Universitatea „Constantin Brâncuşi” Tg-Jiu
Facultatea de inginerie

MATEMATICI SPECIALE

- probleme -

Asist . univ . **Prof. univ. dr.**

OLIMPIA PECINGINĂ ***MIODRAG IOVANOV***

Tg . Jiu
- 2008 -

Cuvânt înainte

Culegerea conține probleme rezolvate si propuse de matematici speciale. Acestea sunt prezentate în cele şapte capitole.

De asemenea, ultimul capitol cuprinde selectiv probleme din subiectele date la concursurile naționale de matematică pentru învățământul tehnic *(„Traian Lalescu”).*

Culegerea se adresează studenților din anul I şi II, ai Facultății de Inginerie.

Autorii

CUPRINS

Capitolul I

ECUAȚII DIFERENȚIALE

1. Să de integreze ecuația diferențială de ordinul întâi liniară

$$y' - y\,tgx = \frac{1}{\cos x},\ y(0) = 0$$

Soluție: Ecuația omogenă atașată este: $y'\text{-}y\ tgx = 0$ sau $\frac{dy}{y} = tgx\,dx$

cu soluția $\ln y = \text{-}\ln\cos x + \ln C\ \ sau\ y = \frac{C}{\cos x}$. Pentru rezolvarea ecuației neomogene considerăm pe y sub forma $y = \frac{C(x)}{\cos x}$; avem $y' = \frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x}$.

Înlocuind în ecuație obținem:

$$\frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)}{\cos x}\cdot tgx = \frac{1}{\cos x}$$

De unde: $C'(x) = 1$ şi $C(x) = x + C$. Soluția generală a ecuației date va fi:

$$y = \frac{x + C}{\cos x}.$$

Soluția problemei Cauchy $y(0)=0$ este $C=0$. Deci soluția particulară a ecuației diferențiale $y = \frac{x}{\cos x}$.

2. Să se integreze ecuația diferențială omogenă:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy},\ \ y(1) = 0$$

Soluție:

Folosind substituția $y = xt,\ \ y' = t + xt'$ obținem succesiv:

$$xt' + t = t + \frac{1}{t},\ xt' = \frac{1}{t},\ \ t\,dt = \frac{dx}{x},\ \ \frac{t^2}{2} = \ln|x| + C$$

de unde $\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C$. Punând condiția inițială $y(1) = 0$ obținem $C = 0$ şi soluția particulară cerută este $y^2 = 2x^2 \ln|x|$.

3. Să se integreze ecuația diferențială omogenă generalizată:

$$(3x\text{-}7y\text{-}3)y' + 7x\text{-}3y\text{-}7 = 0.$$

Soluție: Observăm că $\delta = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 40 \neq 0.$ Sistemul $\begin{cases} 3x - 7y - 3 = 0 \\ 7x - 3y - 7 = 0 \end{cases}$ are soluția $x=1$, $y=0$. Substituția $x = 1+u$, $y = v$ implică $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ şi ecuația dată devine $(3u - 7v)\, v' + 7u - 3v = 0$.

Facem substituția $v = u{\cdot}z(u)$, ceea ce conduce la soluția generală $(z-1)^2 (z+1)^5 u^7 = C$ sau $(y - x + 1)^2 (y + x + 1)^5 = C$.

4. Să se integreze ecuația diferențială a lui Bernoulli:

$$y' - \frac{1}{x} y = -2xy^2, \quad y(1) = 1.$$

Soluție: $\alpha = 2 \quad (y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha})$. Facem substituția $u = y^{1-\alpha}$ sau $u=y^{-1}$. Obținem $u' = -\frac{y'}{y^2}$ sau $y' = -\frac{u'}{u^2}$. Ecuația dată devine: $-\frac{u'}{u^2} - \frac{1}{xu} = -2x\frac{1}{u^2}$ sau $u' + \frac{u}{x} = 2x$ cu soluția generală $u = \frac{2x^2}{3} + \frac{C}{x}$. Soluția generală a ecuației este $y = \frac{1}{\frac{2x^2}{3} + \frac{C}{x}}$. Din condiția inițială deducem $C = \frac{1}{3}$, astfel că soluția particulară căutată este $y = \frac{3x}{2x^3 + 1}$.

5. Să se integreze ecuația diferențială a lui Riccati:

$$y' + y^2 \sin x = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}, \quad y_P = \frac{1}{\cos x}, \; y(0) = -2 .$$

Soluție: Substituția $y = y_P + \frac{1}{u}$ sau $y = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{u}$ conduce la ecuația liniară $u' - 2\,tgx \cdot u = \sin x$.

Soluția generală a acestei ecuații diferențiale este $u = \dfrac{C}{\cos^2 x} - \dfrac{\cos x}{3}$.

Deci soluția generală a ecuației date este $y = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{3\cos^2 x}{3C - \cos^3 x}$. Din condiția Cauchy $y(0)=-2$ rezultă $C = 0$ şi deci soluția particulară căutată este $y = -\dfrac{2}{\cos x}$.

6. Să se integreze ecuația diferențială de tip Clairaut:

$$y = xy' + y'^2$$

Soluție: Notând $y' = p$ ecuația devine $y = xp + p^2$. Derivând în raport cu x şi ținând seama de notația făcută, obținem $p = p + x\dfrac{dp}{dx} + 2p\dfrac{dp}{dx}$ sau $\dfrac{dp}{dx}(x + 2p) = 0$. Soluția generală este $y = Cx + C^2$, iar soluția singulară este $x=-2p$, $y = -p^2$ sau $y = -\dfrac{x^2}{4}$.

7. Să se integreze ecuațiile diferențiale liniare de ordin superior cu coeficienți constanți omogene:

a) $y'' - y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$

b) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$

c) $y^{(3)} - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

d) $y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y = 0$

e) $y^{(4)} - y = 0$

f) $y^{(5)} + 4y^{(3)} = 0$

Soluție :

a) Ecuația caracteristică $r^2 - 1 = 0$ are rădăcinile reale şi distincte $r_1 = -1$, $r_2 = 1$. Soluția generală este $y = C_1e^{-x} + C_2e^{x}$.

Din condițiile inițiale obținem $C_1 = C_2 = 1$ şi deci soluția particulară este $y = e^{-x} + e^{x}$.

b) Ecuația caracteristică $r^4 - 5r^2 + 4 = 0$ are rădăcinile reale distincte $r_1=-2$, $r_2 = -1$, $r_3=1$, $r_4=2$. Soluția generală a ecuației diferențiale est

$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + C_3e^{x} + C_4e^{2x}.$

c) Ecuația caracteristică $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$ are rădăcinile reale distincte $r_1=1, r_2=2, r_3=3$. Soluția generală a ecuației diferențiale este

$y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}.$

d) Ecuația caracteristică $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$ are rădăcinile reale multiple: $r_1=r_2=r_3=1$. Soluția generală a ecuației diferențiale este

$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{x}.$

e) Ecuația caracteristică $r^4 - 1 = 0$ are rădăcinile $r_1= -1, r_2= 1, r_3= -i, r_4=i$. Soluția generală a ecuației diferențiale este

$y = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_4\cos x + C_5\sin x.$

f) Ecuația caracteristică $r^5 + 4r^3 = 0$ are rădăcinile $r_1= r_2= r_3= 0, r_4=-2i, r_5= 2i$. Soluția generală a ecuației diferențiale este

$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\cos 2x + C_5\sin 2x.$

8. Să se integreze ecuațiile diferențiale liniare de ordin superior cu coeficienți constanți neomogene:

$$a)\ y''-5y'+6y = 6x^2 - 10x + 2$$
$$b)\ y^{(4)} - y^{(3)} - y' + y = e^{x}$$

Soluție: a) Ecuația caracteristică a ecuației omogene este $r^2 - 5r + 6=0$ cu rădăcinile $r_1= 2, r_2= 3$. Soluția generală a ecuației omogene este

$y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$

Deoarece $r=0$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice căutăm soluția particulară sub forma $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Înlocuind y_p în ecuația neomogenă obținem:

$2A - 10Ax - 5B + 6Ax^2 + 6Bx + 6C \equiv 6x^2 - 10x + 2$ de unde rezultă $A=1, B=C=0$ şi deci $y_p=x^2$. Soluția generală $(y = y_h+y_p)$ este:

$y = C_1e^{x} + C_2e^{3x} + x^2$

b) Ecuația caracteristică $r^4 - r^3 - r + 1 = 0$ are rădăcinile

şi deci

$$y_h = C_1e^x + C_2xe^x + e^{-\frac{x}{2}}(C_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

Deoarece $r=1$ este rădăcină dublă a ecuației caracteristice soluția particulară va avea forma $y_p = Ax^2e^x$. Rezultă $A=\frac{1}{6}$ şi $y_p=\frac{1}{6}x^2e^x$ iar soluția generală a ecuației neomogene $(y = y_h+y_p)$ este:

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + e^{-\frac{x}{2}}(C_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)+\frac{1}{6}x^2e^x.$$

9. Să se integreze ecuația de tip Euler:

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x$$

Soluție: Folosim substituția $x=e^t$. Avem $y'=e^{-t}\frac{dy}{dt}$ şi $y''=e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$. Ecuația dată devine: $\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=e^t$. Ecuația omogenă ataşată acestei ecuații are soluția generală $y_h = C_1e^t + C_2e^{2t}$, iar soluția particulară $y_p = -te^t$. Deci soluția generală a ecuației neomogene este $y = C_1e^t + C_2e^{2t} - te^t$ sau $y = C_1x + C_2x^2 - x\ln|x|$.

10. Să se integreze ecuația diferențială prin metoda variației constantelor

$$y''+y = tgx$$

Soluție: Ecuația caracteristică a ecuației omogene este $r^2+1=0$ cu rădăcinile $r_1= -i$ şi $r_2 = i$. Soluția $y_h= C_1\cos x + C_2\sin x$. Considerăm soluția sub forma $y=C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$ (variația constantelor sau a lui Lagrange). Constantele $C_1(x)$ şi $C_2(x)$ verifică sistemul:

$$\begin{cases} C'_1(x)\cos x + C'_2(x)\sin x = 0 \\ -C'_1(x)\sin x + C'_2(x)\cos x = tgx \end{cases}$$

Soluția sistemului este: $C_1(x) = \sin x - \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C_1$ şi

$C_2(x)$= -cos$x + C_2$. Soluția generală a ecuației neomogene dată va fi:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

11. Să se rezolve sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = x - y \end{cases}, \ x = x(t) \ , y = y(t).$$

Soluție: Sin ecuația a doua $x = y' + y$, $x' = y'' + y'$. Înlocuind în prima ecuație obținem $y'' + 4y' + 4y = 0$. Ecuația caracteristică $r^2 + 4r + 4 = 0$ are rădăcinile $r_1 = r_2 = -2$. Soluția generală este $x(t) = (C_1 + C_2 - C_2 t)e^{-2t}$ şi $y(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-2t}$.

