Prof. Loreta Ciulu, Reşiţa

VIII.137 Arătaţi că, dacă $a, b, c > 0$ şi $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{5}{3}$, atunci

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}.$$

Concurs Arad 2008

VIII.138 Fie mulţimea $A = \{1, 2, 3, ..., 98\}$. Arătaţi că oricum am alege 50 de elemente ale mulţimii A, există două printre ele având suma cub perfect.

Concurs Iaşi 2008

VIII.139 Există $a,b\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a^2+b^2=4^{2009}$? Justificare.

Prof. Marina Constantinescu, Tismana

Clasa a IX-a

IX.130 Să se determine $n\in\mathbb{N}$ şi $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}_+^*$ care satisfac egalităţile: $\begin{cases} x_1+x_2+...+x_n=3 \\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=3 \end{cases}$.

Prof. Pavel Rîncu, Dalboşeţ

IX.131 a) Să se dea un exemplu de număr real a pentru care $\{a\}+\left\{\frac{1}{a}\right\}=1$; b) Să se arate că dacă $a\in\mathbb{R}, a>0$, satisface $\{a\}+\left\{\frac{1}{a}\right\}=1$, atunci $a\notin\mathbb{Q}$.

Concurs Bucureşti 2008

IX.132 Dacă $A\subset\mathbb{R}$ este o mulţime cu cel puţin trei elemente având proprietatea că, pentru orice două elemente distincte $x,y\in A$, rezultă $(x+y)\in\mathbb{Q}$, arătaţi că $A\subset\mathbb{Q}$.

Concurs Bucureşti 2008

IX.133 Să se calculeze suma $\sum_{k=2}^{2009}\frac{a_k}{b_k}$, unde $a_k=\left[\frac{k^2}{4}\right]$ şi $b_k=\left[\frac{k}{2}\right]$ (prin $[x]$ se înţelege partea întreagă a numărului real x).

Prof. Andrei Eckstein, Timişoara

IX.134 Arătaţi că, dacă $x,y>0$ şi $x\cdot y=1$, atunci $\frac{x^2+2}{y+1}+\frac{y^2+1}{x+1}\geq 3$.

Prof. Andrei Eckstein, Timişoara

IX.135 Determinaţi mulţimea A a numerelor reale care se pot scrie sub forma $[-3x]+[-2x]+[-x]+[x]+[2x]+[3x], x\in\mathbb{R}$.

Prof. Andrei Eckstein, Timişoara

IX.136 Dacă M este un punct în interiorul unui triunghi ABC, se notează $AM\cap BC=\{D\}$, $BM\cap CA=\{E\}$ şi $CM\cap AB=\{F\}$ .Să se determine punctul M pentru care produsul $\frac{MA}{MD}\cdot\frac{MB}{ME}\cdot\frac{MC}{MF}$ are valoare minimă.

Concurs Slatina 2008

IX.137 Să se determine numerele reale m pentru care rădăcinile ecuaţiei $x^2-(m+2)x+3=0$ sunt întregi.

Prof. Simina Moica,Arad

IX.138 Să se determine , pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ valoarea maximă a produsului $P=\cos a_1\cdot\cos a_2\cdot...\cdot\cos a_n$, ştiind că $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}$ şi $\cos a_1\cdot\cos a_2\cdot...\cdot\cos a_n=\sin a_1\cdot\sin a_2\cdot...\cdot\sin a_n$.

Prof. Pavel Rîncu, Dalboşeţ

IX.139 Demonstraţi că $\sum_{k=1}^{n-1}k\pi\cdot\sin\frac{k\pi}{n}\geq\frac{n\pi}{2}\cdot ctg\frac{\pi}{2n}$, $\forall n\in\mathrm{N}, n>1$.

Cosmin Istodor, student, Timişoara

Clasa a X-a

X.130 Să se rezolve ecuaţia:

$$20^x-16^x=16\left(8^x+6\cdot 4^x+16\cdot 2^x+16\right)$$

Prof. dr. Vasile Marinca, Timişoara

X.131 Să se rezolve ecuaţia : $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\sqrt{\left(5-2\sqrt{6}\right)^x}=10$.

Prof. Sânefta Vladu, Moldova Nouă

X.132 Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe de modul 1 astfel încât $z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 = 0$.

a) Să se arate că $|z_1 + z_2 + z_3| \in \mathbb{N}$;

b) Aflați numerele dacă $z_2 = \overline{z_1}$ și $z_3 \in \mathbb{R}$.

