Capitolul 5

INTEGRALE CURBILINII ŞI DE SUPRAFAŢĂ

5.1 Integrale curbilinii de tipul I

Considerăm:

1) $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathcal{E}_3 \equiv \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \to f(x, y, z)$,

2) curba $\Gamma \subset D$ netedă, dată în parametrizarea $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$,

3) $f \circ \vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}$, $t \to (f \circ \vec{r})(t) = f(\vec{r}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$,

4) $(f \circ \vec{r}) . \left\|\dot{\vec{r}}\right\| : [a, b] \to \mathbb{R}$, $(f \circ \vec{r}) . \left\|\dot{\vec{r}}\right\|(t) = (f \circ \vec{r})(t) \left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\| =$

$$f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}.$$

Definiţia 1. Spunem că funcţia f este **integrabilă** pe curba Γ dacă $(f \circ \vec{r}) . \left\|\dot{\vec{r}}\right\| \in \mathfrak{R}_{[a,b]}$. Integrala $\int_a^b (f \circ \vec{r})(t) \left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\| dt$ o vom numi **integrala curbilinie de tipul I** (sau de **speţa I-a**)

Notăm

$$\int_\Gamma f(x, y, z)\, ds = \int_a^b (f \circ \vec{r})(t) \left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\| dt.$$

Observaţia 1. Dacă $f(x, y, z) = 1$, $(\forall)(x, y, z) \in \Gamma$, atunci

$$\int_\Gamma ds = \int_a^b \left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\| dt = \ell_\Gamma.$$

PROPRIETĂŢILE INTEGRALEI CURBILINII DE TIPUL I.

1) Mulţimea funcţiilor integrabile pe curba Γ este spaţiu liniar, notat $\Re_\Gamma$.
2) Aplicaţia

$$\int_\Gamma : \Re_\Gamma \to \mathbb{R}, \text{ este liniară.}$$

3) Integrala curbilinie de tipul I este invariantă la schimbări de repere şi la schimbarea parametrizării pe Γ.

4) Dacă $\Gamma \subset D$ este netedă pe porţiuni, deci există divizarea $a = a_0 < a_1 < ... < a_p = b$ astfel încât $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{p} \Gamma_i$, şi $\Gamma_i = \vec{r}([a_{i-1}, a_i])$ să fie curbe netede, atunci

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds = \sum_{i=1}^{p} \int_{\Gamma_i} f(x,y,z)\,ds.$$

Exemplu. Să calculăm $\int_\Gamma |x-y|\,ds$, unde $\Gamma : \vec{r} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}, t \in [0,1]$.
Avem

$$\dot{\vec{r}}(t) = -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j},\ \left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\| = 1 \text{ şi } (f \circ \vec{r})(t) = f(x(t), y(t)) =$$

$$|\cos t - \sin t| = \sqrt{2}\left|\sin(\tfrac{\pi}{4} - t)\right| \text{ deci } \int_\Gamma |x-y|\,ds = \int_0^\pi \sqrt{2}\left|\sin(\tfrac{\pi}{4} - t)\right| dt =$$

$$\sqrt{2}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin u|\,(-du) = \sqrt{2}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{0} \sin u du = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin u du =$$

$$\sqrt{2}\left([-\cos u]_{-\frac{3\pi}{4}}^{0} - [-\cos u]_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = -2\sqrt{2}$$

5.1.1 Probleme

Problema 1. Să se calculeze integralele curbilinii de speţa I-a :

a) $\int_C \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right) ds,\quad C : \vec{r} = a\cos^3 t\vec{i} + a\sin^3 t\vec{j}, t \in [0, 2\pi], a \gneqq 0;$

b) $\int_C (x^2+y^2)\ln z ds,\quad C : \vec{r} = e^t\cos t\vec{i} + e^t\sin t\vec{j}, t \in [0,1];$

c) $\int_C \frac{ds}{x^2+y^2+z^2},\quad C : \begin{cases} x^2+y^2 = a^2, \\ y = x\tan\frac{z}{b}, \end{cases}$ între $A(1,0,0)$ şi $B(1,0,2b\pi)$;

d) $\int_C \sqrt{x^2+y^2}ds,\quad C : \vec{r} = (1+\cos t)\cos t\vec{i} + (1+\cos t)\sin t\vec{j},$ $t \in [-\pi, \pi]$;

Indicaţii. Se aplică formula de calcul

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds = \int_a^b (f \circ \vec{r})(t)\left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\| dt.$$

5.2 Integrale curbilinii de tipul II

Considerăm

1) $\vec{F} : D \subset \mathcal{E}_3 \to \mathbb{V}_3$, $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$,

2) $\Gamma^+ \subset D$, curbă netedă, orientată, dată în parametrizarea $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a,b]$,

3) $\vec{F} \circ \vec{r} : [a,b] \to \mathbb{V}_3$, $\left(\vec{F} \circ \vec{r}\right)(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) =$

$P(x(t), y(t), z(t))\,\vec{i} + Q(x(t), y(t), z(t))\,\vec{j} + R(x(t), y(t), z(t))\,\vec{k}$,

4) $\left\langle \vec{F} \circ \vec{r}, \dot{\vec{r}} \right\rangle : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\left\langle \vec{F} \circ \vec{r}, \dot{\vec{r}} \right\rangle (t) = \left\langle \left(\vec{F} \circ \vec{r}\right)(t), \dot{\vec{r}}(t) \right\rangle =$

$$P(x(t), y(t), z(t))\,\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\,\dot{y}(t) + R(x(t), y(t), z(t))\,\dot{z}(t).$$

Definiţia 1. Spunem că funcţia $\vec{F}$ este **integrabilă** pe curba orientată Γ^+ dacă funcţia $\left\langle \vec{F} \circ \vec{r}, \dot{\vec{r}} \right\rangle$ este integrabilă pe $[a,b]$.

Vom nota $\int_a^b \left\langle \vec{F} \circ \vec{r}, \dot{\vec{r}} \right\rangle (t)\,dt$ cu $\int_{\Gamma^+} \left\langle \vec{F}, d\vec{r} \right\rangle$ şi o vom numi **integrala curbilinie de tipul II (sau de speţa II-a)** a funcţiei $\vec{F}$ pe curba Γ^+.

Formula de calcul a integralei curbilinii de tipul II va fi

$$(\mathbf{1}) \qquad \int_{\Gamma^+} \left\langle \vec{F}, d\vec{r} \right\rangle = \int_a^b \left\langle \vec{F} \circ \vec{r}, \dot{\vec{r}} \right\rangle (t)\,dt.$$

Formula $(\mathbf{1})$ este echivalentă cu

$$(\mathbf{2}) \qquad \int_{\Gamma^+} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$\int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))\,\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\,\dot{y}(t) + R(x(t), y(t), z(t))\,\dot{z}(t)]dt.$$

PROPRIETĂŢILE INTEGRALEI CURBILINII DE TIPUL II

1) Mulţimea funcţiilor $\vec{F} : D \subset \mathcal{E}_3 \to \mathbb{V}_3$, integrabile pe curba orientată Γ^+ netedă este spaţiu liniar notat $\mathfrak{R}(\Gamma^+, \mathbb{V}_3)$.

2) Aplicaţia

$$\int_{\Gamma^+} : \mathfrak{R}(\Gamma^+, \mathbb{V}_3) \to \mathbb{R},\ \vec{F} \to \int_{\Gamma^+} \left\langle \vec{F}, d\vec{r} \right\rangle,$$

este o aplicaţie liniară.