12. Să se integreze sistemul simetric de ecuații diferențiale:

$$\frac{dx_1}{x_3 - x_2} = \frac{dx_2}{x_1 - x_3} = \frac{dx_3}{x_2 - x_1}$$

Soluție:

Sistemul dat poate fi scris sub forma:

$$\frac{dx_1}{x_3 - x_2} = \frac{dx_2}{x_1 - x_3} = \frac{dx_3}{x_2 - x_1} = \frac{dx_1 + dx_2 + dx_3}{0} = \frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3}{0}.$$

De aici rezultă că $d(x_1 + x_2 + x_3) = 0$ şi $x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 = 0$. Soluția generală va fi formată din două integrale prime: $x_1 + x_2 + x_3 = C_1$ şi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = C_2$.

13. Să se integreze ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi liniare:

$$\sqrt{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \sqrt{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \sqrt{x_3}\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0, \qquad u\Big|_{x_3 = 1} = x_1 - x_2.$$

Soluție: Sistemul caracteristic $\frac{dx_1}{\sqrt{x_1}} = \frac{dx_2}{\sqrt{x_2}} = \frac{dx_3}{\sqrt{x_3}}$ are integralele prime distincte: $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_3} = C_1$ şi $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_3} = C_2$.

Soluția generală a ecuației este:

$$u = \Phi(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_3},\ \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3}).$$

Pentru $x_3=1$ obținem $\sqrt{x_1} - 1 = C_1,\ \sqrt{x_2} - 1 = C_2,$ de unde $x_1 = (1+C_1)^2$, $x_2= (1+C_2)^2$. Cu ajutorul condiției Cauchy obținem $u = (1+C_1)^2 - (1-C_2)^2$. Înlocuind pe C_1 şi C_2 găsim soluția ecuației date:

$$u = (1+\sqrt{x_1} - \sqrt{x_3})^2 - (1+\sqrt{x_2} - \sqrt{x_3})^2.$$

14. Să se integreze ecuația diferențială cu derivate parțiale cvasiliniară:

$$2x_1 u\frac{\partial u}{\partial x_1} + 2x_2 u\frac{\partial u}{\partial x_2} = u^2 - x_1^2 - x_2^2, \qquad u\Big|_{x_2=1} = x_1.$$

Soluție: Sistemul caracteristic este:

$$\frac{dx_1}{2x_1 u} = \frac{dx_2}{2x_2 u} = \frac{du}{u^2 - x_1^2 - x_2^2}$$

Din primele două ecuații găsim următoarea integrală primă: $\frac{x_1}{x_2} = C_1$. Scriem sistemul caracteristic sub forma: $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{2u\,du}{u^2 - x_1^2 - x_2^2}$

Alegând combinația integrabilă $2x_1,\ 2x_2,\ 1$ sistemul de mai sus poate fi scris astfel:

$$\frac{2x_1 dx_1}{2x_1^2} = \frac{2x_2 dx_2}{2x_2^2} = \frac{2u\,du}{u^2 - x_1^2 - x_2^2} = \frac{2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2 + 2u\,du}{x_1^2 + x_2^2 + u^2}$$

sau (prima şi ultima):

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{d(x_1^2 + x_2^2 + u^2)}{x_1^2 + x_2^2 + u^2},$$

şi integrala primă: $\frac{x_1^2 + x_2^2 + u^2}{x_1} = C_2.$

Soluția generală a ecuației date este:

$$u = \Phi\left(\frac{x_1}{x_2},\ \frac{x_1^2 + x_2^2 + u^2}{x_1}\right).$$

Pentru $x_2=1$, $u\Big|_{x_2=1} = x_1$ obținem: $x_1 = C_1$ şi $\frac{2x_1^2+1}{x_1} = C_2$

Înlocuind x_1 cu C_1 obținem între C_1 şi C_2 relația:

$$\frac{2C_1^2+1}{C_1} = C_2$$

Revenind la valorile lui C_1 şi C_2 din cele două integrale prime obținem:

$$\frac{2x_1^2+1}{x_1} = \frac{x_1^2+x_2^2+u^2}{x_1}$$

de unde soluția generală a ecuației cvasiliniare date:

$$u^2 = x_1^2 - x_2^2 + 1.$$

Probleme propuse.

Să se integreze ecuațiile diferențiale:

1. $y' + \frac{2}{x^2-1} y = 2x+2,\ y(0) = -3$
2. $y' + \frac{2}{x} y = x^3$
3. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)\, dy$
4. $2x^2 y' = 4xy - y^2,\ y(1) = 1$
5. $y' = \frac{3x-4y+7}{4x-5y+11}$
6. $(3x+3y-1)dx + (x+y+1)dy = 0$
7. $xy' + y = -x^2y^2,\ y(1) = 1$
8. $y' + y^2 + \frac{4}{x} y + \frac{2}{x^2} = 0,\ y_p = \frac{a}{x}$
9. $y = xy' + \frac{1}{y'}$
10. $y = (1+y')x + y'^2$
11. a) $y'' + 2y' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

    b) $y^{(3)} - y'' + y' - y = 0$

    c) $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 3y'' + 2y' + y = 0$

    d) $y^{(5)} + y'' = 0$

12. $a)\ y''-y'-2y=2x+3$

$b)\ y^{(3)}-y''=x,\ \ y(1)=1, y'(1)=0, y'(1)=-1$

$c)\ y''-7y'+6y=\sin x+3\cos x$

$d)\ y''-2y'+2y=2e^{x}\cos x$

$e)\ y^{(4)}-16y=6e^{2x}+e^{-x}+3\cos 2x+2\sin 3x$

13. $a)\ x^2y''-xy'+y=2x,\ \ y(1)=0,\ \ y'(1)=1$

$b)\ x^3y^{(3)}+3x^2y''+xy'-y=x,\ \ y(1)=y'(1)=y''(1)=0$

14. $a)\ y''-y=\dfrac{1}{\cos x}$

$b)\ y''-2y'+y=\dfrac{1}{x}e^{x}$

15. $a)\ \begin{cases} x'=-2x-y+\sin t \\ y'=4x+2y+\cos t \end{cases},\quad x=x(t)\ ,\ y=\ y(t).$

$b)\begin{cases} x'=y+z \\ y'=z+x \\ z'=x+y \end{cases},\quad \begin{matrix} x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ z=z(t) \\ x(0)=1,\ \ y(0)=1,\ \ z(0)=0 \end{matrix}.$

16. a) $\dfrac{dx_1}{x_1(x_2-x_3)}=\dfrac{dx_2}{x_2(x_3-x_1)}=\dfrac{dx_3}{x_3(x_1-x_2)}$

b) $\dfrac{dx_1}{x_1^2-x_2^2-x_3^2}=\dfrac{dx_2}{2x_1x_2}=\dfrac{dx_3}{2x_1x_3}$

c) $\dfrac{dx_1}{x_1}=\dfrac{dx_2}{x_2}=\dfrac{dx_3}{x_3-\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$

17. $x_1(x_2-x_3)\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+x_2(x_3-x_1)\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+x_3(x_1-x_2)\dfrac{\partial u}{\partial x_3}=0$

18. $a)\ x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}-x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=u,\ \ u\Big|_{x_1=x_2}=x_1^3$

$b)\ x_1u\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+x_2u\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=-x_1x_2,\ \ u\Big|_{x_2=2}=x_1$

Capitolul II

FUNCȚII COMPLEXE

1. Să se determine funcția olomorfă *f(z)* ştiind că partea reală a sa este :

***u(x,y)=ln(x²+y²)* şi *f*(1)=*0*.**

Soluție:

Verificăm $\Delta u=0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. Avem: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$ şi $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$.

Apoi, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}. \qquad (*)$$

Din cauza simetriei funcției *u(x,y)*, obținem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}. \qquad (**)$$

Din relațiile (*) şi (**) vom obține:

$\Delta u=\frac{2y^2-2x^2+2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=0$, adică *u(x,y)* este o funcție armonică ($\Delta u = 0$).

Mai departe, folosim:

$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$ şi facem $y=0$ şi $x = z \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2}{z}$ şi $\frac{\partial u}{\partial y}=0$; deci $f'(z)=\frac{2}{z}$ de unde $f(z)=2\int\frac{dz}{z} \Rightarrow f(z)=2\ln z+C$; din condiția $f(1)=0$ găsim: $2\ln 1+C=0 \Rightarrow C=0$ şi deci: $f(z)=2\ln z$.

2. Să se determine funcția olomorfă *f(z)* știind că partea reală a sa este:

$u(x,y)=\varphi(x+\sqrt{x^2+y^2})$**, φ derivabilă,** $f(0)=0$ **și** $f'(1)=\frac{1}{2}$**.**

Soluție:

Verificăm $\Delta u=0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. Notăm $x+\sqrt{x^2+y^2}=t$.

Avem: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{d\varphi}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{d\varphi}{dt}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{d\varphi}{dt}\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

Apoi, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{d^2\varphi}{dt^2}\frac{\partial t}{\partial x}\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{d\varphi}{dt}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}\frac{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}{x^2+y^2}+\frac{d\varphi}{dt}\frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (*)$$

Avem,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{d\varphi}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{d\varphi}{dt}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{și} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{d\varphi}{dt}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

de unde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{d\varphi}{dt}\frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (**)$$

Din (*) și (**), prin adunare, obținem:

$$\Delta u=\frac{d^2\varphi}{dt^2}\frac{x^2+2x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2+y^2}{x^2+y^2}+\frac{d\varphi}{dt}\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

sau

$$\Delta u=\frac{d^2\varphi}{dt^2}\frac{2\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}+\frac{d\varphi}{dt}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

de unde:

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(2\frac{d^2\varphi}{dt^2}t + \frac{d\varphi}{dt}\right) \qquad (***)$$

Din (***) şi condiția $\Delta u=0$ obținem ecuația diferențială:

$$2t\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} = 0 \qquad (1)$$

Ecuația (1) mai poate fi scrisă astfel:

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = -\frac{1}{2t} \qquad (1')$$

Integrând ($1'$) obținem:

$$\ln\varphi' = -\frac{1}{2}\ln t + \ln C_1 \qquad (2)$$

sau

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2C_1}{2\sqrt{t}} \qquad (2')$$

de unde:

$$\varphi(t) = 2C_1\sqrt{t} + C_2 \qquad (3)$$

C_1, C_2 – constante reale.

Din relația (3) obținem:

$$u(x,y) = 2C_1\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}} + C_2 \qquad (4)$$

Folosim acum faptul că: $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ şi înlocuind y=0 şi x=z

obținem $f'(z) = \frac{2C_1}{\sqrt{2}\sqrt{z}} = \frac{2\sqrt{2}C_1}{2\sqrt{z}}$ de unde:

$$f(z) = 2\sqrt{2}C_1\sqrt{z} + C_2 \qquad (5)$$

Din condițiile $f(0)=0$ şi $f'(1) = \frac{1}{2}$ obținem:

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}C_1 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ \text{şi} \\ \sqrt{2}C_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \qquad (6)$$

Din (5) şi (6) obținem:

$f(z) = 2\sqrt{2}\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{z}$ adică

$$f(z) = \sqrt{z} \quad . \qquad (7)$$

3. Să se arate că $f(z) = z^2, z \neq 0,$ realizează o transformare conformă în C\{0}. Să se afle imaginea dreptelor *x=1* şi *y*=1. Să se verifice proprietatea exprimată de o transformare conformă.