Prof. Iacob Didraga, Caransebeș,
Olimpiadă Caraș – Severin 2006

X.133 Arătați că ecuația $\log_2(5-3x) = \log_3(2x-1)$ are o unică soluție reală x_0 și $x_0 \in \left(1, \frac{4}{3}\right)$.

Prof. Ion Dumitru Pistrilă, Oravița,
Olimpiadă Caraș – Severin 2006

X.134 Determinați progresiile geometrice de numere naturale $(a_n)_{n\geq 1}$ pentru care suma $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot C_n^k$ este pătrat perfect pentru orice n natural.

Prof. Lucian Dragomir, Shortlist ONM, 2006

X.135 Fie $A = \{1,2,3,4,5\}$. Să se determine numărul funcțiilor $f: A \to A$ cu proprietatea că nu există numere distincte $a, b, c \in A$ astfel încât $f(a) = f(b) = f(c)$.

Concurs Iași, 2004

X.136 Un triunghi ascuțitunghic *ABC* este înscris în cercul de centru *O*, *D* este simetricul lui *C* față de *O*, iar *I* este centrul cercului înscris în triunghiul *ABC*.Să se arate că patrulaterul *ADBI* este paralelogram dacă și numai dacă triunghiul *ABC* este echilateral.

Prof. Nicolae Mușuroia, Baia – Mare

X.137 a) Să se arate că $2^x > x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve ecuația $x + 2^x = \frac{x}{2^x}$.

Prof. Adrian Troie, Sorin Rădulescu, București

X.138 La un turneu de șah oricare doi participanți joacă o singură partidă.După ce au jucat câte două jocuri, 5 participanți părăsesc competiția.La finele turneului s-a constatat că numărul total de partide jucate este egal cu 100. Câți șahiști au participat inițial la turneu ?

Olimpiadă Moldova, 2007

X.139 Pe un cerc se fixează $n+3$ puncte distincte($n \geq 3$), dintre care n se colorează cu roșu, două se colorează cu galben și unul cu albastru. Să se determine:
a) numărul poligoanelor monocolore;
b) numărul poligoanelor bicolore;
c) numărul poligoanelor tricolore.

Prof.Vasile Pop, Cluj – Napoca, Concurs 2008

Clasa a XI-a

XI.130 Să se determine limita șirului definit prin relația de recurență:

$$2x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^4 + 4x_n^2 - 4}{x_n^2 - 1} + 2\sqrt{\frac{x_n^4 + 4x_n^2 - 4}{x_n^2 - 1}}} - \sqrt{\frac{x_n^4 + 4x_n^2 - 4}{x_n^2 - 1} - 2\sqrt{\frac{x_n^4 + 4x_n^2 - 4}{x_n^2 - 1}}}, x_0 = 0,$$

Prof. dr. Vasile Marinca, Timișoara

XI.131 Să se arate că pentru orice matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, avem

$$\frac{1}{2}\left[\det(A+iB) + \det(A-iB)\right] = \det(A) - 1.$$

Cosmin Istodor, student, Timișoara

XI.132 Să se arate că există un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale cu proprietatea că $a_{n+1} = \sqrt{a_n + \alpha}, \forall n \geq 1,$ dacă și numai dacă $\alpha \geq -\frac{1}{4}$.

Prof. Marina Constantinescu, Tismana

XI.133 Se consideră mulțimea $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ b & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Să se arate că dacă $A \in M$ și $A \cdot A^t \in M$, atunci $A = I_3$.

b) Să se determine inversa matricei $\left(A - I_3\right)^2$, știind că $A \in M$ nu este inversabilă.

c) Să se demonstreze că pentru orice matrice $X \in M$ cu $\det X = 0$ mulțimea $\left\{ \left(X - I_3\right)^n \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$ este finită.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

XI.134 Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2a & b+c \\ 2 & 2b & c+a \\ 2 & 2c & a+b \end{pmatrix}$, unde $a,b,c \in \mathbb{R}$, distincte două câte două.

a) Să se determine *rang A*.

b) Să se arate că există matricele $B,C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A = B + C$ și $\det(B+C) = \det B + \det C$.

c) Să se demonstreze că dacă $a+b+c=3$, atunci orice soluție $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ a sistemului $AX = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ verifică relația $x_0 + y_0 + z_0 = \frac{1}{2}$.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

XI.135 Fie $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu rația $r > 0$ cu proprietatea că între oricare doi termeni consecutivi ai progresiei există exact un număr natural. Atunci $r = 1$.