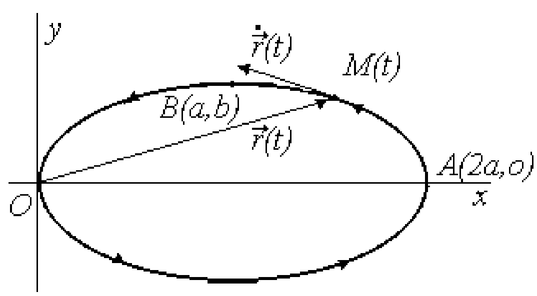
3) Integrala curbilinie de tipul II este invariantă la schimbări de repere.

4) Integrala curbilinie de tipul II este semiinvariantă la schimbări de parametrizări. La schimbări de parametrizări echivalente rămâne neschimbată iar la schimbări de parametrizări neechivalente îşi schimbă semnul.

5) Dacă Γ^+ este netedă pe porţiuni atunci există divizarea $a = a_0 < a_1 < ... < a_p = b$ astfel încât $\Gamma_i^+ = \vec{r}\left([a_{i-1}, a_i]\right)$, $i = 1, 2, ...p$, să fie curbe netede cu orientarea indusă de orientarea curbei Γ^+, pentru care avem $\Gamma^+ = \cup_{i=1}^p \Gamma_i^+$, atunci

$$\int_{\Gamma^+} \left\langle \vec{F}, d\vec{r} \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} \int_{\Gamma_i^+} \left\langle \vec{F}, d\vec{r} \right\rangle .$$

Exemplul 1. Să calculăm $\int_{\Gamma^+} ydx - (x-a)\,dy$, unde Γ^+ este elipsa $(E)\ \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ orientat'e în sens direct (trigonometric).



O parametrizare a lui (E) este $\vec{r} = a\,(1 + \cos t)\,\vec{i} + b \sin t\vec{j}$, $t \in [0, 2\pi]$. Deoarece $\dot{\vec{r}} = -a \sin t\vec{i} + b \cos t\vec{j}$ indică sensul direct de parcurs al lui (E), rezultă că parametrizarea considerată este cea dorită. Avem

$$\int_{\Gamma^+} ydx - (x-a)\,dy = \int_0^{2\pi} \left[b \sin t\,(-a \sin t) - a \cos t b \sin t\right] dt = -2\pi ab.$$

FORMULA LUI RIEMANN-GREEN

Fie mulţimea compactă $D \subset xOy$, cu $Fr.D$ curbă închisă netedă pe porţiuni orientată în sens direct (vectorul normal la $Fr.D$, $\vec{n}\,(t) = \dot{\vec{r}}\,(t) \times \left(\dot{\vec{r}}\,(t) \times \ddot{\vec{r}}\,(t)\right)$ indică, local, poziţia lui D în raport cu tangenta în punctul $M\,(t)$), cu orientarea dată de parametrizarea

$$\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a, b] \text{ şi } \vec{F} : D \to \mathbb{V}_2,\ \vec{F}\,(x, y) = P\,(x, y)\,\vec{i} + Q\,(x, y)\,\vec{j}.$$

Notăm

$$\int\limits_{Fr.D} \left\langle \vec{F}, d\vec{r} \right\rangle = \oint\limits_{Fr.D} \left\langle \vec{F}, d\vec{r} \right\rangle .$$

In aceste condiţii are loc

$$\oint\limits_{Fr.D} \left\langle \vec{F}, d\vec{r} \right\rangle = \iint\limits_{D} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right] dxdy,$$

numită **formula lui Riemann-Green.**

Exemplul 2. Să calculăm $\oint\limits_{Fr.D} (-xy^2dx + x^2ydy)$, unde

$$D = \{(x,y)\,/x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

Avem

$$\oint\limits_{Fr.D} (-xy^2dx + x^2ydy) = \iint\limits_{D} [2xy + 2xy]\, dxdy =$$

$$4\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xydy \right] dx = 2\int_0^1 x\left(1 - x^2\right) dx = \tfrac{1}{2}.$$

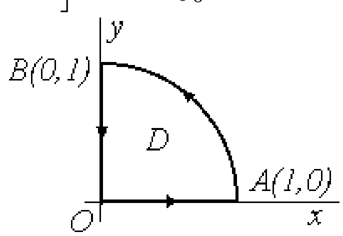


Fig. 1

Observaţia 1. Deoarece

$$\sigma(D) = \iint\limits_{D} dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{D} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right] dxdy, \text{ cu } \vec{F}(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j},$$

rezultă că

$$\sigma(D) = \iint\limits_{D} dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{D} \left[\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right] dxdy = \frac{1}{2}\oint\limits_{Fr.D} (-ydx + xdy).$$

5.2.1 Probleme

Problema 1. Să se calculeze integralele curbilinii de speţa II-a :

a) $\int_{\Gamma^+} \sqrt{yz}dx + \sqrt{xz}dy + \sqrt{xy}dz$,unde Γ^+ este arcul $\overset{\frown}{OA}$ de pe curba parametri-
zată $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^{3\vec{k}}$,cu orientarea de la O la $A(1,1,1)$.

b) $\int_{\Gamma^+} z\sqrt{a^2 - x^2}dx + xzdy + (x^2 + y^2)\,dz$,unde Γ^+ este arcul $\overset{\frown}{AB}$ de pe curba parametrizată $\vec{r} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}$,cu orientarea de la $A\left(o, a, \frac{b\pi}{2}\right)$ la $B\,(a, o, o)$.

c) $\int_{\Gamma^+} (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz$,unde Γ^+ este curba din Fig.1.

Indicaţii. a) $\overrightarrow{OO} = \vec{0} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^{3\vec{k}} \Rightarrow t = 0$.

$$\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^{3\vec{k}} \Rightarrow t = 1.$$

$$\int_{\Gamma^+} \sqrt{yz}dx + \sqrt{xz}dy + \sqrt{xy}dz = \int_0^1 \left[\sqrt{t^5} + \sqrt{t^4}2t + \sqrt{t^3}3t\right] dt =$$

$$\left[\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{2}t^4 + \frac{9}{7}t^{\frac{7}{3}}\right]_0^1 = \frac{29}{14}.$$

Problema 2. Utilizând formula lui Riemann-Green să se calculeze :

a) $\int\limits_{Fr.D} e^{x^2+y^2}\,(-ydx + xdy)\,,\qquad D = \{(x,y)\,/x^2 + y^2 \le 1\}\,,$

b) $\int\limits_{Fr.D} (xy - y)\,dx + (xy + x)\,dy,\quad D = \left\{(x,y)\,/\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\},$

c) $\int\limits_{Fr.D} (x - y)\,dx + dy,\qquad D = \{(x,y)\,/x^2 + y^2 \le 2x, y \ge 0\}$

Indicaţii. a) $I = \int\limits_{Fr.D} e^{x^2+y^2}\,(-ydx + xdy) = \iint\limits_D 2e^{x^2+y^2}(1+x^2+y^2)dxdy.$

Efectuând schimbarea de variabile $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, obţinem $\Delta = [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi

$$I = 2\iint\limits_{\Delta} e^{\rho^2}\,(1+\rho^2)\,\rho d\rho d\theta = 2\int_0^1 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\rho^2}\,(1+\rho^2)\,\rho d\theta\right] d\rho =$$

$$\pi\int_0^1 e^{\rho^2}\,(1+\rho^2)\,\rho d\rho = \frac{\pi}{2}\left[\int_0^1 e^t dt + \int_0^1 te^t dt\right] =$$

$$\frac{\pi}{2}\left\{\int_0^1 e^t dt + \left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t dt\right\} = \frac{\pi e}{2}.$$