Soluție:

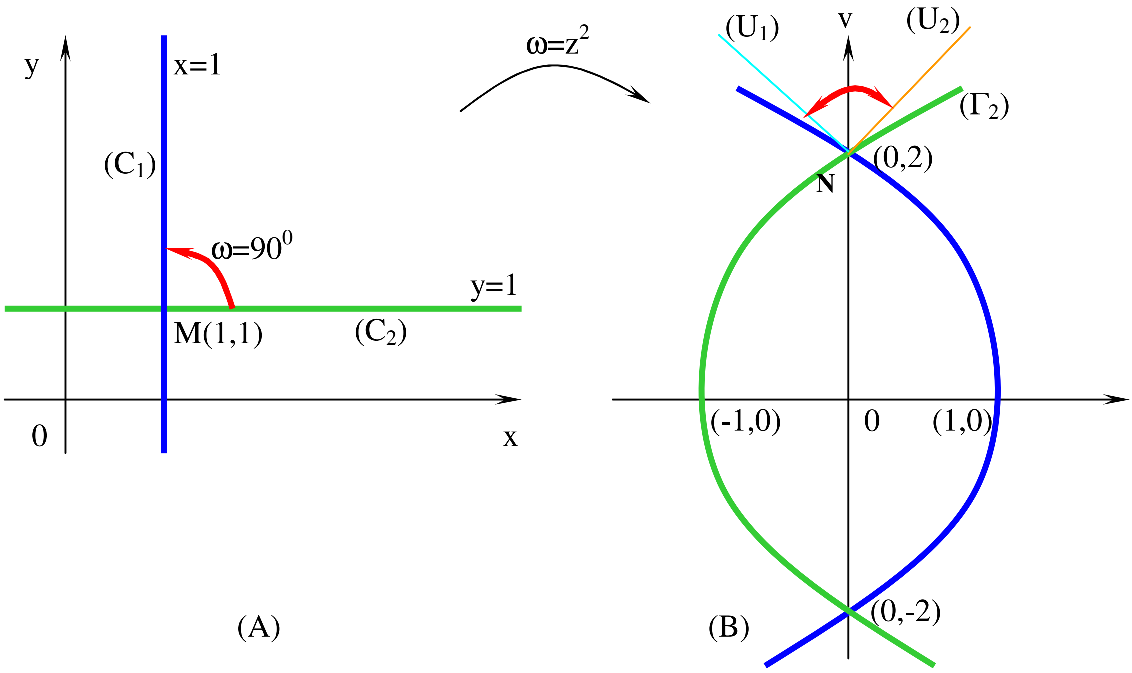
Observăm că $f(z) = (x+iy)^2 = x^2 + y^2 + 2xyi;$ rezultă

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases} \qquad (*)$$

Condițiile Cauchy-Riemann sunt:

$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y \end{cases} \Rightarrow f \in H(C^*)$ şi deci funcția *f(z)* realizează o transformare conformă şi $f'(z) = 2z \neq 0$ când $z \neq 0$.

Avem $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$



(A) (B)

Imaginea dreptei x=1 (C_1) este parabola (Γ_1) având ecuaţia $v^2 = -4(u-1)$ (dacă facem x=1 în (*) obţinem: $\begin{cases} u = 1 - y^2 \\ v = 2y \end{cases} \underset{y=\frac{v}{2}}{\Rightarrow} u = 1 - \frac{v^2}{4}$ de unde $v^2 = -4(u-1)$, $f(C_1) = \Gamma_1$) .

Imaginea dreptei y=1 (C_2) este parabola (Γ_2) având ecuaţia $v^2 = 4(u+1)$, $f(C_2) = \Gamma_2$.

Trebuie să arătăm că unghiul dintre U_1 şi U_2 este de 90^o ((U_1) este tangentă la (Γ_1); (U_2) este tangentă la (Γ_2)).

Pentru aceasta trebuie să arătăm că: $m_{U_1} m_{U_2} = -1$, m – pante .

Avem: $m_{U_1} = v'(0) = -\frac{4}{4} = -1$, $v = \sqrt{-4(u-1)}$ iar $v'(u) = \frac{-4}{2\sqrt{-4(u-1)}}$

şi $m_{U_2} = v'(0) = \frac{4}{4} = 1$, $v = \sqrt{4(u+1)}$ iar $v'(u) = \frac{4}{2\sqrt{4(u+1)}}$, deci:

$m_{U_1} m_{U_2} = -1$, adică $(U_1) \perp (U_1) \Leftrightarrow \omega' = 90^{o}$ şi deci $\omega = \omega'$.

4. Să se dezvolte în serie Laurent funcţia: $f(z) = \dfrac{2z-1}{z^2 - z - 6}$ **în domeniile:**

a) $|z| < 2$;

b) $2 < |z| < 3$;

c) $|z| > 3$;

Soluţie:

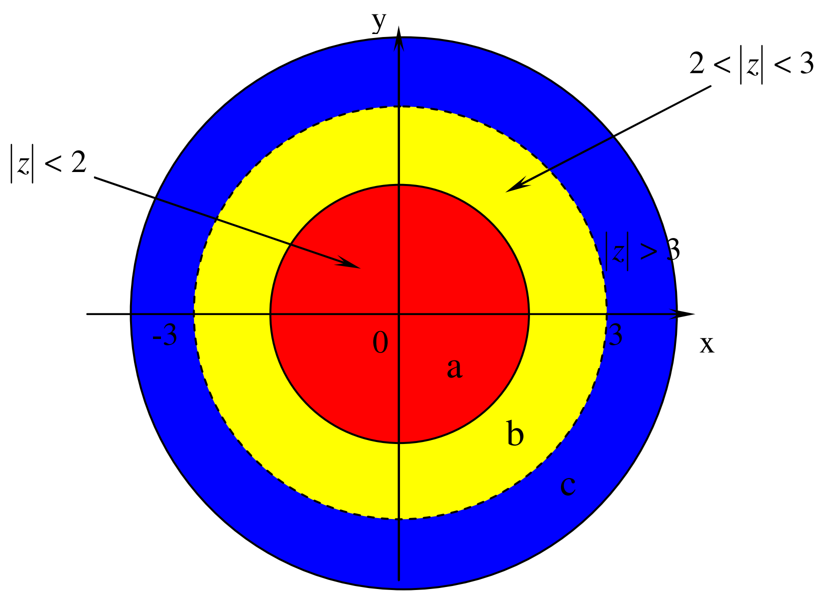
Observăm că: $f(z) = \dfrac{A}{z+2} + \dfrac{B}{z-3}$ de unde,

$2z - 1 \equiv (A+B)z - 3A + 2B;$ deci:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -3A + 2B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$ şi deci:

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-3} \tag{1}$$

Observăm că domeniile a), b) şi c) sunt:



a) $|z| < 2 \Leftrightarrow \left|\frac{z}{2}\right| < 1.$ Relația (1) poate fi scrisă

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} \qquad (1')$$

În $(1')$, $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$ şi putem folosi seria geometrică:

$$\frac{1}{1+q} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}q^{n-1} \text{ şi } \frac{1}{1-q} = \sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}, \text{ având } |q|<1. \qquad (2)$$

Obținem:

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{3^{n-1}} \qquad (1'')$$

de unde:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)z^{n-1} \qquad \text{(a)}$$

((a) reprezintă partea tayloriană a dezvoltării lui *f(z)*).

b) În figură, (b) reprezintă coroana $2 < |z| < 3.$ În aceasta, vom obține dezvoltarea în serie Laurent a lui *f(z)*.

Observăm că: $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$ şi $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$ în (b). Atunci $f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}$ de unde:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}}{z^n}}_{\text{Partea principală}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{3^n}}_{\text{Partea tayloriană}} \qquad \text{(b)}$$

În (c) obținem doar partea principală deoarece: $\left|\frac{3}{z}\right| < 1$ şi $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$. Avem:

$$f(z) = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}}{z^{n-1}} + \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^{n-1}} \qquad (2)$$

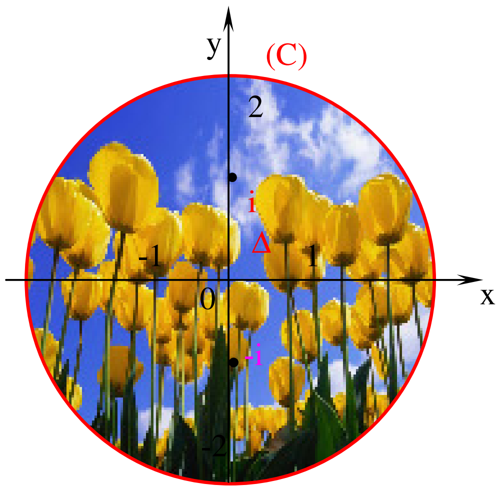
sau

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}2^{n-1}+3^{n-1}\right]\frac{1}{z^n} \qquad \text{(c)}$$

5. Să se calculeze $I=\int_C \frac{e^{i\pi z}}{z^2+1}dz$ **unde** $C: x^2+y^2=4$**.**

Soluţie:

Observăm că $x^2+y^2=4$ este un cerc :



Polii funcţiei $f(z)=\frac{e^{i\pi z}}{z^2+1}$ sunt $z_1=i$ şi $z_2=-i$ (poli simpli). Folosind teorema reziduurilor obţinem:

$$I=2\pi i(\mathrm{rez}f(-i)+\mathrm{rez}f(i)) \qquad (1)$$

Avem:

$$\mathrm{rez}f(-i)=\frac{P(-i)}{Q'(-i)}=\frac{e^{\pi}}{-2i} \text{ şi } \mathrm{rez}f(i)=\frac{P(i)}{Q'(i)}=\frac{e^{-\pi}}{2i} \qquad (2)$$

Deci:

$$I=2\pi i\left(-\frac{e^{\pi}}{2i}+\frac{e^{-\pi}}{2i}\right) \text{ de unde}$$

$$I=\pi\left(e^{-\pi}-e^{\pi}\right)\ . \qquad (3)$$

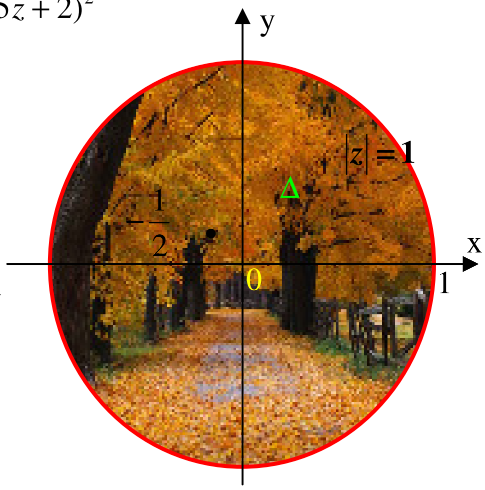
6. Să se calculeze: $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5+4\cos\theta)^2}$

Soluție:

Notăm $e^{i\theta} = z$. Observăm că: $dz = izd\theta$ de unde $d\theta = \frac{dz}{iz}$; apoi $\cos\theta = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$ şi integrala devine:

$$I = \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\left(5 + 4\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^2} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{z}{(2z^2+5z+2)^2}dz$$