Prof. Mircea Constantinescu, Tg-Jiu

XI.136 Se dă șirul de numere reale definit prin $x_1 > 0, x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n}, \forall n \geq 1$. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^2}$.

Concurs Brașov, 2008

XI.137 Fie *A* și *B* două matrici pătratice de ordin $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, cu proprietatea că există $\alpha \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $\alpha \cdot A \cdot B + A + B = 0_n$. Să se arate că $A \cdot B = B \cdot A$.

Prof. Ciprian Călin, Reșița

XI.138 Fie $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă în $x_0 = 1$ și care are proprietatea că $f(x) = f(x^2 - x + 1), \forall x \in [0,1]$. Arătați că *f* este constantă.

Olimpiadă locală Olt, 2008

XI.139 Determinați funcțiile continue $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care există $k \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $f(0) = 1$ și $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = kx, \forall x \in \mathbb{R}$.

Olimpiadă locală Satu – Mare, 2008

Clasa a XII-a

XII.130 Fie p un număr prim, $p \geq 2$ și polinomul $f = X^3 - (p-2)X - p + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Să se determine p știind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este număr natural divizibil cu 4.

b) Să se demonstreze că polinomul f nu poate avea o rădăcină dublă întreagă.

c) Să se determine p știind că mulțimea rădăcinilor polinomului f formează grup în raport cu operația de înmulțire a numerelor complexe.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

XII.131 Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{\ln(x^n+1)}{x+1}dx$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine I_1.

b) Să se arate că $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

XII.132 Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = [x] + [y], \forall x, y \in \mathbb{R}$, unde $[x]$ desemnează partea întreagă a numărului real x.

a) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $(x-1)*(x+1) = 2$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x*(-x) = a$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se determine părţile stabile M ale lui $\mathbb{R}$, astfel încât legea de compoziţie indusă să admită element neutru pe M.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

XII.133 Dacă P este un polinom de gradul 2008 şi $P(k) = \frac{k}{k+1}, \forall k = \overline{0, 2008}$, calculaţi $P(2009)$.

* * *

XII.134 Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit primitive şi $f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Concurs Galaţi, 2008

XII.135 Determinaţi funcţiile strict crescătoare $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ pentru care $\left| \int_0^1 f(x)e^{nx}dx \right| \leq 2008$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Concurs Iaşi, 2008

XII.136 Să se arate că: $1 \leq \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{6x-x^2-5}}dx \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Prof. Lucian Dragomir, Oţelu – Roşu

XII.137 a) Fie G un grup finit şi A o submulţime a lui G astfel încât $card(A) > \frac{1}{2}card(G)$. Demonstraţi că pentru orice $g \in G$ există $a_1, a_2 \in A$ astfel încât $g = a_1a_2$.

b) Fie K un corp finit. Demonstraţi că pentru orice $x \in K$, există $u, v \in K$ astfel încât $x = u^2 + v^2$.

Concurs Târgovişte, 2008

XII.138 Să se arate că oricare ar fi numerele reale a şi b şi $n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$\left(\int_a^b \cos^n x dx\right) \cdot \left(\int_a^b \cos^{n+1} x dx\right) = \frac{1}{n+1}(a-b)(\sin a - \sin b).$$

Prof.Ciprian Călin, Reşiţa

XII.139 Se consideră funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + \ln x$. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ecuaţia $f(t) = x$ are o soluţie unică $t = \varphi(x)$. Să se arate apoi că $\varphi : \mathbb{R} \to (0,\infty), x \to \varphi(x)$ este derivabilă şi să se calculeze $I = \int_1^{1+e} \frac{dx}{1+\varphi(x)}$.

Olimpiadă locală Olt, 2008

Rubrica rezolvitorilor

Punctaje obținute pentru rezolvarea probemelor din RMCS nr.26
(în paranteză apar punctajele realizate pentru ediția a IV-a a Concursului RMCS)

Clasa a III-a

Liceul Hercules Băile Herculane (înv.Maria Daria Pușchiță) Mircea Emilian Golopența 90(90), Brancu Violeta Petruța 90(90), Tudor Oana 90(90), Bujancă Georgiana 90(90).
Liceul General Dragalina Oravița (înv. Livia Crețu)Clepan Daria Ștefania 20(20).