Problema 3. Utilizând integrala curbilinie,să se calculeze ariile domeniilor:

a) $D = \left\{ (x,y) \ / \ xy \geq 1, \ xy \leq 2, \ y \geq \frac{x^2}{e^2}, \ y \leq \frac{x^2}{e}, \ x > 0, \ y > 0 \right\}$,

b) D mărginit de $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2\left(x^2 - y^2\right)$,

c) $D = \{(x,y) \ / \ y^2 \leq 4x + 4, \ y^2 \leq -2x + 4\}$,

d) $D = \left\{ (x,y) \ / \ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \leq 1, \ \frac{x}{5} + \frac{y}{3} \geq 1 \right\}$,

Indicaţii. a) (Fig. 2) $\sigma(D) = \iint\limits_D dxdy = \frac{1}{2} \oint\limits_{Fr.D} (-ydx + xdy) =$

$$\frac{1}{2} \oint\limits_{\Gamma_1^+} (-ydx + xdy) + \frac{1}{2} \oint\limits_{\Gamma_2^+} (-ydx + xdy) + \frac{1}{2} \oint\limits_{\Gamma_3^+} (-ydx + xdy) +$$

$$\frac{1}{2} \oint\limits_{\Gamma_4^+} (-ydx + xdy).$$

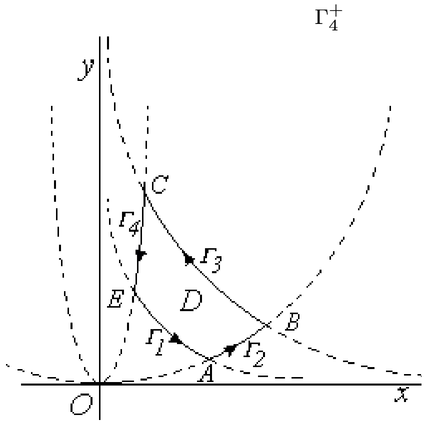


Fig. 2

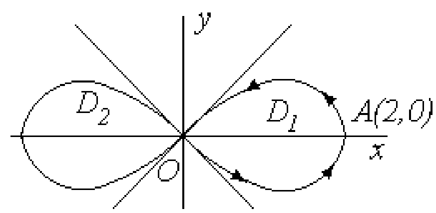


Fig.3

$$\Gamma_1^+ : xy = 1, \ \Gamma_2^+ : y = \frac{x^2}{e^2}, \ \Gamma_3^+ : xy = 2, \ \Gamma_4^+ : y = \frac{x^2}{e}.$$

$$\Gamma_1^+ \cap \Gamma_2^+ = A\left(\sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}\right); \ \Gamma_2^+ \cap \Gamma_3^+ = B\left(\sqrt[3]{2e^2}, \frac{1}{\sqrt[3]{2e^2}}\right);$$

$$\Gamma_3^+ \cap \Gamma_4^+ = C\left(\sqrt[3]{2e}, \frac{1}{\sqrt[3]{2e}}\right); \ \Gamma_1^+ \cap \Gamma_4^+ = E\left(\sqrt[3]{e}, \frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right).$$

Arcul EA are parametrizarea $\vec{r} = x\vec{i} + \frac{1}{x}\vec{j}$, unde $x \in \left[\sqrt[3]{e}, \sqrt[3]{e^2}\right]$, deci

$$\oint\limits_{\Gamma_1^+} (-ydx + xdy) = \int_{\sqrt[3]{e}}^{\sqrt[3]{e^2}} \left(-\frac{1}{x} - x\frac{1}{x^2}\right) dx = -2\left[\ln x\right]_{\sqrt[3]{e}}^{\sqrt[3]{e^2}} = -2\ln\sqrt[3]{e} = -\frac{2}{3}.$$

Arcul AB are parametrizarea $\vec{r} = x\vec{i} + \frac{x^2}{e^2}\vec{j}$, unde $x \in \left[\sqrt[3]{e^2}, \sqrt[3]{2e^2}\right]$, deci

$$\oint\limits_{\Gamma_2^+} (-ydx + xdy) = \int_{\sqrt[3]{e^2}}^{\sqrt[3]{2e^2}} \left(-\frac{x^2}{e^2} + x\frac{2x}{e^2}\right) dx = \frac{1}{3e^2}\left[x^3\right]_{\sqrt[3]{e^2}}^{\sqrt[3]{2e^2}} = \frac{1}{3}.$$

Arcul BC are parametrizarea $\vec{r} = x\vec{i} + \frac{2}{x}\vec{j}$, unde $x \in \left[\sqrt[3]{2e^2}, \sqrt[3]{2e}\right]$, deci

$$\oint_{\Gamma_3^+} (-ydx + xdy) = \int_{\sqrt[3]{2e^2}}^{\sqrt[3]{2e}} \left(-\frac{2}{x} - x\frac{2}{x^2}\right) dx = 4 \left[\ln x\right]_{\sqrt[3]{2e}}^{\sqrt[3]{2e^2}} = 4 \ln \sqrt[3]{e} = \frac{4}{3}.$$

Arcul EC are parametrizarea $\vec{r} = x\vec{i} + \frac{x^2}{e}\vec{j}$, unde $x \in \left[\sqrt[3]{e}, \sqrt[3]{2e}\right]$, deci

$$\oint_{\Gamma_3^+} (-ydx + xdy) = \int_{\sqrt[3]{2e}}^{\sqrt[3]{e}} \left(-\frac{x^2}{e} + x\frac{2x}{e}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3e}\right]_{\sqrt[3]{2e}}^{\sqrt[3]{e}} = \frac{1}{3e}(-e) = -\frac{1}{3}.$$

$$\sigma(D) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

b) $Fr.D$ este lemniscata lui Bernoulli (Fig. 3). $D = D_1 \cup D_2$, $\sigma(D) = 2\sigma(D_1)$. O parametrizare care ne dă orientarea în sens direct a $Fr.D_1$ este

$$\vec{r} = 2\frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}\vec{i} + 2t\frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}\vec{j},\ t \in [-1, 1].$$

$$\sigma(D) = 2\sigma(D_1) = 2\iint_{D_1} dxdy = 2\oint_{Fr.D_1} (-ydx + xdy) =$$

$$2\int_{-1}^{1} 4\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}dt = 16\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+t^2)^2}dt - 8\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}dt = 8.$$

5.3 Integrale de suprafaţă de tipul I

Considerăm

1) $f : \Omega \subset \mathcal{E}_3 \to \mathbb{R}$,

2) $\Sigma \subset \Omega$, suprafaţă simplă dată în parametrizarea $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, unde D este domeniu de integrare plan, mărginită de o curbă netedă pe porţiuni notată cu $\partial\Sigma$ şi numită bordul lui Σ,

3) $(f \circ \vec{r}) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| : D \to \mathbb{R}$, $(u, v) \in D \to [(f \circ \vec{r}) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|](u, v) =$

$$(f \circ \vec{r})(u, v) \|\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)\|.$$

Definiţia 1. Spunem că funcţia f este **integrabilă pe suprafaţa** Σ dacă funcţia $(f \circ \vec{r}) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$ este integrabilă pe D (în sensul integralei duble).

Notăm $\iint_D (f \circ \vec{r})(u, v) \|\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)\| dudv$ cu $\iint_\Sigma f(x, y, z) d\sigma$ şi o numim **integrala de suprafaţă de tipul I (sau de speţa I-a).** Avem

$$(\mathbf{1}) \qquad \iint_\Sigma f(x, y, z) d\sigma = \iint_D (f \circ \vec{r})(u, v) \|\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)\| dudv.$$

Observaţia 1. Dacă $f(x, y, z) = 1$, $(\forall)(x, y, z) \in \Sigma$, atunci (**1**) devine

$$(\mathbf{2}) \iint_\Sigma d\sigma = \iint_D \|\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)\| dudv = \sigma(\Sigma).$$

PROPRIETĂŢILE INTEGRALEI DE SUPRAFAŢĂ DE TIPUL I.