Observăm că $|z| = 1$ este:



Polii funcției $f(z) = \frac{z}{(2z^2+5z+2)^2}$ sunt $z_1 = -\frac{1}{2}$ şi $z_2 = -2$. Observăm că doar $z_1 = -\frac{1}{2} \in \Delta$ şi el este pol dublu. Folosind teorema reziduurilor obținem:

$$I = 2\pi i \frac{1}{i} rezf\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad (1)$$

Avem: $rezf\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(2-1)!}\left[\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 .f(z)\right]'_{z=-\frac{1}{2}}$

de unde:

$$rezf\left(-\frac{1}{2}\right) = \left[\frac{(2z+1)^2}{4}\frac{z}{(2z+1)^2(z+2)^2}\right]'_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\frac{(z+2)^2 - 2z(z+2)}{(z+2)}\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}}$$

sau

$$rezf\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\frac{-z+2}{(z+2)^3}\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\frac{2+\frac{1}{2}}{\left(2-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{4}\frac{5}{2}\frac{8}{27}$$

deci:

$$\operatorname{rez} f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{27} \tag{2}$$

Din (1) şi (2) găsim:

$$I=\frac{10\pi}{27}. \tag{3}$$

7. Să se calculeze: $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta$**,** $a>1$**,** $n\in N^*$**.**

Soluție:

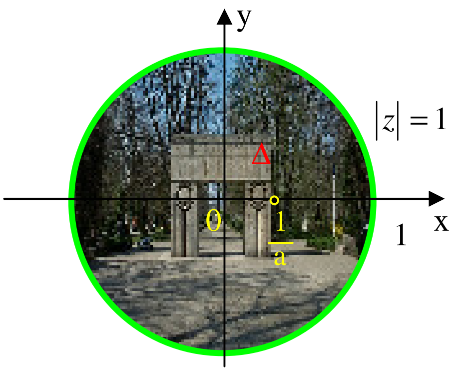
Să considerăm şi integrala $J=\int_0^{2\pi}\frac{\sin n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta$ şi să ne propunem să calculăm $I+iJ$. Avem:

$$I+iJ=\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta+i\sin n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta.$$

Notăm: $e^{i\theta}=z$ $(e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta)$. Observăm că $dz=izd\theta$, de unde $d\theta=\frac{dz}{iz}$; $\cos\theta=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}$, găsim:

$$I+iJ=\int_0^{2\pi}\frac{z^n}{1-2a\frac{z+\frac{1}{z}}{2}+a^2}\frac{dz}{iz}$$, care se mai poate scrie astfel:

$$I+iJ=-\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{z^n}{az^2-(1+a^2)z+a}dz \tag{1}$$



Observăm că funcția:

$$f(z)=\frac{z^n}{az^2-(1+a^2)z+a}$$ are

polii simpli $z_1=\frac{1}{a}$ şi $z_2=a$; observăm

că $z_1=\frac{1}{a}\in\Delta$ şi $z_2=a\notin\Delta$.

Aplicând teorema reziduurilor, relația (1) devine:

$$I+iJ=-\frac{1}{i}2\pi i\operatorname{rez} f\left(\frac{1}{a}\right) \tag{1'}$$

Observăm că:

$$rez f\left(\frac{1}{a}\right) \underset{\frac{P(a)}{Q'(a)}}{=} \frac{\frac{1}{a^n}}{2a\frac{1}{a}-(1+a^2)} = \frac{\frac{1}{a^n}}{1-a^2}$$

Cu acest rezultat, obţinem:

$$I + iJ = -2\pi \frac{1}{a^n}\frac{1}{1-a^2} = \frac{2\pi}{(a^2-1)a^n} \qquad (2)$$

Din relaţia (2) obţinem în final:

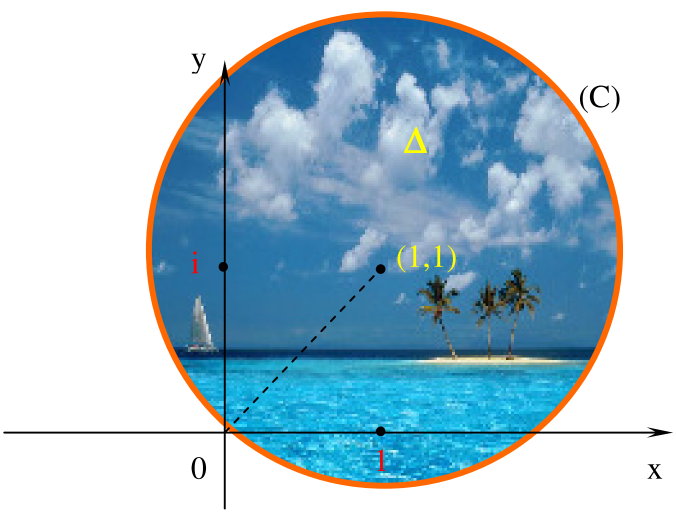
$$\begin{cases} I = \dfrac{2\pi}{a^n(a^2-1)} \\ şi \\ J = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

8. Să se calculeze integrala: $I = \int_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$ **unde**

(C): $x^2 + y^2 = 2x + 2y$.

Soluţie:

Observăm că (C) este un cerc cu centrul în punctul (1,1) şi de rază $r = \sqrt{2}$, adică:



Singularitățile funcției $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$ sunt polii simpli $z_1=i$ şi $z_2=-i$ şi polul dublu $z_3=1$. Observăm că: $z_1=i\in\Delta$, $z_2=-i\notin\Delta$ şi $z_3=1\in\Delta$.

Aplicând teorema reziduurilor, obținem că:

$$I=2\pi i(rezf(i)+rezf(1)). \tag{1}$$

Avem:

$$rezf(i)\underset{\frac{P(i)}{Q'(i)}}{=}\left.\frac{1}{2(z-1)(z^2+1)+(z-1)^2 2z}\right|_{z=i}=\frac{1}{(i-1)^2 2i}=\frac{1}{4} \tag{2}$$

şi

$$rezf(1)=\frac{1!}{(2-1)!}\left[(z-1)^2 f(z)\right]'_{z=1}=\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'_{z=1}=-\left.\frac{2z}{(z^2+1)^2}\right|_{z=1}=-\frac{2}{4} \tag{3}$$

Din (2) şi (3) obținem:

$$I=2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{4}\right) \tag{4}$$

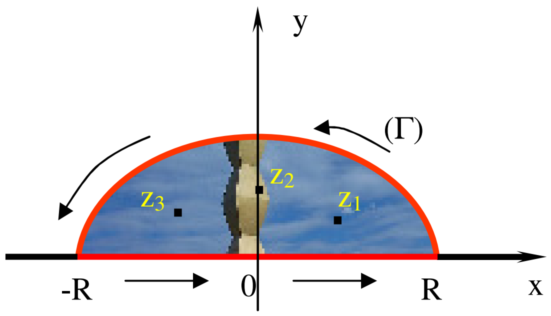
de unde obținem valoarea integralei:

$$I=-\frac{\pi i}{2} \tag{5}$$

9. Să se calculeze $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4}{1+x^6}dx$

Soluție:

Fie funcția $f(z)=\dfrac{z^4}{1+z^6}$. Observăm că $z^6+1=0$ are polii următori: $z_1=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$, $z_2=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$ şi $z_3=\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}$ (având partea imaginară pozitivă). Să considerăm conturul (C) de mai jos :



$(C)=[-R,R]\cup(\Gamma)$

Observăm că:

$$\int_C f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(z)dz + \int_\Gamma f(z)dz \qquad (1)$$

Aplicând teorema reziduurilor (1) devine:

$$2\pi i\sum_{k=1}^{3} rezf(z_k) = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_\Gamma f(z)dz \qquad (1')$$

(pe $[-R,R]$, $z = x$). În ($1'$) trecem la $\lim\limits_{R\to\infty,|z|\to\infty}$ şi obţinem:

$$2\pi i(rezf(z_1) + rezf(z_2) + rezf(z_3)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \lim_{\substack{R\to\infty \\ |z|\to\infty}} \int_\Gamma f(z)dz \qquad (2)$$

Folosind în relaţia (2) Lema lui Jordan ($\lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ |z|\to\infty}} |zf(z)| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ |z|\to\infty}} \int_\Gamma f(z)dz = 0$)

observăm că:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i(rezf(z_1) + rezf(z_2) + rezf(z_3))$$

Pentru calculul reziduurilor folosim formula $rezf(a) = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$ (a pol simplu al funcţiei $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$). Avem:

$$rezf(z_1) = \frac{z_1^4}{6z_1^5} = \frac{1}{6z_1},\ rezf(z_2) = \frac{1}{6z_2} \text{ şi } rezf(z_3) = \frac{1}{6z_3}.$$

Cu cele de mai sus relaţia (2) devine:

$$I = \frac{2\pi i}{6}\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) \qquad (2')$$

sau

$$I = \frac{\pi i}{3}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}} + \frac{1}{i} + \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}\right) \text{ şi } I = \frac{\pi i}{3}\left(\frac{i}{-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} - i\right)$$

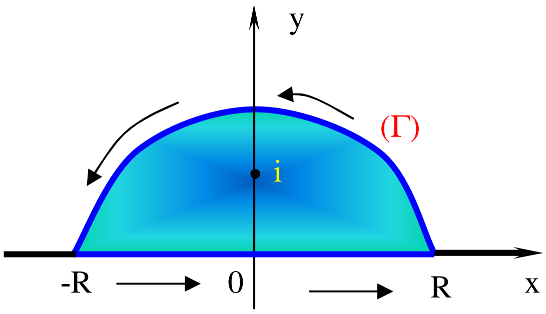
de unde:

$$I = \frac{2\pi}{3}. \qquad (3)$$

10. Să se calculeze: $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^4} dx.$

Soluție:

Fie funcția $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^4}$; observăm că: $z_1 = i$ ($\operatorname{Im} z_1 > 0$) este pol multiplu de ordinul patru. Să considerăm conturul de mai jos (C):



$(C) = [-R, R] \cup (\Gamma).$

Observăm că:

$$\int\limits_{C} f(z)dz = \int\limits_{-R}^{R} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma} f(z)dz. \qquad (1)$$

Aplicând teorema reziduurilor (1) devine:

$$2\pi i rez f(i) = \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx + \int\limits_{\Gamma} f(z)dz \qquad (1')$$

(pe [-R,R], $z = x$). În $(1')$ trecem la $\lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ |z|\to\infty}}$ şi obținem:

$$2\pi i rez f(i) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma} f(z)dz \qquad (2)$$

În relația (2) observăm că $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0$ (Lema lui Jordan: $\lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ |z|\to\infty}} |zf(z)| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0$).

$$\left(|zf(z)| = \left| \frac{z}{(1+z^2)^4} \right| = \frac{|z|}{|1+z^2|^4} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(1+z^2+\overline{z}^2+(z\overline{z})^2)^2} = \right.$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(1+2x^2-2y^2+x^4+y^4+2x^2y^2)} \to 0 \text{ pe } y = mx, m \in R, x \to \infty \Bigg).$$