Clasa a IV-a

Liceul Hercules Băile Herculane (Inst.Alexa Gaiță, Înv. Doina Zah, Înv. Felicia Adriana Laitin, Înv. Mirela Bolbotină) Barbu Cristian 90(250), Burcin Andreea 90(260), Lupșan Corina 90(280), Căpățână Alexandra Maria (40),Velcan Anca (50) ,Vlascu Cătălin 90(280), Nicoară Denisa 90(280),Străinescu Andra 90(280), Vătavu-Pepa Călina 90(280), Ciobanu Romina 90(90).
Școala Bolvașnița (Inst. Mihaela Goanță) Vălean Robert 30(70), Știrban Simona 50(90),Mihăilescu Flavius 50(70), Dragu Maria (30), Jura Damarius Cătălin (10).
Liceul Pedagogic Caransebeș(Înv. Elena Minea) Szabo Ciprian 110(250).
Liceul Traian Doda Caransebeș (înv, Ileana Petrescu) Marco Mihai 100(100)
Grup școlar Moldova Nouă (Inst. Claudia Moldovan) Bibere Laurențiu 50(50)
Școala Romul Ladea Oravița(Înv. Camelia Suru, înv.Claudia gavrilescu, înv.Constanța Chiriac) Balmez Bogdan 90(150), Simu Victor 90(1500), Epure Gabriel Vasile (60), Botoș Alexandra Paula 20(20), Cocar Lorena 150(150), Găină Dănuț Ilie 30(30), Borș Maria 90(90).

Clasa a V-a

Liceul Hercules Băile Herculane (Prof. Constantin Bobotină) Popa Andrei(146), Cîrdei Alex-Cosmin 132(264), Urzică Ionuț Sorin146(292), Cernescu Maria (146), Moagă Ducu Alecsandru 194(496), Stanciu Ana-Maria 247(552), Gherghina Liviu-Nicu (50), Stanciu Ani 242(557), Grigorie Denisa Bianca (215).
Școala Bozovici (Prof.Dochia Radulea) Carban Văsîi Sandra (60).
Liceul Pedagogic Caransebeș (Prof. Dorina Humița,Prof. Marița Mirulescu) Benec Emanuela (47)Belciu Anemona 170(230), Semenescu Raluca 70(130), Pelin Anitta 70(110), Cocoș Daiana (60), Nedelcu Loredana (60), Nicoară Ioana 110(170), Sturm Alexandru 90(90), Zamfir Maria 70(70).
Școala Generală 2 Reșița (Înv. Florica Boulescu, prof.Marius Șandru) Neațu Monica 90(238), Ursul Larisa Iasmina (40), Ciobanu Anca 120(250), Azap Denisa (40), Vasilovici Camil 20(100).
Școala Generală 6 Reșița (Prof. Susana Simulescu) Alexa Luana Maria 50+118(168).
Școala Romul Ladea Oravița (Inst. Liliana Crăciun,Prof.Camelia Pîrvu, Prof. Gheorghe Simion) Balmez Andrada-Ioana 165(432), Murgu Teodora 170(357),Trăilă Casian (97), Chirciu Cătălina 50(160),Mavrigu Alexandru 108(108).
Școala Generală 9 Reșița(Înv.Lidia Adamescu, prof. Irina Avrămescu, prof.Vasile Chiș) Ștefan Andrei 30(205), Bușoi Natalia (138), Munteanu Ionuț 196 (444), Mîcnea Alexandra (55), Pepa Nicoleta (55), Boldea Cristina 87 (222), Cata Larisa (135), Gaiță Nadine 140(379), Burghină Vali(48), Antonescu Florina (158), Costea Denis-Loren 170(170), Anănuță Adela Marina 150(150), Ciortan Ionuț Petru 163(163), Pupăzan Andreea 180(180), Muscu Dragoș 160(160), Bochizu Constantin 160(160), Pupăzan Andreea 180(180).
Liceul Gen.Dragalina Oravița(Prof.Aurica Lazarov) Țibulca Andrei 137(207).
Școala Generală 1 Oțelu-Roșu (Înv. Luminița Orszari, Prof. Heidi Feil) Szalma Eric 96(206), Toader Răzvan 157(233), Cerna Miruna (70), Pândici Cristian Andrei 110(160), Țolea Loredana Oana 175(292), Simescu Larisa Geanina 130(220), Trifu Teodora (117), Buzzi Cristian Alexandru 176(283), Dudău Ana-Maria (107), Opruț Raul 134(134), Szatmari Larisa Maria 175(175), Bauer Richard 100(100) .