1) Mulţimea funcţiilor f integrabile pe suprafaţa Σ este spaţiu liniar notat $\Re_\Sigma$.

2) Aplicaţia $\iint\limits_\Sigma : \Re_\Sigma \to \mathbb{R}$, $(\forall)\, f \in \Re_\Sigma \to \iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\,d\sigma$, este liniară.

3) Integrala de suprafaţă de tipul I este invariantă la schimbări de reper şi la schimbarea parametrizării pe Σ.

4) Dacă $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup ... \cup \Sigma_p$, unde Σ_i este suprafaţă simplă $(\forall)\, i = \overline{1,p}$, astfel încât $\Sigma_i \cap \Sigma_j \subset \partial\Sigma_i \cap \partial\Sigma_j$, $(\forall)\, i,j = \overline{1,p}$, $i \neq j$, atunci are loc

$$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\,d\sigma = \sum_{i=1}^{p} \iint\limits_{\Sigma_i} f(x,y,z)\,d\sigma.$$

Exemplul 1. Să calculăm $I = \iint\limits_\Sigma \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}d\sigma$, unde Σ este suprafaţa de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

O parametrizare a suprafeţei Σ este

$$\vec{r} = a\sin u\cos v\vec{i} + b\sin u\sin v\vec{j} + c\cos u\vec{k},\ (u,v) \in D = [0,\pi] \times [0,2\pi]$$

$$(f \circ \vec{r})(u,v) = \sqrt{\frac{(a\sin u\cos v)^2}{a^4} + \frac{(b\sin u\sin v)^2}{b^4} + \frac{(c\cos u)^2}{c^4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2 u\cos^2 v}{a^2} + \frac{\sin^2 u\sin^2 v}{b^2} + \frac{\cos^2 u}{c^2}},$$

$$\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a\cos u\cos v & b\cos u\sin v & -c\sin u \\ -a\sin u\sin v & b\sin u\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$bc\sin^2 u\cos v\vec{i} + ac\sin^2 u\sin v\vec{j} + b\sin u\cos u\vec{k},$$

$$\|\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)\| = abc\sqrt{\frac{\sin^4 u\cos^2 v}{a^2} + \frac{\sin^4 u\sin^2 v}{b^2} + \frac{\sin^2 u\cos^2 u}{c^2}} =$$

$$abc\sin u\sqrt{\frac{\sin^2 u\cos^2 v}{a^2} + \frac{\sin^2 u\sin^2 v}{b^2} + \frac{\cos^2 u}{c^2}}.$$

$$I = \iint\limits_D abc\sin u\left(\frac{\sin^2 u\cos^2 v}{a^2} + \frac{\sin^2 u\sin^2 v}{b^2} + \frac{\cos^2 u}{c^2}\right)dudv =$$

$$abc\int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} \sin u\left(\frac{\sin^2 u\cos^2 v}{a^2} + \frac{\sin^2 u\sin^2 v}{b^2} + \frac{\cos^2 u}{c^2}\right)dv\right]du =$$

$$abc\int_0^\pi \left[\frac{\sin^3 u}{a^2}\int_0^{2\pi} \cos^2 vdv + \frac{\sin^3 u}{b^2}\int_0^{2\pi} \sin^2 vdv + \frac{\sin u\cos^2 u}{c^2}\int_0^{2\pi} dv\right]du =$$

$$abc\int_0^\pi \left[\frac{\sin^3 u}{a^2}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2v}{2}dv + \frac{\sin^3 u}{b^2}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2v}{2}dv + 2\pi\frac{\sin u\cos^2 u}{c^2}\right]du =$$

$$abc\int_0^\pi \left[\pi\frac{\sin^3 u}{a^2}+\pi\frac{\sin^3 u}{b^2}+2\pi\frac{\sin u\cos^2 u}{c^2}\right]du =$$
$$\pi abc\int_0^\pi \left[\frac{\left(1-\cos^2 u\right)\sin u}{a^2}+\frac{\left(1-\cos^2 u\right)\sin u}{b^2}+2\frac{\sin u\cos^2 u}{c^2}\right]du =$$
$$\pi abc\int_0^\pi \left[\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\sin u-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{2}{c^2}\right)\cos^2 u\sin u\right]du =$$
$$\pi abc2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{2}{c^2}\right).\frac{2}{3}=$$
$$\pi abc\left(2\frac{1}{a^2}+2\frac{1}{b^2}-\frac{2}{3}\frac{1}{a^2}-\frac{2}{3}\frac{1}{b^2}+\frac{2}{3}\frac{2}{c^2}\right)=$$
$$\frac{4}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

5.3.1 Probleme

Problema 1. Să se calculeze integralele de suprafaţă de speţa I-a :

a) $\iint\limits_{\Sigma}\left(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2\right)d\sigma,$ $\quad \Sigma=\{(x,y,z)\,/\,z=\sqrt{x^2+y^2},$ $x^2+y^2-2z\le 0\}$

b) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{zd\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}},$ $\quad \Sigma=\{(x,y,z)\,/\,2az=x^2+y^2,$ $z\in[a,b]\,,a,b\gneqq 0\}$

c) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}},$ $\quad \Sigma=\{(x,y,z)\,/\,x^2+y^2+z^2=a^2,$ $z\ge 0,a\gneqq 0\}$

d) $\iint\limits_{\Sigma}zd\sigma,$ $\quad \Sigma=\{(x,y,z)\,/\,x=u\cos v,y=u\sin v,$ $z=v,u\in[0,a]\,,v\in[0,2\pi]\,,a\gneqq 0$

Indicaţii. **a**) Suprafaţa Σ are parametrizarea

$$\vec{r}=u\cos v\vec{i}+u\sin v\vec{j}+u\vec{k},\ (u,v)\in[0,2]\times[0,2\pi].$$

5.4 Integrale de suprafaţă de tipul II

Considerăm
1) $\vec{F}:\Omega\subset\mathcal{E}_3\to\mathbb{V}_3,$

$$(x,y,z)\to\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k},$$

2) Suprafaţa orientată $\Sigma^+\subset\Omega$ cu orientare dată de parametrizarea $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, $(u,v)\in D$, unde D este domeniu de integrare plan,
3) Aplicaţia $\left\langle\vec{F}\circ\vec{r},\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right\rangle:D\to\mathbb{R}$, definită prin

$$\left\langle\vec{F}\circ\vec{r},\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right\rangle(u,v)=\left\langle\left(\vec{F}\circ\vec{r}\right)(u,v)\,,\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)\right\rangle.$$

Definiţia 1. Spunem că $\vec{F}$ este integrabilă pe suprafaţa Σ^+ dacă funcţia $\left\langle \vec{F} \circ \vec{r}, \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\rangle$ este integrabilă pe D (în sensul integralei duble).