Cu aceasta, (2) devine:

$$I = 2\pi i rezf(i) \qquad (3)$$

Putem calcula *rezf(i)* folosind formula:

$$rezf(a) = \frac{1}{(p-1)!}\left[(z-a)^p f(z)\right]_{z=a}^{(p-1)} \qquad (4)$$

În cazul nostru, $a = i$ şi $p = 4$. Relaţia (4) devine:

$$rezf(i) = \frac{1}{3!}\left[(z-i)^4 \frac{1}{(z-i)^4(z+i)^4}\right]_{z=i}^{///} \qquad (4^/)$$

sau

$$rezf(i) = \frac{1}{6}\left[-\frac{4}{(z+i)^5}\right]_{z=i}^{//} = \frac{1}{6}\left(\frac{4\cdot 5}{(z+i)^6}\right)_{z=i}^{/} = -\frac{1}{6}\frac{4\cdot 5\cdot 6}{(z+i)^7}\Bigg|_{z=i} = -\frac{20}{2^7 i^7} = -\frac{5}{2^5 i^4 i^3} = \frac{5}{32i}$$

deci

$$rezf(i) = \frac{5}{32i} \qquad (5)$$

Din (3) şi (5) obţinem:

$$I = 2\pi i \frac{5}{32i} \qquad (6)$$

de unde:

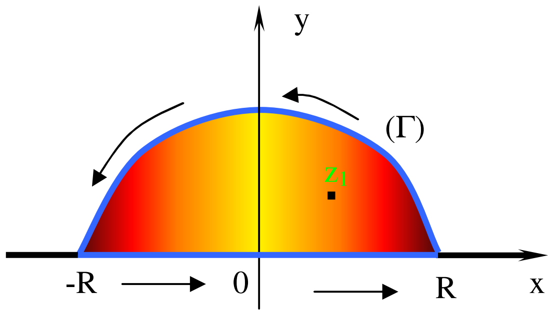
$$I = \frac{5\pi}{16} \qquad (7)$$

11. Să se calculeze integralele: $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-6x+13}dx$ **şi** $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2-6x+13}dx$**.**

Soluţie:

Să considerăm suma: $I_1 + iI_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 - 6x + 13} dx$. Fie funcția $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 - 6z + 13}$. Observăm că polii funcției sunt: $z_1 = 3 + 2i$ şi $z_2 = 3 - 2i$.

Reținem polul z_1 care are $\operatorname{Im} z_1 > 0$. Să considerăm conturul (C) de mai jos:



(C)=[-R,R]∪(Γ)

Observăm că:

$$\int_C f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(z)dz + \int_\Gamma f(z)dz. \qquad (1)$$

Aplicând teorema reziduurilor (1) devine:

$$2\pi i \, rezf(3+2i) = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_\Gamma f(z)dz \qquad (1`)$$

(pe $[-R, R], z = x$). În $(1')$ trecem la $\lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ |z|\to\infty}}$ şi obținem:

$$2\pi i \, rezf(3+2i) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)dz \qquad (2)$$

În relația (2) observăm că $\lim\limits_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)dz = 0$ (pe baza Lemei lui Jordan $\lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ |z|\to\infty}} |zf(z)| = 0.$) $\left(|zf(z)| = \left| \frac{z^2}{z^2 - 6z + 13} \right| \frac{1}{e^y} \to 0 \text{ când } |z| \to \infty \right)$. Avem:

$$rezf(3+2i) = \frac{(3+2i)e^{-2+3i}}{2(3+2i) - 6} \text{ de unde:}$$

$$rezf(3+2i) = \frac{1}{4e^2}[(2\cos 3 + 3\sin 3) - i(3\cos 3 - 2\sin 3)]. \qquad (3)$$

Din relațiile (2) şi (3) obținem:

$$I_1 + iI_2 = \frac{\pi}{2e^2}\left[3\cos 3 - 2\sin 3 + i(2\cos 3 + 3\sin 3)\right] \qquad (4)$$

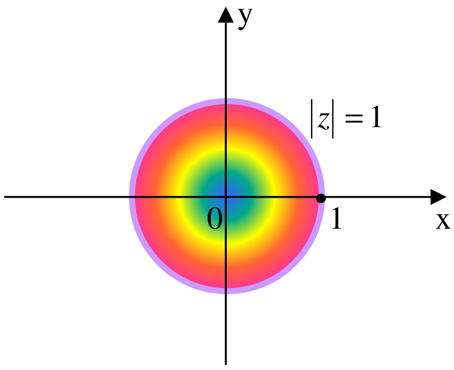
de unde:

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{\pi}{2e^2}(3\cos 3 - 2\sin 3) \\ \text{şi} \\ \mathrm{I}_2 = \dfrac{\pi}{2e^2}(2\cos 3 + 3\sin 3) \end{cases} \qquad (5)$$

12. Să se calculeze integrala $I = \int_{|z|=1} \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z(1-z)} dz$**.**

Soluție:

Observăm că $|z| = 1$ este cercul:



Singularitățile funcției $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z(1-z)}$ sunt $z_1 = 0$ p.s.e. şi $z_2 = 1$ pol simplu aparținând cercului $|z| = 1$. Aplicând teorema reziduurilor şi semireziduurilor avem:

$$I = 2\pi i rezf(0) + \pi i rezf(1). \qquad (1)$$

Pentru a calcula $rezf(0)$ vom căuta c_{-1} din dezvoltarea în serie Laurent (c_{-1} coeficientul lui $\frac{1}{z}$). Observăm că:

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{z}} = 1 + \dfrac{1}{1!z} + \dfrac{1}{2!z^2} + \dots \\ \text{şi} \\ \dfrac{1}{z(1-z)} = \dfrac{1}{z}(1 + z + z^2 + \dots) \end{cases};$$

deci $f(z) = \dots + \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots\right)\frac{1}{z} + \dots$, adică

$$c_{-1} = rezf(0) = e \qquad (2)$$

Pentru a calcula *rezf(*1*)* folosim formula: $rezf(a) = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$ (a pol simplu a lui *f(z)*) ; avem : $rezf(1) = \left.\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-2z}\right|_{z=1} = -e$.

Deci:

$$I = \pi \cdot e \cdot i \qquad (3)$$

Capitolul III

FUNCȚII SPECIALE

1. Să se calculeze integrala: $I=\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(1+x^6)^3}$ **.**

Soluție:

Notăm $\frac{1}{1+x^6}=t$. Dacă $x = 0$, $t = 1$ şi dacă $x=\infty, t=0$. Din substituția făcută observăm că: $x=\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{6}}$ de unde $dx=\frac{1}{6}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-\frac{5}{6}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt.$

Integrala devine: $I=\frac{1}{6}\int_0^1\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{3}}t^3\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-\frac{5}{6}}\frac{1}{t^2}dt=\frac{1}{6}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt$.

Din $p-1=\frac{3}{2}$ şi $q-1=-\frac{1}{2}$ obținem $p=\frac{5}{2}$ şi $q=\frac{1}{2}$.

Deci $I=\frac{1}{6}B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}=\frac{1}{6}\frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2}=\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{12}$, de unde ($\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$) obținem:

$$I=\frac{\pi}{16}.$$

2. Să se calculeze integrala: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 xdx$**.**

Soluție:

Notăm $\cos^2 x=t;\sin^6 x=(1-t)^3$; obținem $x=\arccos\sqrt{t}, dx=-\frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}}dt$.

Integrala devine:

$$I=-\frac{1}{2}\int_1^0(1-t)^3t^2\frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{5}{2}}dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$$

(din $p-1=\frac{3}{2}$ şi $q-1=\frac{5}{2}$ obținem $p=\frac{5}{2}$ şi $q=\frac{7}{2}$).

sau $$I=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(6)}=\frac{1}{2}\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{5!}\underset{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}}{\Rightarrow} I=\frac{3\pi}{512}.$$

3. Să se calculeze integrala: $I=\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^8}$.

Soluție:

Notăm $\frac{1}{1+x^8}=t$. Observăm că, dacă $x=0$, $t=1$ şi dacă $x=\infty$, $t=0$, din substituția făcută, $x=\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{8}}$ de unde $dx=\frac{1}{8}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-\frac{7}{8}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$.

Integrala devine:

$$I=-\frac{1}{8}\int_1^0 t(1-t)^{-\frac{7}{8}}t^{\frac{7}{8}}t^{-2}dt=\frac{1}{8}\int_0^1 t^{-\frac{1}{8}}(1-t)^{-\frac{7}{8}}dt.$$

Observăm că $p-1=-\frac{1}{8}$ şi $q-1=-\frac{7}{8}$, de unde $p=\frac{7}{8}$ şi $q=\frac{1}{8}$.

Deci

$$I=\frac{1}{8}B\left(\frac{7}{8},\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{8}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{8}\right)}\underset{z=\frac{1}{8}}{=}\frac{1}{8}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{8}}.$$

($\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$ (ecuația complementelor), $z=\frac{1}{8}$).

sau

$$I=\frac{\pi}{8\sin\frac{\pi}{8}}.$$

Capitolul IV

SERII FOURIER

1. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x)=\dfrac{\cos x}{5+4\cos x}, x\in R$ **.**

Soluţie:

Observăm că funcţia f(x) este pară. Deci $b_n=0$.

Seria Fourier este:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \qquad (1)$$

unde:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \text{ şi } a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx. \qquad (2)$$

Pentru calculul lui a_n observăm că: $a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx.$

Să considerăm şi integrala: $b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx$ şi să calculăm:

$a_n+ib_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos xe^{inx}}{5+4\cos x}dx$. Să notăm $e^{ix}=z\Rightarrow dz=izdx$ de unde $dx=\dfrac{dz}{iz}$. Observăm că $\cos x=\dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}$.

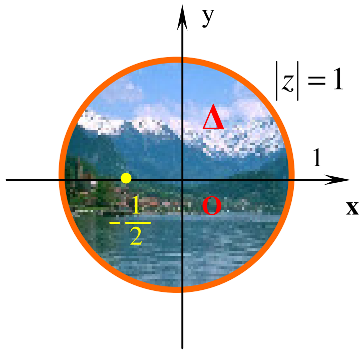
Avem:

$$a_n+ib_n=\frac{1}{\pi}\int_{|z|=1}\frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)z^n}{5+4\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}$$

sau

$$a_n + ib_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{(z^2+1)z^{n-1}}{2z^2+5z+2}dz. \qquad (3)$$

Singularităţile funcţiei $g(z) = \frac{(z^2+1)z^{n-1}}{2z^2+5z+2}$ sunt polii simpli $z_1 = -\frac{1}{2}$ şi $z_2 = -2$. Observăm că doar $z_1 = -\frac{1}{2}$ aparţine interiorului cercului $|z| = 1$ (Δ) . Din (3) obţinem:



$$a_n + ib_n = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i rezg\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Observăm că: $rezg\left(-\frac{1}{2}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{P(a)}{Q'(a)}}}{=} \frac{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{4\left(-\frac{1}{2}\right)+5} = (-1)^{n-1}\frac{5}{3\cdot 2^{n+1}}$.