Şcoala Generală nr.3 Oțelu-Roşu (înv. Irina Cîrstea, Prof. Felicia Boldea, prof.Daniela Suciu) Preda Sebastian Mihai (30), Barbu Lidia 107(107), Micşescu Cristian 50(50), Carp Andreea 70(70), Piess Helmuth 50(50), Drăgan Alexandra Diana 147(147).
Liceul Traian Doda Caransebeş (Înv.Violeta Ionescu, Prof. Delia Dragomir, Prof. Janet Miuță Bocicariu)
Iliescu Alexandru 90(289), Jurescu Ioan Cristian 87(147), Nistor Răzvan 96(146), Dodoiu Oana 117(167), Stoicănescu Petru 167(247).
Grup Şcolar Moldova Nouă(Înv. Anastasia Cristina Stroia, prof.Vasilica Gîdea) Stănuță Nicolae Eduard (40), Stoleriu Nicolae Denis (90), Anghel Alexandru (40), Toma Monica (40), Costinaş Cristian (40), Chiriac Bianca 50(50), Petraru Ioana 90(90), Albu Anisia 30(30).
Şcoala Rusca Teregova (Prof. Sorin Ciucă) Stepanescu Maria 144(282), Humița Ionela 92(219), Banda Ioan Alexandru Ilia 152(217), Gherga Ana (92), Radu Alexandru Ionuț 57(160), Stepanescu Alina Iconia (92)
Şcoala Dalboşeț(Prof. Pavel Rîncu)Orbulescu Ionuț 70(70), Baba Marian Ilie 80(80)
Şcoala Vîrciorova (prof. Ioan Liuba) Bănescu Ramona 30(30).

Clasa a VI-a

Liceul Hercules Băile Herculane (Prof. Constantin Bolbotină, prof. Marius Golopența) Bălaj Denisa Maria 120(302), Şandru Ilie Daniel 257(717), Gherghina Liviu (200), Dancău Anca Ionela 256(508), Dimcea Alexandra Ana Maria 253(563), Coman Petre Daniel 215(502), Török Bogdan (110), Mihart Georgiana 254(589), Ferescu Liana 247(443), Vlaicu Dana (107),Şuşară Bianca (88), Croitoru Sabina 120(302), Domilescu Manuel (160).
Şcoala Berzasca (Prof. Dana Emilia Schiha) Vulpescu Iulia 276(512), Buga Ioana 100(100), Velicicu Alina Andreea 236(236).
Şcoala Bozovici(Prof.Maria Bololoi) Mitocaru Patricia 76(451), Iancu Mara-Timea(110), Ruva Mihaela 76(416), Pervu Georgiana (110), Nicola Ion Cristian (60), Hânda Mihai (110).
Liceul Eftimie Murgu Bozovici (Floarea Haramuz-Şuta) Dancea Nicolae (212), Drăgilă Ioan Marian (197), Suveți Anca Marinela (211).
Şcoala Ciclova Română (Prof. Geta Mîşcoi) Crăciunel Viluțu (63), Munteanu Andreea (118), Muia Diana (38).
Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Maria Crasnianic) Toma Alexandru 116(176).

