ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE DE ORDINUL al II – lea

1. Ecuaţii cvasiliniare. Forme canonice

1. 1. Problema lui Cauchy

$$F(x,y,z,t,u,u_x,\ldots,u_t,u_{xx},\ldots,u_{tt})=0 \qquad (1)$$

este *forma generală a unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea*, pentru o funcţie u de patru variabile reale x,y,z,t cu semnificaţii posibile x, y, z coordonatele unui punct $M \in D \subset R^3$, t, timpul, u o mărime fizică ale cărei valori depind de M şi t.

Iniţial studiem ecuaţii de forma (1).

Definiţia 1. O funcţie $f : D \subset R^2 \to R$ (D deschisă) se numeşte *soluţie* a ecuaţiei (1)pe mulţimea D dacă:

(s_1) f admite derivate parţiale de ordinul al doilea pe D

(s_2) $(x, y, f(x, y), f_x(x, y),\ldots, f_{yy}(x, y)) \in E, (\forall)(x, y) \in D$

(s_3) $F(x, y, f(x, y), f_x(x, y),\ldots, f_{yy}(x, y) = 0, (\forall)(x, y) \in D$

Dacă f este soluţie pe D a ecuaţiei (1), suprafaţa S de ecuaţie $z = f(x, y), (x, y) \in D$ se numeşte *suprafaţă integrală* a ecuaţiei (1).

Definiţia 2. O ecuaţie de forma:

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \qquad (2)$$

se numeşte ecuaţie *cvasiliniară*.

$a, b, c : D \subset R^2 \to R$ (D domeniu), $d : D \times R^3 \to R$.

Dacă $d\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma(x, y)u + \delta(x, y)$ cu

$\alpha, \beta, \gamma, \delta : D \to R$, ecuaţia se numeşte *liniară*.

Dacă $\delta(x, y) = 0 \ (\forall)(x, y) \in D$ ecuaţia se numeşte *liniară şi omogenă*.

1.2. Caracteristici

Ecuaţia diferenţială

$$a(x, y)y'^2 - 2b(x, y)y' + c(x, y) = 0 \tag{3}$$

cu o singură funcţie necunoscută. Dacă luăm y ca parametru rămâne de determinat funcţia x din ecuaţia diferenţială:

$$a(x, y) - 2b(x, y)x' + c(x, y)x'^2 = 0 \tag{4}$$

Prin abuz de limbaj oricare din ecuaţiile (6), (7), (8) se numeşte *ecuaţia diferenţială a caracteristicilor ecuaţiei* (3), deşi curbele integrale ale acestor ecuaţii sunt curbe din domeniul D, proiecţii ale curbelor caracteristice.

Să considerăm de exemplu, ecuaţia (7). Aceasta conduce la două ecuaţii diferenţiale ordinare, sub forma canonică:

$$y' = \mu_1(x, y) \qquad y' = \mu_2(x, y) \tag{5}$$

unde μ_1 şi μ_2 sunt rădăcinile ecuaţiei: prin $y' = \mu$ obţinem

$$a\mu^2 - 2b\mu + c = 0 \tag{6}$$

Integralele generale ale ecuaţiilor (5) pot fi scrise sub forma:

$$\varphi_1(x, y) = k_1 \qquad \varphi_2(x, y) = k_2 \tag{7}$$

unde k_1, k_2 sunt constante arbitrare reale sau complexe după cum φ_1, φ_2 sunt funcţii reale sau complexe.

Considerăm ecuaţia (2) pe un domeniu $D_0 \subset D$ şi o schimbare de variabilă arbitrară $r : D_0 \to \Delta_0 = r(D_0)$.

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi_1(x, y), \ \eta = \varphi_2(x, y) \\ \xi &= \xi(x, y), \ \eta = \eta(x, y) \end{aligned} \tag{8}$$

cu ξ şi η funcţii de clasă C^2 pe D_0.