Formula (4) devine:

$$a_n + ib_n = (-1)^{n-1}\frac{5}{3\cdot 2^{n+1}} \qquad (5)$$

de unde $a_n = (-1)^{n-1}\frac{5}{3\cdot 2^{n+1}}, a_0 = -\frac{5}{6}$.

Seria Fourier (1) se scrie astfel:

$$f(x) = -\frac{5}{12} + \frac{5}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}}\cos nx \qquad (6)$$

2. Să se scrie seria Fourier trigonometrică şi apoi egalitatea lui Parseval pentru funcţia:

$$f(x) = \begin{cases} 1\ , & \text{pentru } |x| < 1 \\ 0\ , & \text{pentru } 1 \le |x| < \pi \end{cases}.$$

Să se deducă apoi sumele seriilor: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$ **şi** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2}$**.**

Soluție:

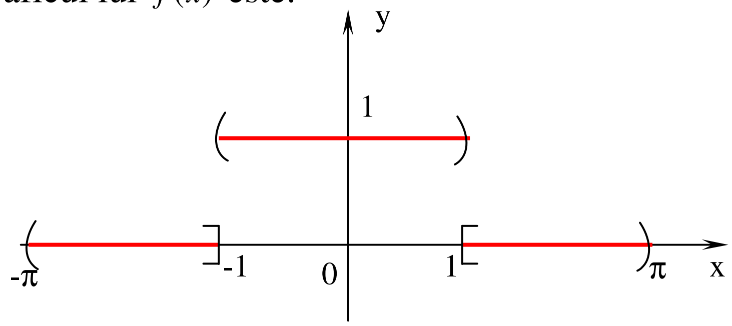
Seria Fourier este:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

unde

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \text{ şi } b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \tag{2}$$

Graficul lui $f(x)$ este:



Avem $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} dx$, de unde rezultă:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \tag{3}$$

Apoi, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \cos nxdx = \frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_{-1}^{1} = \frac{2\sin n}{\pi n}$,adică:

$$a_n = \frac{2\sin n}{\pi n} \tag{4}$$

şi: $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sin nxdx = -\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_{-1}^{1} = 0$ adică:

$$b_n = 0 \ \ (f(x) \text{ pară!}) \tag{5}$$

Deci seria Fourier ataşată funcției *f(x)* este:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos nx\ . \tag{6}$$

Egalitatea lui Parseval este:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \tag{7}$$

sau

$$\frac{2}{\pi^2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}dx \tag{8}$$

de unde:

$$\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}=1 \tag{9}$$

Rezultă suma cerută:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}=\frac{\pi-1}{2}\ . \tag{10}$$

Pentru calcul $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2}$ scriem:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\sin^2 n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$$

Ştim că: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$; deci $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi-1}{2}$.

3. Să se determine seria Fourier trigonometrică a funcţiei periodice $f(x)=\frac{\pi}{2sh\pi}e^x, x\in(-\pi,\pi),$ de perioadă 2π. Din dezvoltarea obţinută şi din relaţia de închidere a lui Parseval să se calculeze sumele: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

Soluţie:

Seria Fourier ataşată funcţiei este:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

unde:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx, a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx \text{ şi } b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin nxdx \tag{2}$$

Avem: $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi}{2sh\pi}e^x dx=\frac{1}{2sh\pi}e^x\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{sh\pi}\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}=\frac{1}{sh\pi}sh\pi=1$

deci:

$$a_0 = 1 \tag{3}$$

Pentru calculul lui a_n integrăm de două ori prin părţi şi obţinem:

$$a_n = \frac{\pi}{2sh\pi}\left(\frac{1}{n}e^x \sin n\pi\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx\right) \text{ sau}$$

$$a_n = -\frac{\pi}{2nsh\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx \tag{4}$$

de unde: $a_n = -\frac{1}{2nsh\pi}\left(-e^x\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx\right)$ sau

$$a_n = \frac{1}{n^2}\frac{(-1)^n}{2sh\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi}) - \frac{1}{n^2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi}{2sh\pi}e^x \cos nx dx$$

şi deci: $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}a_n$ de unde

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1} \quad . \tag{5}$$

Observăm că relaţia (4) mai poate fi scrisă astfel:

$$a_n = -\frac{1}{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi}{2sh\pi}e^x \sin nx dx \tag{4'}$$

sau

$$a_n = -\frac{1}{n}b_n \tag{6}$$

de unde

$$b_n = -na_n \tag{7}$$

sau

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1} \quad . \tag{8}$$

Seria Fourier ataşată funcţiei *f(x)* va fi:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cos nx + \frac{(-1)^n n}{n^2+1}\sin nx\right) \quad . \tag{9}$$

Relația de închidere a lui Parseval este:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx\,. \tag{10}$$

Înlocuind a_0, a_n şi b_n, relația (10) devine:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n^2+1)^2}+\frac{n^2}{(n^2+1)^2}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi^2}{4sh^2\pi}e^{2x}dx \tag{11}$$

sau

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{\pi}{4sh^2\pi}\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{-\pi}^{\pi} \tag{12}$$

de unde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{1}{2}(\pi ch\pi-1)\qquad . \tag{13}$$

Pentru calculul sumei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ folosim teorema lui Dirichlet pentru relația (9) ; astfel, considerând $x=2\pi$ în (9) (2π este punct de continuitate al funcției *f(x)*), obținem:

$$f(2\pi)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cos 2n\pi+\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}\sin 2n\pi\right)$$

de unde:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi e^{2\pi}}{sh\pi}-1\right)\qquad . \tag{14}$$

Capitolul V

CALCUL OPERAȚIONAL

1. Să se afle transformata Fourier prin sinus a funcției $f : R \to R$**,** $f(t) = \dfrac{t}{t^2+4}$**.**

Soluție:

Transformata Fourier prin sinus este:

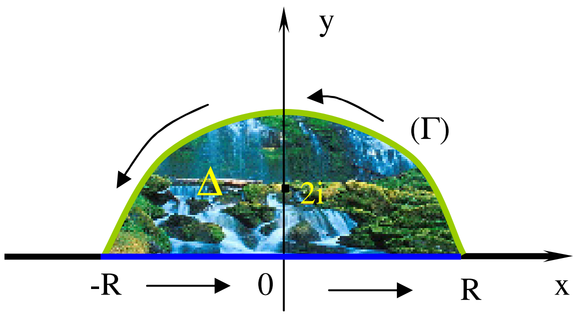
$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin ut dt \qquad (1)$$

sau

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t \sin ut}{t^2+4} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t \sin ut}{t^2+4} dt.$$

Pentru calculul integralei: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t \sin ut}{t^2+4} dt$ să considerăm funcția $h(z) = \dfrac{z \sin uz}{z^2+4}$ și conturul (C) de mai jos:

$$(C) = [-R, R] \cup (\Gamma)$$



Observăm că:

$$\int_C h(z) dz = \int_{-R}^{R} h(t) dt + \int_{\Gamma} h(z) dz \qquad (2)$$

Trecând la $\lim\limits_{R\to\infty}$ în relația (2) obținem:

$$\int\limits_C h(z)dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{t\sin ut}{t^2+4}dt + \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\Gamma} h(z)dz. \qquad (2^/)$$

Dar: $\int\limits_C h(z)dz = 2\pi i rez h(2i)$ ($2i$ pol simplu situat în Δ ($C=\partial\Delta$)) și

$\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{\Gamma} h(z)dz = 0$ (pe baza Lemei lui Jordan: $\lim\limits_{\substack{R\to\infty\\ |z|\to\infty}}|zh(z)| = 0 \Rightarrow \int\limits_{\Gamma} h(z)dz \underset{R\to\infty}{\to} 0)$.

Din ($2^/$) obținem:

$$I = 2\pi i rez h(2i) \qquad (3)$$

Dar $rez h(2i) \underset{\frac{P(2i)}{Q^/(2i)}}{\overset{\uparrow}{=}} \left.\frac{z\sin uz}{2z}\right|_{z=2i} = \frac{\sin 2ui}{2} \underset{\sin w=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{e^{-2u}-e^{2u}}{4i}$ sau

$$rez h(2i) = \frac{e^{-2u}-e^{2u}}{4i} \qquad (4)$$

Din (3) și (4) obținem:

$$I = \frac{\pi}{2}(e^{-2u}-e^{2u}) \qquad (5)$$

de unde:

$$g(u) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(e^{-2u}-e^{2u}) \qquad (6)$$

sau:

$$g(u) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}sh2u \ . \qquad (7)$$

2. Să se rezolve ecuația integrală de tip Fourier:

$$\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos ut dt = \frac{1}{1+u^2},\ u \ge 0.$$

Soluție:

Ecuația dată se mai poate scrie:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos ut dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+u^2} \underset{not}{=} g(u) \qquad (1)$$

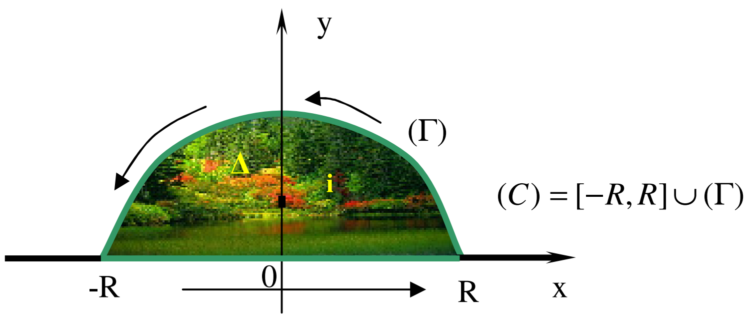
Soluția ecuației (1) este:

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} g(u)\cos utdu \qquad (2)$$

sau:

$$f(t)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ut}{1+u^2}du. \qquad (3)$$

Pentru calculul integralei $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ut}{1+u^2}du$ să considerăm funcția: $h(z)=\frac{\cos tz}{1+z^2}$, și conturul (C) de mai jos:



Observăm că:

$$\int_C h(z)dz=\int_{-R}^{R}h(u)du+\int_{\Gamma}h(z)dz \qquad (4)$$

Trecând la $\lim\limits_{R\to\infty}$ în relația (4) obținem:

$$\int_C h(z)dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ut}{1+u^2}du+\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}h(z)dz \qquad (4')$$

Observăm că funcția *h(z)* are polii simpli $z_1=i, z_2=-i$ $(z_1\in\Delta, z_2\notin\Delta)$; aplicând teorema reziduurilor găsim: $\int_C h(z)dz=2\pi i\,\mathrm{rez}\,h(i)$ și folosind lema lui Jordan,

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\(|z|\to\infty)}}\int_{\Gamma}h(z)dz=0\ \left(\lim_{\substack{R\to\infty\\|z|\to\infty}}|zh(z)|=0 \underset{Jordan}{\Rightarrow} \lim_{|z|\to\infty}\int_{\Gamma}h(z)dz=0\right)$$

Pe baza celor de mai sus ($4'$) devine:

$$I = 2\pi i \, rezh(i) \tag{5}$$

Dar $rezh(i) \underset{\frac{P(i)}{Q'(i)}}{\overset{\uparrow}{=}} \left.\frac{\cos tz}{2z}\right|_{z=i} = \frac{\cos ti}{2i} = \frac{e^{-t}+e^{t}}{4i}$,

sau:

$$rezh(i) = \frac{cht}{2i} \tag{6}$$

Din (5) şi (6) obţinem:

$$I = \pi cht \tag{7}$$

iar din (3) şi (7),

$$f(t) = cht \quad . \tag{8}$$

3. Să se rezolve ecuaţia integrală: $\int_0^\infty g(u)\cos tu\,du = f(t)$**, unde** $f(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 < t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$.