Şcoala Generală Dalboşeț (Prof.Pavel Rîncu) Țunea Lia 50(114), Motorga Elisa Mirela 60(175).
Şcoala Generală nr. 6 Reşița (Prof. Susana Simulescu) Ciulu Miruna Dalila 160(630).
Şcoala Generală nr. 7 Reşița (Prof. Lia Roşu, Prof. Mircea Diatlov) Smarandache Andreeas 170(170).
Liceul de Artă Reşița (Prof. Adriana Mara) Petraşcu Nicoleta 60(130).
Şcoala Generală nr. 9 Reşița (Prof. Ion Belci,Prof.Irina Avrămescu) Peptan Andrei Valentin 140(466),Pangica Antonio 170(421**)**,Bercean Bogdan Alexandru 90(485*),* Munteanu Ionuț Valentin 203(203).
Şcoala Romul Ladea Oravița (Prof. Mariana Iancu, Prof. Camelia Pîrvu) Gheorghişan Călin 203(648), Dănilă Mădălina 203(732),Pîrvu Ancuța 190(362),Alexa Anca 203(203).
Şcoala Generală 3 Oțelu-Roşu (Prof. Daniela Suciu, Prof. Felicia Boldea) Băilă Cristina 154(304),Românu Nicoleta 87 (245), Barbu Daniel 117(231),Manea Florina (122), Dulan Ioniță (80),Preda Cristina 116(223), Vladu Alina 146(339), Lazăr Răzvan Ionuț 84(263),Haba Beatrice 117(147).
Şcoala Generală 1 Oțelu-Roşu (Prof. Heidi Feil, prof.Anişoara Popa)
Guțan Iuliana (284), Buță Laurian-Paul 137(511), Ştefănescu Andrei 220(775), Raț Laura(70),Iamandei Daiana 102(299),Roşu Ionuț 46(106),Trica Alexandru (140), Manu Cristina 68(68).
Grup Şcolar Oțelu-Roşu (Prof. Iulia Cecon) Olaru Ionuț 60(237), Roi Karmina (70), Pascu Dalida (50), Călău Maria 60(194). .
Liceul Pedagogic Caransebeş (Prof. Dorina Humița, Prof. Antoanela Buzescu) Bivolaru Iulia Mălina 70(400), Băzăvan Răzvan Alexandru 40(130), Băzăvan Oana Cătălina 40(137), Dinulică Petru Augustin 180(640), Dinulică Septimiu 180(640),Dragomir Roberto 30(110),Rîcă Anda Elena 100(100), Bogdan Roxana 70(70).
Şcoala Rusca Teregova (Prof. Sorin Ciucă) Stepanescu Georgeta 115(187),Oprişan Cristina (42),Blaj Ioan 38(201),Moacă Nicolae 30(237),Gherga Marinela 115(115), Milu Ionela 78(78), Stepanescu Alina 115(115).
Şcoala Topleț (Prof. Simion Roman) Ciucă Octavian 60 (174).

Clasa a VII-a

Şcoala Anina(Prof. Marin Cleşiu) Paiu Andrada (20).
Şcoala Bănia(Prof.Iancu Cleşnescu) Odobaşa Daniel (107).
Şcoala Bozovici(Prof. Iosif Găină, Prof.Maria Bololoi, Prof.Dochia Rădulea, Prof. Haramuz Şuta Floarea) Vrancea Andreea (303), Ştefan Ana (120), Munteanu Mădălina (140), Holbotă Viorica (97), Beloescu Cristina (107), Hotac Adina (213), Zarva Cureci Lucia Nicoleta 80(80), Zaberca Florin Vasile 80(80), Mudra Marilena Adela 80(80).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (Prof. Dorina Humiţa) Ban Ioana 40(158), Stanciu Georgiana Maria (40).
Şcoala Generală Dalboşeţ (Prof. Pavel Rîncu) Băcilă Aurelian Alexandru 60(110), Careba Denisa 70(126).
Şcoala Lăpuşnicu Mare (Prof. Petru Pungilă) Goşa Violeta 98(158), Vodă Andreea 96(146).
Grup Şcolar Moldova Nouă(Prof. Vasilica Gîdea) Paunovici Veronica (28),Oprea Adelina 46(194), Tarsoly Carla 123(253), Beloia Marinela 40(130).
Şcoala Generală 2 Reşiţa (Prof. Mariana Drăghici) Ţeudan Adina 170(430), Popa Andreea (100), Onofrei Iulia 20(218), Drăghici Livia Liliana 170(570), Aghescu Monica Elena 90(410).
Şcoala Generală nr. 9 Reşiţa (Prof. Irina Avramescu, Prof.Vasile Chiş, Prof. Ion Belci) Peptan Alexandru 150 (618), Colgea Alexandru 120(250), Lazăr Silviu Ioan 100(510), Muscai Lorena (135).
Liceul Gen.Dragalina Oraviţa (Prof. Mihai Lazarov) Sava Isabella (58).
Şcoala Romul Ladea Oraviţa (Prof. Camelia Pîrvu, Prof. Minodora Savu) Marocico Flavius (30), Serafin Dennis George (196).
Şcoala Generală 1 Oţelu-Roşu (Prof. Heidi Feil, Prof. Anişoara Popa) Pop Cristian Ionuţ 140(426), Radu Ionela 60(322), Tuştean Patricia 80(250), Boran Cristian (40), Alexa Alexandra 87(247), Bidilici Răzvan 60(150),Ilic Denis 87(123),Damian Cristian 80(80).
Şcoala Generală 3 Oţelu-Roşu (prof.Felicia Boldea) Cărăuşu Robert 100(348), Băilă Diana 80(302) ,Tănasă Raul 106(330), Preda Gabriela Dagmar 140(422), Mihuţ Marius Cosmin (107).
Grup Şcolar Industrial Oţelu-Roşu(Prof. Iulia Cecon) Vărgatu Alina (70), Popescu Ana Maria (70).
Şcoala Vîrciorova (Prof.Ioan Liuba) Turnea Ion (70).