Notăm $\iint\limits_D \left\langle \vec{F} \circ \vec{r}, \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\rangle (u,v)\, dudv$ cu $\iint\limits_{\Sigma^+} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle d\sigma$ şi o numim **integrala de suprafaţă de tipul II (sau de speţa II-a).** Avem

$$(1) \qquad \iint\limits_{\Sigma^+} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle d\sigma = \iint\limits_D \left\langle \vec{F} \circ \vec{r}, \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\rangle (u,v)\, dudv.$$

Observaţia 1. Fie $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, cu $\|\vec{n}\| = 1$. Avem

$$\left\langle \vec{n}, \vec{i} \right\rangle = a = \|\vec{n}\| \left\|\vec{i}\right\| \cos\alpha, \text{ unde } \alpha = \sphericalangle\left(\vec{n}, \vec{i}\right),$$
$$\left\langle \vec{n}, \vec{j} \right\rangle = b = \|\vec{n}\| \left\|\vec{j}\right\| \cos\beta, \text{ unde } \beta = \sphericalangle\left(\vec{n}, \vec{j}\right),$$
$$\left\langle \vec{n}, \vec{k} \right\rangle = c = \|\vec{n}\| \left\|\vec{k}\right\| \cos\gamma, \text{ unde } \gamma = \sphericalangle\left(\vec{n}, \vec{k}\right).$$
$$\vec{n} d\sigma = (\cos\alpha d\sigma)\, \vec{i} + (\cos\beta d\sigma)\, \vec{j} + (\cos\gamma d\sigma)\, \vec{k} =$$
$$d\sigma_{yOz}\vec{i} + d\sigma_{xOz}\vec{j} + d\sigma_{xOy}\vec{k},$$

unde am notat cu $d\sigma_{yOz}$, $d\sigma_{xOz}$, $d\sigma_{xOy}\vec{k}$, elementele de arie din planele coordonate yOz, xOz şi respectiv xOy.

Planul yOz are parametrizare $\vec{r} = y\vec{j} + z\vec{k}$. Avem $\vec{r}_y \times \vec{r}_z = \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, deci

$$d\sigma_{yOz} = \|\vec{r}_y \times \vec{r}_z\|\, dydz = dydz.$$

Analog obţinem $d\sigma_{xOz} = dxdz$, $d\sigma_{xOy} = dxdy$. Rezultă

$$\vec{n} d\sigma = dydz\vec{i} + dxdz\vec{j} + dxdy\vec{k},$$
$$\left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle d\sigma = \left\langle P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}, dydz\vec{i} + dxdz\vec{j} + dxdy\vec{k} \right\rangle =$$
$$Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

deci (**1**) se poate scrie sub forma

$$\iint\limits_{\Sigma^+} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle d\sigma = \iint\limits_{\Sigma^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$
$$\iint\limits_D \left\langle \vec{F} \circ \vec{r}, \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\rangle (u,v)\, dudv.$$

PROPRIETĂŢILE INTEGRALEI DE SUPRAFAŢĂ DE TIPUL II.

1) Mulţimea funcţiilor $\vec{F} : \Omega \subset \mathcal{E}_3 \to \mathbb{V}_3$ integrabile pe suprafaţa orientată Σ^+ este un spaţiu liniar notar cu $\mathfrak{R}\left(\Sigma^+, \mathbb{V}_3\right)$.

2) Aplicaţia $\iint\limits_{\Sigma^+} : \mathfrak{R}\left(\Sigma^+, \mathbb{V}_3\right) \to \mathbb{R},\ \vec{F} \to \iint\limits_{\Sigma^+} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle d\sigma$, este liniară.

3) Integrala de suprafaţă de tipul II este invariantă la schimbări de reper.

4) Integrala de suprafaţă de tipul II este seminvariantă la o schimbare de parametrizare:

★ dacă $\vec{r}$ şi $\vec{r}_1$ sunt parametrizări ale unei suprafeţe Σ care induc aceeaşi orientare Σ^+, atunci

$$\iint\limits_{\Sigma^+} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle d\sigma = \iint\limits_{\Sigma^+} \left\langle \vec{F}, \vec{n}_1 \right\rangle d\sigma_1,$$

unde $\vec{n}$ şi $d\sigma$ sunt asociate parametrizării $\vec{r}$, iar $\vec{n}_1$ şi $d\sigma_1$ sunt asociate parametrizării $\vec{r}_1$.

★ dacă $\vec{r}$ şi $\vec{r}_1$ sunt parametrizări ale unei suprafeţe Σ care induc orientările opuse Σ^+ şi Σ^-, atunci

$$\iint\limits_{\Sigma^+} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle d\sigma = -\iint\limits_{\Sigma^-} \left\langle \vec{F}, \vec{n}_1 \right\rangle d\sigma_1.$$

5) Dacă $\Sigma^+ = \cup_{i=1}^{p} \Sigma_i^+$, unde Σ^+ este suprafaţă orientată, iar Σ_i^+, $i = \overline{1,p}$, sunt suprafeţe simple orientate cu orientarea indusă de orientarea lui Σ^+ astfel încât $\Sigma_i^+ \cap \Sigma_j^+ \subset \partial\Sigma_i^+ \cap \partial\Sigma_j^+$, $(\forall)\, i, j = \overline{1,p}$, $i \neq j$, atunci

$$\iint\limits_{\Sigma^+} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle d\sigma = \sum_{i=1}^{p} \iint\limits_{\Sigma_i^+} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle d\sigma.$$

Exemplul 1. Să calculăm $I = \iint\limits_{\Sigma^+} xdydz + ydxdz + zdxdy$, unde Σ^+ este faţa exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

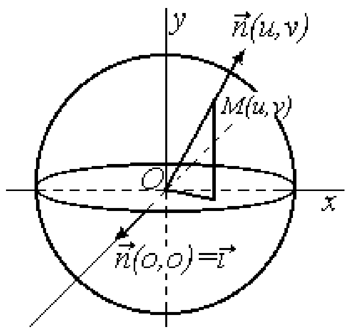
O parametrizare a sferei este

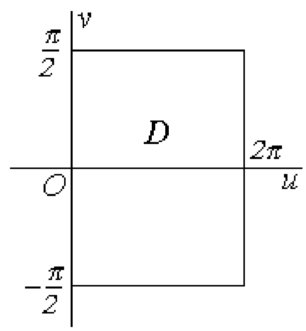
$$\vec{r} = R\cos u \cos v \vec{i} + R \sin u \cos v \vec{j} + R \sin v \vec{k},$$
$$(u, v) \in D = [0, 2\pi] \times \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right].$$
$$\vec{N}(u, v) = \vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v) =$$
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R\sin u \cos v & R\cos u \cos v & 0 \\ -R \sin u \sin v & -R\sin u \sin v & R\cos v \end{vmatrix} =$$
$$R^2 \cos u \cos^2 v \vec{i} + R^2 \sin u \cos^2 v \vec{j} + R^2 \sin v \cos v \vec{k}.$$

$$\left\|\vec{N}(u,v)\right\| = \sqrt{R^4\left(\cos^2 u\cos^4 v + \sin^2 u\cos^4 v + \sin^2 v\cos^2 v\right)} = R^2\cos v.$$

$$\vec{n}(u,v) = \frac{\vec{N}(u,v)}{\left\|\vec{N}(u,v)\right\|} = \cos u\cos v\vec{i} + \sin u\cos v\vec{j} + \sin v\vec{k}.$$

Câmpul vectorial $\vec{n}(u,v)$ este continuu pe Σ^+ şi $\vec{n}(0,0) = \vec{i}$, deci $\vec{n}(u,v)$ indică faţa exterioară a sferei.





$$\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$$\left(\vec{F}\circ\vec{r}\right)(u,v) = R\cos u\cos v\vec{i} + R\sin u\cos v\vec{j} + R\sin v\vec{k},$$

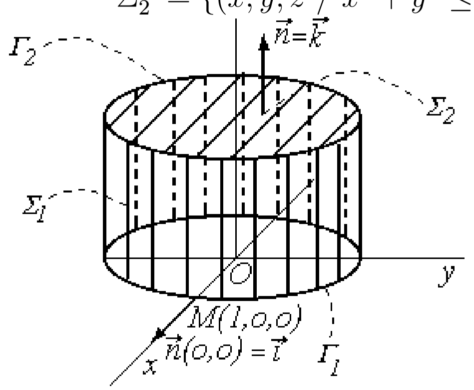
$$I = \iint_D \left\langle \vec{F}\circ\vec{r}, \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\rangle (u,v)\,dudv =$$