Soluţie:

Ecuaţia dată mai poate fi scrisă sub forma:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(u)\cos tu\,du = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-t), 0 < t \le 1 \\ 0 \qquad , \quad t > 1 \end{cases} \tag{1}$$

Soluţia ecuaţiei (1) este:

$$g(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-t)\cos ut\,dt \tag{2}$$

Integrând prin părţi obţinem:

$$g(u) = \frac{2}{\pi}\frac{1-\cos u}{u^2} \tag{3}$$

4. Să se afle transformata Fourier prin cosinus a funcției $f(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}$**. Din rezultatul obținut să se găsească** $\int_0^{\infty} \frac{t \sin ut}{(1+t^2)^2} dt.$

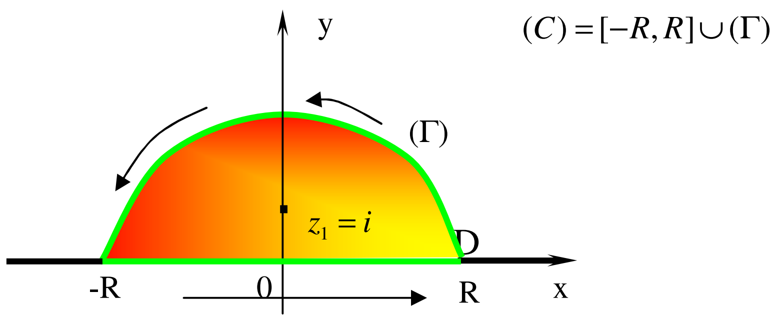
Soluție:

Transformata Fourier prin cosinus a funcției *f(t)* este:

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ut dt \qquad (1)$$

sau $g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\cos ut}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ut}{(1+t^2)^2} dt.$

Pentru calculul integralei: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ut}{(1+t^2)^2} dt$ să considerăm funcția $h(z) = \frac{\cos uz}{(z^2+1)^2}$ şi conturul de mai jos:



Observăm că:

$$\int_C h(z)dz = \int_{-R}^{R} h(t)dt + \int_{\Gamma} h(z)dz, \qquad (2)$$

Trecând la $\lim\limits_{R\to\infty}$ în relația (2) obținem:

$$\int_C h(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ut}{(1+t^2)^2} dt + \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} h(z)dz. \qquad (2')$$

Pe baza teoremei reziduurilor, $\int\limits_C h(z)dz = 2\pi i\, rezh(i)$ $(z_1 = i \in D$ pol dublu; $z_2 = -i \notin D)$ şi $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_\Gamma h(z)dz = 0$, (din lema lui Jordan: $\lim\limits_{\substack{R\to\infty\\|z|\to\infty}}|zh(z)| = 0 \Rightarrow \int\limits_\Gamma h(z)dz \to 0$ (când $R \to \infty$)).

Din $(2')$ obţinem:

$$I = 2\pi i\, rezh(i)\ . \tag{3}$$

Observăm că:

$$rezh(i) = \lim_{z\to i}\left[(z-i)^2\frac{\cos uz}{(z-i)^2(z+i)^2}\right]' = \lim_{z\to i}\frac{-u\sin uz(z+i)^2 - 2(z+i)\cos uz}{(z+i)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow rezh(i) = \frac{ui\sin ui + \cos ui}{4i}$$

sau $\left(\sin w = \dfrac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}, \cos w = \dfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}\right)$:

$$rezh(i) = \frac{-ushu + chu}{4i} \tag{4}$$

Din (3) şi (4) obţinem:

$$I = \frac{\pi}{2}(chu - ushu) \tag{5}$$

de unde:

$$g(u) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(chu - ushu) \tag{6}$$

Pentru calculul integralei: $\int\limits_0^\infty \dfrac{t\sin ut}{(1+t^2)^2}dt$, derivăm relaţia:

$g(u) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \dfrac{\cos ut}{(1+t^2)^2}dt$, în raport cu variabila “u”şi obţinem:

$$g'(u) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{t\sin ut}{(1+t^2)^2}dt\ ,$$

sau folosind (6): $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(shu - shu - uchu) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{t\sin ut}{(1+t^2)^2}dt$, de unde:

$$\int_0^\infty \frac{t\sin ut}{(1+t^2)^2}dt = \frac{\pi}{4}uchu \quad . \qquad (7)$$

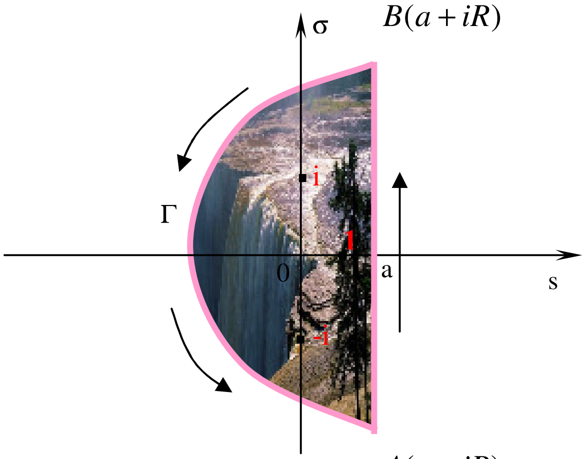
5. Folosind teorema transformării inverse "Mellin-Fourier" să se afle originalul următoarei imagini Laplace: $F(p) = \frac{2p+3}{(p-1)^2(p^2+1)}$.

Soluție:

Aplicăm formula lui Mellin-Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}dp \qquad (1)$$

Să considerăm: $G(p) = \frac{(2p+3)e^{pt}}{(p-1)^2(p^2+1)}$ şi $(C) = (AB) \cup (\Gamma)$ unde:



Aplicând teorema reziduurilor obținem:

$$\int_{(c)} G(p)dp = \int_{(AB)} G(p)dp + \int_{(\Gamma)} G(p)dp \qquad (2)$$

Trecând la $\lim\limits_{R\to\infty}$ în (2) găsim $(\lim\limits_{R\to\infty}\int_\Gamma G(p) = 0 (Jordan))$

$$2\pi i(rezG(-i)+rezG(1)+rezG(i))=\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}G(p)dp \qquad (2')$$

de unde $(:2\pi i)$:

$$f(t)=rezG(-i)+rezG(1)+rezG(i) \qquad (3)$$

Avem: $rezG(i)=\dfrac{(2i+3)e^{it}}{(i-1)^2 2i}=\dfrac{(2i+3)e^{it}}{4}$, $rezG(-i)=\dfrac{(-2i+3)e^{-it}}{4}$ şi

$$rezG(1)=\lim_{p\to 1}\left[(p-1)^2\frac{(2p+3)e^{pt}}{(p-1)^2(p^2+1)}\right]'=\lim_{p\to 1}\frac{\left[2e^{pt}+(2p+3)te^{pt}\right](p^2t)-(2p+3)e^{pt}2p}{(p^2+1)^2}$$

$$=\frac{2(2e^t+5te^t)-10e^t}{4}=\frac{(-6+10t)e^t}{4}$$

Deci: $f(t)=\dfrac{(2i+3)e^{it}}{4}+\dfrac{(-2i+3)e^{-it}}{4}+\dfrac{(-3+5t)e^t}{2}$ sau funcția original,

$$f(t)=\frac{3}{2}\cos t-\sin t+\frac{(5t-3)e^t}{2} \qquad (4)$$

6. Folosind metoda operațională să se determine soluția ecuației diferențiale cu condițiile inițiale specificate:

a) $y''-4y=\sin 2x,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=-\dfrac{1}{4}$

b) $y'''+y'=\cos^2 x,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=\dfrac{1}{3}, y''(0)=-1$

Soluție:

a) $L(y)=Y(p)$ şi: aplicăm transformata Laplace

$$L(y'')-4L(y)=L(\sin 2x) \qquad (1)$$

unde

$$\begin{cases} L(y'')=p^2Y(p)-(2p-\dfrac{1}{4}) \\ L(y)=Y(p) \\ L(\sin 2x)=\dfrac{2}{p^2+4} \end{cases} \qquad (2)$$

Înlocuind (2) în ecuația (1) obținem:

$$(p^2-4)Y(p)=\frac{8p^3-p^2+32p+4}{4(p^2+4)} \qquad (1')$$

de unde:

$$Y(p)=\frac{8p^3-p^2+32p+4}{4(p^2-4)(p^2+4)} \qquad (3)$$

şi $y(x)=L^{-1}(Y(p))$.

Observăm că singularităţile lui Y(p) sunt: $p_1=-2, p_2=2, p_3=-2i, p_4=2i$

Notăm: $A(p)=8p^3-p^2+32p+4$ şi $B(p)=4(p^2-4)(p^2+4)$

Avem: $y(x)=\sum_{k=1}^{4}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k x}$ sau

$$y(x)=\frac{A(-2)}{B'(-2)}e^{-2x}+\frac{A(2)}{B'(2)}e^{2x}+\frac{A(-2i)}{B'(-2i)}e^{-2ix}+\frac{A(2i)}{B'(2i)}e^{2ix}$$

Efectuând calculele obţinem soluţia ecuaţiei diferenţiale:

$$y(x)=\frac{1}{2}ch2x-\frac{1}{8}\sin 2x \qquad (4)$$

b) Aplicăm transformata Laplace :

$$\begin{cases} L(y)=Y(p) \\ L(y')=pY(p)-1 \\ L(y''')=p^3Y(p)-\left(p^2-\dfrac{p}{3}-1\right) \\ L(\cos^2 x)=L\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{p}{p^2+4} \end{cases}$$

Înlocuind în ecuaţie obţinem:

$$Y(p)=\frac{6p^4-2p^3+27p^2-5p+12}{6p(p^2+1)(p^2+4)} \qquad (5)$$

de unde $y(x)=L^{-1}(Y(p))$.