Şcoala Rusca Teregova (Prof. Sorin Ciucă) Humiţa Ileana 125(257), Humiţa Maria (30), Humiţa Cosmin 134(258), Ursulescu Ionela 138(283), Banda Elisabeta (87), Oprişan Paula Cristina 48(48).
Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Florin Ciocan) Szabo Ildiko 100(250).
Grup Şcolar Construcţii Maşini Caransebeş (Prof. Sebastian Corîci) Bădescu Patricia Liana (230),Abagiu Şelner Raluca (70).

Clasa a VIII-a

Şcoala Bozovici (Prof. Iosif Găină) Barbeş Cezara 90(334), Nicola Alexandra 90(332), Băcilă Cristiana 80(306), Curescu Elena Cristina (166),Bratosin Felix (40), Drăgilă Cătălin Sebastian 80(190) .
Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Adrian Dragomir) Stoicănescu Gelu 40(300), Popa Andreea 20(20).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (Prof. Mariţa Mirulescu) Timofte Tina 70(258),Benec Sînziana (50).
Şcoala Generală Dalboşeţ (Prof. Pavel Rîncu) Jarcu lorena Maria 80(214), Marin Lidia Mădălina (58), Căpăţînă Dana Maria (57).
Liceul Hercules Băile Herculane(Prof.Marius Golopenţa) Tabugan Dana 165(285).
Grup Şcolar Moldova Nouă(Prof. Vasilica Gîdea) Păunovici Rebeca (40).
Şcoala Rusca Teregova (Prof. Sorin Ciucă) Codoşpan Florinela 72(302),Davidescu Toma 62(93), Blaj Marinela (57), Humiţa Maria 107(277),Banda Traian Daniel (72), Banda Petrică 97(97).
Şcoala Generală 2 Reşiţa (Prof. Mariana Drăghici) Pascu Andra Diana 60(240), Hulban Gabriel Adrian (118).
Şcoala Generală 1 Oţelu-Roşu (Prof. Heidi Feil)Krokoş Lorena 90(403), Kuhn Anne Marie 80(393).
Grup Şcolar Industrial Oţelu-Roşu (Prof. Adriana Dragomir) Dumitresc Cecilia 120(296), Nasta Laura 120(296).
Şcoala Vîrciorova (Prof. Ioan Liuba) Măran Marius 86(246).

Clasa a IX-a

Şcoala Bozovici (Prof. Maria Bololoi) Borchescu Anamaria (60), Borozan Florina (48).
Liceul Eftimie Murgu Bozovici (Prof. Dănilă Berbentea) Derlean Pavel 85(253)
Liceul Traian Doda Caransebeş(Prof. Delia Dragomir, Prof. Lavinia Moatăr) Mocanu Ioana 80(347), Paşan Petru 106(316), Matei Sergiu 78(178), Szabo Cristian 100(168), Faur Cosmin 78(78).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (Prof. Dorina Humița, Prof. Antoanela Buzescu) Semenescu Anca 37(334), Borcean Gheorghe (50), Magu Georgiana 68(111).
Grup Şcolar Oțelu-Roşu (Prof. Lucian Dragomir) Duma Andrei Florin 45(189), Tuştean Claudiu 40(127), Buliga Adrian Denis 40(132), Bugariu Timeea 32(117),Bugariu Răzvan 76(162).
Liceul Gen.Dragalina Oravița (Prof.Mihai Lazarov) Goian Raluca Mădălina 74(84).