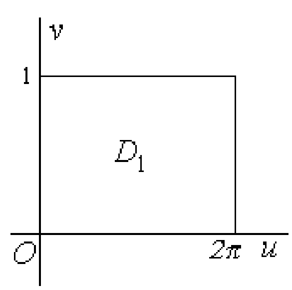
$$\iint_D R^3\left(\cos^2 u\cos^3 v + \sin^2 u\cos^3 v + \sin^2 v\cos v\right) dudv = R^3 \iint_D \cos v dudv =$$

$$R^3 \int_0^{2\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v dv\right] du = 2R^3\int_0^{2\pi} du = 4\pi R^3.$$

Exemplul 2. Să calculăm $I = \iint_{\Sigma^+} yzdydz + xzdxdz + xydxdy$, pe faţa exterioară a suprafeţei $\Sigma^+ = \Sigma_1^+ \cup \Sigma_2^+$ unde:

$$\Sigma_1^+ = \{(x,y,z\ /\ x^2+y^2 = 1,\ z\in[0,1])\},$$
$$\Sigma_2^+ = \{(x,y,z\ /\ x^2+y^2 \le 1,\ z = 1)\}.$$





$$\partial\Sigma_1^+ = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,\ \partial\Sigma_2^+ = \Gamma_2 \Leftrightarrow \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+ = \Gamma_2 \subset \partial\Sigma_1^+ \cap \partial\Sigma_2^+ = \Gamma_2.$$

$$I = \iint\limits_{\Sigma^+} yzdydz + xzdxdz + xydxdy = \iint\limits_{\Sigma_1^+} yzdydz + xzdxdz + xydxdy +$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2^+} yzdydz + xzdxdz + xydxdy = I_1 + I_2.$$

O parametrizare a suprafeţei Σ_1^+ este

$$\vec{r} = \cos u\vec{i} + \sin u\vec{j} + v\vec{k},\ (u,v) \in D_1 = [0, 2\pi] \times [0, 1],$$

$$\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \cos u\vec{i} + \sin u\vec{j},$$

este câmp vectorial continuu şi $\vec{n}(0,0) = \vec{i}$ indică faţa exterioară.

$$\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k},\ \vec{F} \circ \vec{r} = v\sin u\vec{i} + v\cos u\vec{j} + \sin u \cos u\vec{k}.$$

$$I_1 = \iint\limits_{\Sigma_1^+} yzdydz + xzdxdz + xydxdy = \iint\limits_{D_1} v \sin 2ududv =$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 v \sin 2udv\right] du = \int_0^{2\pi} \sin 2udu = 0.$$

O parametrizare a suprafeţei Σ_2^+ este

$$\vec{r} = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + \vec{k},\ (u,v) \in D_2 = [0, 1] \times [0, 2\pi],$$

$$\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = u\vec{k},$$

este câmp vectorial continuu şi $\vec{n}(u,v) = \vec{k}$ indică faţa exterioară.

$$\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k},\ \vec{F} \circ \vec{r} = u\sin v\vec{i} + u\cos v\vec{j} + u^2 \sin v \cos v\vec{k}.$$

$$I_2 = \iint\limits_{\Sigma_2^+} yzdydz + xzdxdz + xydxdy = \iint\limits_{D_2} u^3 \sin v \cos vdudv =$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} u^3 \sin v \cos vdv\right] du = \int_0^1 u^3 \left[\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2v}{2} dv\right] du = 0.$$

FORMULA LUI GAUSS-OSTROGRADSKY.

Fie funcţia de clasă $\mathcal{C}^1$, $\vec{F} : \Omega \subset \mathcal{E}_3 \to \mathbb{V}_3$,

$$(x,y,z) \to \vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k},$$

unde Ω este domeniu compact cu $Fr.\Omega$ suprafaţă netedă pe porţiuni, orientată în sens direct (normala la $Fr.\Omega$ indică exteriorul lui Ω) dată în parametrizarea $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$. In aceste condiţii are loc **formula lui Gauss-Ostrogradsky:**

$$\iint\limits_{Fr.\Omega} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} div\vec{F}\,(x,y,z)\,dxdydz,$$

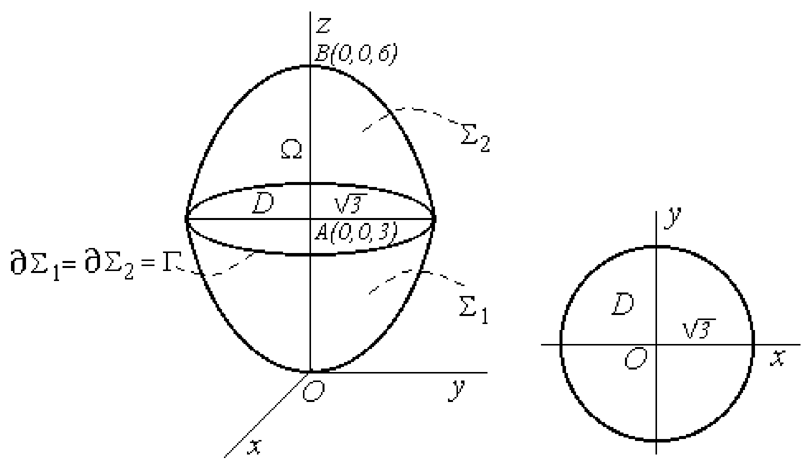
unde

$$div\vec{F}\,(x,y,z) = \tfrac{\partial P}{\partial x}\,(x,y,z) + \tfrac{\partial Q}{\partial y}\,(x,y,z) + \tfrac{\partial R}{\partial z}\,(x,y,z)\,.$$

Exemplul 3. Fie Ω astfel încât $Fr.\Omega = \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, unde

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z)\ /\ x^2+y^2-z=0,\ z\in[0,3]\},$$
$$\Sigma_2\,\{(x,y,z)\ /\ x^2+y^2+z-6=0,\ z\in[3,6]\}\,.$$

Să calculăm $I = \iint\limits_{\Sigma} x^3y^2dydz + x^2y^3dxdz + 3zdxdy$.



$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \partial\Sigma_1 \cap \partial\Sigma_2 = \Gamma$, $Fr.\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Ω este mărginită şi închisă, deci compactă, iar Σ_1 şi Σ_2 sunt suprafeţe netede. Aplicând formula lui Gauss-Ostrogradsky, obţinem

$$I = \iint\limits_{\Sigma} x^3y^2dydz + x^2y^3dxdz + 3zdxdy = \iiint\limits_{\Omega} \left(3x^2y^2 + 3x^2y^2 + 3\right) dxdydz =$$

$$\iint\limits_{D} \left[\int\limits_{x^2+y^2}^{6-x^2-y^2} 3\left(2x^2y^2+1\right) dz \right] dxdy = 3\iint\limits_{D} \left(2x^2y^2+1\right)\left(6-2x^2-2y^2\right) dxdy.$$

Efectuând schimbarea de parametrizare polară obţinem

$$I = 3\iint\limits_{\Delta} \left(2\rho^2 \sin^2\theta \cos^2\theta + 1\right)\left(6 - 2\rho^2\right)\rho d\rho d\theta,$$

$$(\rho, \theta) \in \Delta = \left[0, \sqrt{3}\right] \times [0, 2\pi].$$

$$I = 3\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{3}} \left(2\rho^2 \sin^2\theta \cos^2\theta + 1\right)\left(6 - 2\rho^2\right)\rho d\rho\right] d\theta =$$

$$3\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{3}} \left(3\rho^3 \sin^2 2\theta - \rho^5 \sin^2 2\theta + 6\rho - 2\rho^3\right) d\rho\right] d\theta =$$

$$3\int_0^{2\pi} \left[3\tfrac{\rho^4}{4} \sin^2 2\theta - \tfrac{\rho^6}{6} \sin^2 2\theta + 6\tfrac{\rho^2}{2} - 2\tfrac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} d\theta =$$

$$3\int_0^{2\pi} \left[3\frac{\left(\sqrt{3}\right)^4}{4} \sin^2 2\theta - \frac{\left(\sqrt{3}\right)^6}{6} \sin^2 2\theta + 6\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2} - 2\frac{\left(\sqrt{3}\right)^4}{4}\right] d\theta =$$

$$3\int_0^{2\pi} \left[\tfrac{9}{4} \sin^2 2\theta + \tfrac{9}{2}\right] d\theta = \tfrac{135}{4}\pi.$$

FORMULA LUI STOKES.