Fie inversa sa:

$$x = x(\xi, \eta) \qquad y = y(\xi, \eta) \tag{9}$$

Cu această schimbare de variabilă, vom obţine din (2) o nouă ecuaţie cu derivate parţiale pentru funcţia U:

$$U(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \quad \text{pe } \Delta_0.$$

Ţinând seama că:

$u(x, y) = U(\xi(x, y), \eta(x, y))$, avem derivatele funcţiilor compuse

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \tag{a}$$

1.3. Ecuaţii liniare şi omogene în raport cu derivatele de ordinul al doilea, cu coeficienţi constanţi

Un caz frecvent întâlnit în aplicaţii, este cel al ecuaţiei:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (10)$$

cu a,b,c constanţi. Ecuaţia diferenţială a caracteristicilor este:

$$a(y')^2-2by'+c=0$$

a) Cu schimbarea de variabile din teoremă, $\xi=y-\mu_1 x, \eta=y-\mu_2 x$ se obţine forma canonică:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta}=0 \qquad (11)$$

Ecuaţia (11) se scrie $\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)=0$

Deci $\frac{\partial U}{\partial\eta}=f(\eta)$(nu depinde de η) unde f este o funcţie arbitrară care admite primitive cel puţin local.

Fie ξ una din primitive. Din ultima egalitate rezultă că:

$$U(\xi,\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$$

b) Cazul când $b^2-ac=0$. Dacă a = 0 sau c = 0 atunci b = 0 şi suntem în forma canonică.

Dacă $a\neq 0$, ecuaţia diferenţială a caracteristicilor se reduce la $ay'-b=0$.

Soluţia generală a acestei ecuaţii fiind ay – bx = k, schimbarea de variabile $\xi=ay-bx, \eta=x$ transformă ecuaţia dată în :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0, \text{ de unde } U(\xi,\eta) = \eta\varphi(\xi) + \psi(\xi)$$

cu φ şi ψ arbitrare. Revenind la vechile variabile

$u(x, y) = x\varphi(ay - bx) + \psi(ay - bx).$

c) Dacă $b^2 - ac < 0$, forma canonică este ecuaţia lui Laplace:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0$$

pentru care nu mai putem scrie mulţimea soluţiilor folosind funcţii reale arbitrare.

Aplicaţii

1. a. Să se determine tipul ecuaţiei:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(2x^2 - y + 3\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

1.b. Luaţi un punct în fiecare domeniu. R:

$\delta = b^2 - ac = x^2 - 2x^2 + y - 3 = -x^2 + y - 3.$

După cum $\delta > 0, = 0, < 0$ ecuaţia este de tip hiperbolic, parabolic sau eliptic. Se va lua un punct deasupra parabolei $y = x^2 + 3,$ unul pe ea respectiv un punct sub parabolă.

2. Aduceţi la forma canonică:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

3. Aplicăm schimbarea de variabile potrivită

3.1. Ecuaţia caracteristică este:

$$2\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-1=0$$

$$2\mu^2-\mu-1=0 \Rightarrow \mu_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4} \Rightarrow \begin{cases}\mu_1=1\\ \mu_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

adică $\frac{dy}{dx}=1, \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}$. Soluţiile generale ale acestor ecuaţii diferenţiale sunt: $x-y=c_1, 2y+x=c_2$.

Făcând schimbarea de variabile $\xi=x-y, \eta=x+2y$ cu formulele (a) de derivare obţinem:

$$\boxed{3\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\eta}=0.}$$

4. Determinaţi soluţiile ecuaţiilor cu condiţiile iniţiale specificate.

$$\boxed{2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-7\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0}$$

cu $u(x,0)\Big|_{x=0}=y^3, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=y.$

R: Cu $\xi=3x+y$ şi $\eta=2y+x$ ajungem la forma canonică:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0, \text{ implică } \frac{\partial u}{\partial\xi}=f(\xi), u=\int f(\xi)d\xi+h(\eta)=g(\xi)+h(\eta)$$

Deci $u(x,y)=g(3x+y)+h(2y+x)$.

Cu condiţiile iniţiale: $u(0,y)=y^3, \frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=y$ obţinem:

$$\begin{cases} u(0,y) = g(y) + h(2y) = y^3 & (1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 3g'(y) + h'(2y) = y & (2) \end{cases}$$

Integrând (2) în raport cu y avem:

$$\begin{cases} 3g(y) + \dfrac{1}{2}h(2y) = \dfrac{y^2}{2} + c \\ g(y) + h(2y) = y^3 \end{cases} \quad \text{şi de aici} \quad \begin{cases} g(y) = \dfrac{1}{5}y^2 - \dfrac{1}{5}y^3 + k \\ h(2y) = \dfrac{6}{5}y^3 - \dfrac{1}{5}y^2 - k \end{cases}$$

şi

$$\left.\begin{aligned} g(3x+y) &= \frac{1}{5}(3x+y)^2 - \frac{1}{5}(3x+y)^3 + k \\ h(x+2y) &= \frac{3}{20}(x+2y)^3 - \frac{1}{20}(x+2y)^2 - k \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$