Clasa a X-a

Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Delia Dragomir, Iacob Didraga) Vizicicanici Mihaela (65), Stolojescu Iasmina 70(128), Zanfir Cristian 78(314), Bona Petru 140(392), Prunar Victor 103(546), Hurduzeu Iconia 80(326), Todor Elena (156), Galescu Dan 177(273), Ciucă Cristian Sorin 52(128).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş(Prof. Antoanela Buzescu) Marta Marian Sebastian 78(316).
Liceul Traian Lalescu Reşița (Prof. Ovidiu Bădescu) Simion Larisa 47(107), Popovici Georgian 49(136), Meşter Sergiu 102(247).
Grup Şcolar Industrial Oțelu-Roşu(Prof. Lucian Dragomir) Atinge Carina 132(304), Cococeanu Oana 117(317), Ştefănigă Sebastian (140), Bărângă Sergiu (53).
Liceul Gen.Dragalina Oravița(Prof.Mihai Lazarov)Pricop Romina 56(245), Persu Daniel (31).
Grup Şcolar Moldova Nouă (Prof. Lăcrimioara Ziman) Istudor Deian 104(197), Vireanu Adelina (45), Calotă Bianca (45), Radoicovici Iasmina (45), Harabagiu Dragana Gabriela 50(68), Marişescu Flavius (43), Pucă Alexandra Elena 47(47).

Clasa a XI-a

giul Național Moise Nicoară Arad (Prof. Ovidiu Bodrogeanu) Adina Vlad 67(202)
Liceul Tata Oancea Bocşa (Prof.Ioan Todor) Stăniloiu Ovidiu 100(328).
Liceul Hercules Băile Herculane(Prof.Constantin Bolbotină) Stolojescu Anca (115).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (Prof. Lavinia Moatăr) Moatăr Alexandra (110), Jdioreanțu Doriana (55), MiculescuMatei (95), Colțan Călin (82), Blidariu Florentina (90), Timofte Andrei (85), Megan Ligia (116), Milcu Roxana (158), Enăşel Ion (95), Dumitrescu Otilia (84), Ciobanu Claudiu (85), Humița Gheorghe (87), Stefan Emanuel (84), Carabin Claudia (85), Neamțiu Nicoleta (85), Babeu Nicolae (66), Bîrsan Mirela(95), Muntian Adriana (85), Săbăilă Marius (93), Blidariu Florentina (55), Voinea Alexandra (40), Hromei Diana (57), Teodorescu Silviu Petru (76), Stoica Georgian (10), Daia Daniela (36), Lazăr Ioan(36), Vornic Iosif Adrian (46), Turcan Vlad (38), David Bogdan (38), Firan Maria Mirabela 18(48), Galamba Ionel 38(38).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (Prof. Antoanela Buzescu) Mureşan Ana-Maria 60(210), Mureşan Alexandru Ioan 60(210).
Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Lavinia Moatăr, Prof. Iacob Didraga) Țiu Mihai Nicanor (55), Bălulescu Bianca Veronica (67), Galamba Ionel Marinel (91), Aghescu Alina Mihaela (57), Cristescu-Loga Cerasela (58), Ionaşcu Simona (75), Florea Maria Adelina (27), Turnea Ana-Maria (75), Negrei Mihaela (45), Stolojescu Oana (75), Turnea Adasena (50),Train Anca (117),Rotaru Nicolae (27), Toth Lavinia (28),Cornean Luiza (30),Blidariu Mihaela (30), Serbescu Cristina 30(30).
Grup Şcolar Industrial Oțelu-Roşu (Prof. Lucian Dragomir) Bugariu Dan 32(234), Lupu Vlad (50), Moisescu Mihaela 72(102), Damian Raluca 43(113).

Clasa a XII-a

Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (Prof. Lavinia Moatăr) Gurgu Caius (30), Kremer Emanuela (30), Iliescu Marcel (30), Ciortan Marius (30).
Grup Şcolar Industrial Oțelu-Roşu (Prof. Lucian Dragomir) Unguraş Dragoş (160), Buzuriu Alina (30), Dragomir Lucia (30), Beg Apostol (30).
Liceul Gen.Dragalina Oravița (Prof.Mihai Lazarov) Nezbeda Harald 53(158), Răşinariu Lucian 20 (128).