Fie suprafaţa simplă, orientată $\Sigma \subset \Omega$, dată în parametrizarea

$$\vec{r} = \vec{r}\,(u, v),\ (u, v) \in D,$$

limitată de o curbă închisă (nu neapărat plană), netedă pe porţiuni, notată $\partial\Sigma$, şi numită **bordul** lui Σ. Orientarea bordului $\partial\Sigma$ se face astfel:

Fie o parametrizare a lui $\partial\Sigma$ de forma

$$\vec{r} = \vec{r}\,(u\,(t)\,, v\,(t)),\ t \in [a, b]\,,$$

Vectorul $\vec{n}\,(u\,(t)\,, v\,(t)) \times \dot{\vec{r}}\,(u\,(t)\,, v\,(t))$ este tangent suprafeţei Σ în punctul $M\,(t)$ (deoarece este ortogonal pe $\vec{n}\,(u\,(t)\,, v\,(t))$) deci există o curbă (C) pe Σ tangentă în $M\,(t)$ la acest vector. Fie $P \in (C) \cap \mathcal{V}_M$, unde $\mathcal{V}_M$ este o vecinătate convenabilă a punctului $M\,(t)\,$, şi Q proiecţia lui P pe tangenta în M la curba $(C)\,$.

Spunem că $\partial\Sigma$ este orientat în sens **direct** dacă vectorii

$$\overrightarrow{MQ} \text{ şi } \vec{n}\,(u\,(t)\,, v\,(t)) \times \dot{\vec{r}}\,(u\,(t)\,, v\,(t))$$

au acelaşi sens.

Dacă Σ este dată în reprezentarea carteziană explicită

$$z = f\,(x, y),\ (x, y) \in D,$$

echivalentă cu parametrizarea

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + f\,(x, y)\,\vec{k},\ (x, y) \in D,$$

unde D este domeniu de integrare plan, cu $Fr.D$ orientat însens direct cu orientarea dată de parametrizarea

$$\vec{r} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j},\ t \in [a,b],$$

atunci orientarea în sens direct a bordului $\partial\Sigma = \vec{r}(Fr.D)$ va fi dată de parametrizarea

$$\vec{r} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + f(x(t), y(t))\,\vec{k},\ t \in [a,b].$$

Considerăm:

1) $\vec{F} : \Omega \subset \mathcal{E}_3 \to \mathbb{V}_3$,

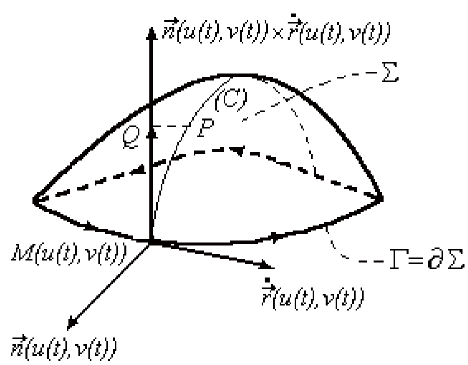
$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k},$$

de clasă $\mathcal{C}^1$.

2) Suprafaţa simplă, orientată $\Sigma \subset \Omega$, cu orientarea dată de parametrizarea

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in D,$$

cu bordul $\partial\Sigma$ orientat în sens direct.



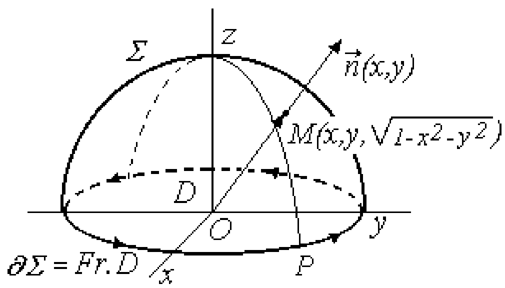
In aceste condiţii are loc **formula lui Stokes**

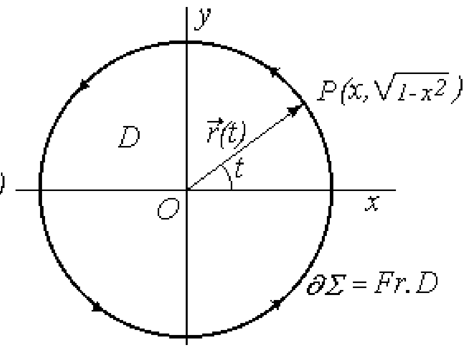
$$\oint_{\partial\Sigma} \left\langle \vec{F}, d\vec{r} \right\rangle = \iint_{\Sigma} \left\langle rot\vec{F}, \vec{n} \right\rangle d\sigma,$$

unde

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Exemplul 4. Să calculăm $\iint\limits_{\Sigma^+} y^2dydz + z^2dxdz + x^2dxdy$, unde Σ^+ este faţa exterioară a semisferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.





O parametrizare a lui Σ este

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}\vec{k},\ (x, y) \in D = \{(x, y)\ /\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Avem

$$\vec{N}(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{vmatrix} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\vec{j} + \vec{k},$$

$$\vec{n}(x, y) = \frac{\vec{N}(x,y)}{\left\|\vec{N}(x,y)\right\|} = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}\vec{k} = \vec{r} = \overrightarrow{OM},$$

deci parametrizarea aleasă ne dă orientarea cerută de problemă.

$$Fr.D = \partial\Sigma = \{(x, y)\ /\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Parametrizarea care ne dă orientarea în sens direct a lui $\partial\Sigma$ este de forma $\vec{r} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\text{rot}\vec{F} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = y^2 - 0, \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = z^2 - 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 - 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = y^2, \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial z} = z^2, \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = x^2, \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \frac{y^3}{3}, \\ P = \frac{z^3}{3}, \\ Q = \frac{x^3}{3}, \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = \frac{z^3}{3}\vec{i} + \frac{x^3}{3}\vec{j} + \frac{y^3}{3}\vec{k}.$$

$$I = \iint\limits_{\Sigma^+} y^2dydz + z^2dxdz + x^2dxdy = \oint\limits_{\partial\Sigma} \left\langle \vec{F}, d\vec{r} \right\rangle =$$

$$\oint\limits_{\partial\Sigma} \frac{z^3}{3}dx + \frac{x^3}{3}dy + \frac{y^3}{3}dz = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cos^3 t \cos t dt = \frac{\pi}{2}$$

5.4.1 Probleme

Problema 1. Să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă de speţa a II-a

a) $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, pe faţa exterioară a sferei

$$\Sigma:\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

b) $\iint\limits_{\Sigma} \frac{dydz}{ax}+\frac{dxdz}{by}+\frac{dxdy}{cz}$, pe faţa interioară a suprafeţei

$$\Sigma:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a,b,c \gneqq 0.$$

c) $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, pe faţa exterioară tetraedrului cu vârfurile

$$O\left(0,0,0\right), A\left(1,o,o\right), B\left(0,1,0\right), C\left(0,0,1\right).$$

d) $\iint\limits_{\Sigma} \left(x^2+y^2\right)zdxdy$, pe faţa exterioară a suprafeţei

$$\Sigma=\left\{(x,y,z)\,/\,z=x^2+y^2, x^2+y^2\le 1\right\}.$$

Indicaţii. b) O parametrizare a suprafeţei $\Sigma:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a,b,c \gneqq 0$ este

$\vec{r}=a\cos\varphi\sin\theta\vec{i}+b\sin\varphi\sin\theta\vec{j}+c\cos\theta\vec{k},\ (\varphi,\theta)\in D=[0,2\pi)\times[0,\pi)$

$$\vec{N}\left(\varphi,\theta\right)=\vec{r}_{\varphi}\left(\varphi,\theta\right)\times\vec{r}_{\theta}\left(\varphi,\theta\right)=$$
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin\varphi\sin\theta & b\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ a\cos\varphi\cos\theta & b\sin\varphi\cos\theta & -c\sin\theta \end{vmatrix}=$$
$$-\sin\theta\left(bc\cos\varphi\sin\theta\vec{i}+ac\sin\varphi\sin\theta\vec{j}+ab\cos\theta\vec{k}\right).$$

Câmpul vectorial $\vec{N}\left(\varphi,\theta\right)$ continuu şi $\vec{N}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=-bc\vec{i}$, deci parametrizarea considerată ne dă faţa interioară a elipsoidului Σ.

$$\left\langle \vec{F}\circ\vec{r},\vec{r}_{\varphi}\times\vec{r}_{\theta}\right\rangle=\langle\frac{1}{a^2\cos\varphi\sin\theta}\vec{i}+\frac{1}{b^2\sin\varphi\sin\theta}\vec{j}+\frac{1}{c^2\cos\theta}\vec{k},$$
$$-\sin\theta\left(bc\cos\varphi\sin\theta\vec{i}+ac\sin\varphi\sin\theta\vec{j}+ab\cos\theta\vec{k}\right)\rangle=$$
$$-\frac{bc}{a^2}\sin\theta-\frac{ac}{b^2}\sin\theta-\frac{ab}{c^2}\sin\theta=-abc\sin\theta\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right).$$

Obţinem

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{dydz}{ax}+\frac{dxdz}{by}+\frac{dxdy}{cz}=-abc\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)\iint\limits_{D}\sin\theta d\varphi d\theta=$$
$$-abc\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\right]d\varphi=$$
$$abc\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)\int_0^{2\pi}\left(-2\right)d\varphi=-4\pi abc\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right).$$

Problema 2. Utilizând formula lui Gauss-Ostrogradsky să se calculeze integralele :

a) $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$,unde Σ este frontiera domeniului

$$\Omega = \{(x, y, z) \,/\, 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a\},$$

b) $\iint\limits_{\Sigma} x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$, unde

$$\Sigma = \{(x, y, z) \,/ x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a \gneqq 0\},$$

c) $\iiint\limits_{\Omega} (x + y + z)\, dxdydz$, unde

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \,/\ \ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \le 3\right\},$$

d) $\iiint\limits_{\Omega} 2zdxdydz$, unde

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \,/\ \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} + \tfrac{z^2}{c^2} \lneqq 1,\ a, b, c \gneqq 0\right\}.$$

Indicaţii. a) $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, $div.\vec{F} = 2x + 2y + 2z.$

$$I = \iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy = \iiint\limits_{\Omega} 2\,(x + y + z.)\, dxdydz =$$

$$\iint\limits_{D} \left[\int_0^a 2\,(x + y + z.)\, dz\right] dxdy = \iint\limits_{D} \left[2a\,(x + y) + a^2\right] dxdy =$$

$$\int_0^a \left\{\int_0^a \left[2a\,(x + y) + a^2\right] dx\right\} dy = 3a^4.$$

Problema 3. Utilizând formula lui Stokes,să se calculeze :

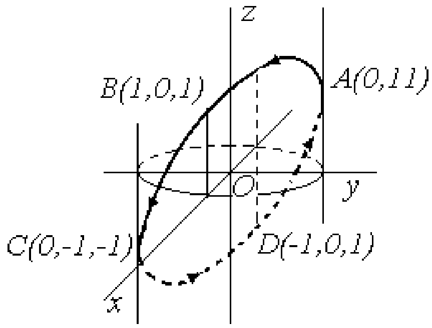
a) $\oint\limits_{\Gamma} (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz$ unde Γ este intersecţia cilindrului $x^2 + y^2 = 1$ cu planul $x + 2z = 1$, orientată în sens direct,

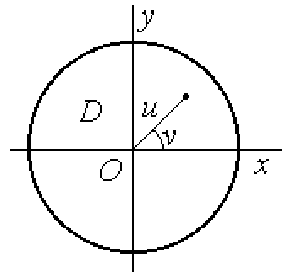
b) $\oint\limits_{\Gamma} (y^2 - z^2)\, dx + (z^2 - x^2)\, dy + (x^2 - y^2)\, dz$ unde Γ este intersecţia frontierei cubului $[0, a] \times [0, a] \times [0, a]$ cu planul $x + y + z = \frac{3}{2}$, orientată în sens direct,

c) $\oint\limits_{\Gamma} xydx + xzdy + yzdx$ unde $\Gamma = \{(x, y, z) \,/ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, z = 2\}$, orientată în sens direct,

d) $\oint\limits_{\Gamma} xdx + (x + y)\, dy + (x + y + z)\, dz$ unde Γ este curba orientată cu orientarea dată de parametrizarea $\vec{r} = \sin t\vec{i} + \cot t\vec{j} + (\sin t + \cos t)\, \vec{k}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Indicaţii. d) Ecuaţiile implicite ale lui Γ sunt: $x^2 + y^2 = 1$, $z = x + y$.





Curba Γ este bordul discului eliptic $\Sigma = ABCD$ unde $A\,(0,1,1)$, $B\,(1,0,1)$, $C\,(0,-1,-1)$, $D\,(-1,0,-1)$ (care se obţin din parametrizarea curbei pentru $t=0$, $t=\frac{\pi}{2}$, $t=\pi$ şi respectiv $t=\frac{3\pi}{2}$).

O parametrizare a lui Σ este

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + (x+y)\,\vec{k},\ (x,y) \in D = \left\{(x,y)\ \ /\ x^2+y^2 \leq 1\right\},$$

deci

$$\vec{N}\,(x,y) = \vec{r}_x\,(x,y) \times \vec{r}_y\,(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k},$$

$$\vec{n}\,(x,y) = \frac{\vec{N}(x,y)}{\left\|\vec{N}(x,y)\right\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right),$$

care ne dă o orientare pe Σ care nu satisface condiţiile din formula lui Stokes. Notăm suprafaţa Σ cu această orientare cu Σ^-. Avem

$$\vec{F} = x\vec{i} + (x+y)\,\vec{j} + (x+y+z)\,\vec{k},$$

$$rot.\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & x+y & x+y+z \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}.$$

$$I = \oint_{\Gamma} x dx + (x+y)\,dy + (x+y+z)\,dz = \iint_{\Sigma^+} dydz - dxdz + dxdy =$$

$$-\iint_{\Sigma^-} dydz - dxdz + dxdy = -\iint_{D} \left\langle rot.\vec{F} \circ \vec{r}, \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\rangle (u,v)\,dudv =$$

$$-\iint_{D} \left\langle \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \right\rangle (x,y)\,dxdy = -\iint_{D} dxdy.$$

Efectuând schimbarea de cariabile $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $(u,v) = \Delta = [0,1] \times [0,2\pi]$, obţinem

$$I = -\iint_{D} dxdy = -\iint_{\Delta} ududv = -\int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} udv\right] du = -\pi.$$