Observăm că $p_1=0, p_2=-i, p_3=i, p_4=-2i, p_5=2i$;

Notăm: $A(p)=6p^4-2p^3+27p^2-5p+12$ şi $B(p)=6p(p^2+1)(p^2+4)$

Avem

$$y(x)=\sum_{k=1}^{5}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t} \tag{6}$$

sau după efectuarea calculelor obținem soluția ecuației diferențiale:

$$y(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\sin x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{12}\sin 2x \tag{7}$$

7. Folosind metoda operațională să se integreze sistemul de ecuații diferențiale cu condițiile inițiale specificate:

$$\begin{cases} x' = -x+y+z \\ y' = x-y+z \\ z' = x+y+z \end{cases}, \quad \begin{array}{l} x(0)=0, y(0)=1, z(0)=1 \\ (x=x(t), y=y(t), z=z(t)). \end{array}$$

Soluție:

Aplicând transformata Laplace obținem:

$$\begin{cases} L(x') = -L(x)+L(y)+L(z) \\ L(y') = L(x)-L(y)+L(z) \\ L(z') = L(x)+L(y)+L(z) \end{cases} \tag{1}$$

Observam că:

$$\begin{cases} L(x)=X(p), L(y)=Y(p), L(z)=Z(p) \\ L(x') = pX(p)-x(0), L(y') = pY(p)-y(0), L(z') = pZ(p)-z(0) \end{cases}$$

Cu cele de mai sus, (1) devine :

$$\begin{cases} pX(p) = -X(p)+Y(p)+Z(p) \\ pY(p)-1 = X(p)-Y(p)+Z(p) \\ pZ(p)-1 = X(p)+Y(p)+Z(p) \end{cases} \tag{2}$$

sau

$$\begin{cases} (p+1)X(p)-Y(p)-Z(p)=0 \\ X(p)-(p+1)Y(p)+Z(p)=-1 \\ X(p)+Y(p)-(p-1)Z(p)=-1 \end{cases} \tag{3}$$

Rezolvând sistemul (3) obținem:

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{2}{p^2-4} \\ Y(p) = \dfrac{p}{p^2-4} \\ Z(p) = \dfrac{1}{p-2} \end{cases} \tag{4}$$

de unde:

$$\begin{cases} x(t) = sh2t \\ y(t) = ch2t \\ z(t) = e^{2t} \end{cases} \tag{5}$$

$$(x(t) = L^{-1}(X(p)), y(t) = L^{-1}(Y(p)), z(t) = L^{-1}(Z(p)) \ .$$

8. Folosind metoda operațională să se integreze sistemul de ecuații diferențiale cu condițiile inițiale specificate:

$$\begin{cases} x' + 4x + 4y = 0 \\ y' + 2x + 6y = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x(0) = 3, y(0) = 15 \\ (x = x(t), y = y(t)) \end{matrix}$$

Soluție:

Aplicând transformata Laplace, obținem:

$$\begin{cases} L(x') + 4L(x) + 4L(y) = 0 \\ L(y') + 2L(x) + 6L(y) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

unde $L(x') = pX(p) - 3, L(x) = X(p), L(y) = Y(p)$, şi $L(y') = pY(p) - 15$.

Sistemul (1) devine:

$$\begin{cases} (p+4)X(p) + 4Y(p) = 3 \\ 2X(p) + (p+6)Y(p) = 15 \end{cases} \tag{2}$$

Soluția sistemului (2) este:

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{3p-42}{p^2+10p+16} = \dfrac{-8}{p+2} + \dfrac{11}{p+8} \\ si \\ Y(p) = \dfrac{15p+54}{p^2+10p+16} = \dfrac{4}{p+2} + \dfrac{11}{p+8} \end{cases} \tag{3}$$

Din (3) obținem $x(t) = L^{-1}(X(p))$ şi $y(t) = L^{-1}(Y(p))$ de unde:

$$\begin{cases} x(t) = -8e^{-2t} + 11e^{-8t} \\ si \\ y(t) = 4e^{-2t} + 11e^{-8t} \end{cases} \tag{4}$$

9. Folosind metoda operațională să se determine soluția ecuației diferențiale: $y'' - 7y' + 10y = 3e^x, x > 0, y(0) = 1, y'(0) = -3$**.**

Soluție:

Notăm $L(y) = Y(p)$. Aplicând transformata Laplace, obținem:

$$L(y'') = p^2Y(p) - (p-3), L(y') = pY(p) - 1, L(e^x) = \frac{1}{p-1};$$

Ecuația diferențială devine: $(p^2 - 7p + 10)Y(p) - p + 10 = \frac{3}{p-1}$ de unde

$$Y(p) = \frac{p^2 - 11p + 13}{(p-1)(p-2)(p-5)} = \frac{\frac{3}{4}}{p-1} + \frac{\frac{5}{3}}{p-2} + \frac{\frac{-17}{12}}{p-5} \tag{1}$$

Din (1) obținem $y(x) = L^{-1}(Y(p))$ sau ,

$$y(x) = \frac{3}{4}e^x + \frac{5}{3}e^{2x} - \frac{17}{12}e^{5x} \tag{2}$$

10. Folosind metoda operațională să se determine funcțiile x(t) şi y(t) care verifică sistemul:

$$\begin{cases} x'' + 2x' + x + y'' + y' + y = 1 \\ 2x' + 2x + y'' + 2y' = 2t \end{cases}$$

şi condițiile inițiale: $x(0) = 0, x'(0) = 2, y(0) = 1, y'(0) = -2$**.**

Soluție:

Sistemul operațional corespunzător este:

$$\begin{cases} (p^2 + 2p + 1)X(p) + (p^2 + p + 1)Y(p) = \frac{1}{p} + p + 1 \\ (2p + 2)X(p) + (p^2 + 2p)Y(p) = \frac{2}{p^2} + p \end{cases}$$

Soluția acestui sistem este:

$$X(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+1)^2+1}, Y(p)=-\frac{1}{p^2}+\frac{p+1}{(p+1)^2+1}.$$

Originalele acestor funcții vor fi tocmai soluțiile sistemului:

$$x(t)=t+e^{-t}\sin t, y(t)=-t+e^{-t}\cos t.$$

Capitolul VI

ECUAȚIILE FIZICII MATEMATICE

1. Să se reducă la forma canonică şi să se rezolve ecuația cu derivate parțiale de ordinul doi:

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Soluție:

Observăm că $\delta(x,y)=4x^2y^2-4x^2y^2=0$, deci ecuația este de tip parabolic. Ecuația caracteristică este:

$$x^2dy^2-2xydxdy+y^2dx^2=0 \qquad (1)$$

Avem:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \text{ sau } \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y} \text{ de unde } \frac{y}{x}=C.$$

Pentru reducerea ecuației date la forma canonică să considerăm transformarea regulată: $T\begin{cases}\xi=\dfrac{y}{x}\\ \eta=x\end{cases}\quad \left(T^{-1}:\begin{cases}x=\eta\\ y=\xi\eta\end{cases}\right)$.

Calculăm acum derivatele parțiale. Observăm că:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ şi } \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

sau $\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2},\dfrac{\partial \eta}{\partial x}=1,\dfrac{\partial \xi}{\partial y}=\dfrac{1}{x}\text{ şi }\dfrac{\partial \eta}{\partial y}=0\right)$ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ şi $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}$.

Derivatele de ordinul doi sunt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{y^2}{x^4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \dfrac{2y}{x^3}\dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\dfrac{y}{x^3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \end{cases} .$$

Înlocuind valorile de mai sus, obținem după calcule forma canonică:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 \quad . \qquad (2)$$

Prin integrarea ecuației (2) obținem soluția ecuației :

$$u(\xi, \eta) = \ln \eta f(\xi) + g(\xi) \qquad (3)$$

sau

$$u(x, y) = \ln x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (4)$$

2. Să se rezolve ecuația cu derivate parțiale de ordinul doi :

$$6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

cu condițiile: $u(x,0) = \sin x + \cos x$ **și** $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 3\cos x - 2\sin x$.

Soluție:

Observăm că $\delta(x, y) = 25 - 24 = 1 > 0$ deci ecuația este de tip hiperbolic. Ecuația caracteristică este:

$$6dy^2 + 5dxdy + dx^2 = 0 \qquad (1)$$

Cele două integrale prime sunt:

$$\begin{cases} x + 2y = C_1 \\ și \\ x + 3y = C_2 \end{cases} \qquad (2)$$

Pentru reducerea la forma canonică a ecuației date să considerăm transformarea regulată

$$\mathrm{T}\begin{cases}\xi = x+2y\\ \eta = x+3y\end{cases}.$$

Derivatele de ordinul doi sunt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+5\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+3\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\ \text{şi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+9\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

Înlocuind valorile de mai sus obținem forma canonică:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0\ . \tag{3}$$

Prin integrarea ecuației (3) obținem soluția:

$$u(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta) \tag{4}$$

sau

$$u(x,y)=f(x+2y)+g(x+3y)\ . \tag{5}$$

Condițiile: $u(x,0)=f(x)+g(x)=\sin x+\cos x$ şi

$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=2f'(x)+3g'(x)=3\cos x-2\sin x$. Obținem sistemul funcțional:

$$\begin{cases}f(x)+g(x)=\sin x+\cos x\\ 2f(x)+3g(x)=3\sin x+2\cos x+C\end{cases}. \tag{6}$$

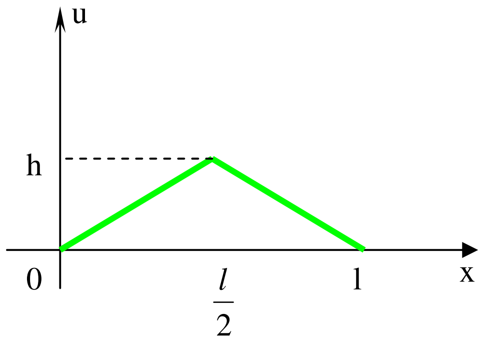
Soluția sistemului (6) este:

$$\begin{cases}f(x)=\cos x+C\\ \text{şi}\\ g(x)=\sin x-C\end{cases}. \tag{7}$$

Soluția ecuației date este:

$$u(x,y)=\sin(x+3y)+\cos(x+2y)\ . \tag{8}$$

3. Să se integreze ecuația coardei: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$**, cu condițiile:** $u(0,t) = 0$**,** $u(l,t) = 0$**,** $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ **şi** $u(x,0) = \begin{cases} \frac{2h}{l}x, & 0 \le x \le \frac{l}{2} \\ \frac{2h}{l}(l-x), & \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$**.**



Soluție:

Funcția $u(x,t)$ (soluția ecuației date) este:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n \cos n\frac{\pi c}{l}t + B_n \sin n\frac{\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (1)$$

unde:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin n\frac{\pi}{l}xdx,\ B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\sin n\frac{\pi}{l}xdx \quad (2)$$

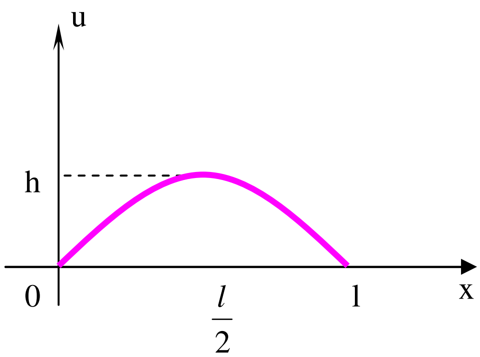
În cazul nostru, $f(x) = u(x,0)$ şi $g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$. Observăm că $B_n = 0$ şi $A_n = \frac{4h}{l^2}\left(\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin n\frac{\pi}{l}xdx + \int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin n\frac{\pi}{l}xdx\right)$.

Integrând prin părți, obținem $A_{2n+1} = \frac{8h}{\pi^2}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$. Soluția ecuației este:

$$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\cos\frac{(2n+1)\pi ct}{l} \qquad (3)$$

4. **Să se integreze ecuația coardei:** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ **cu condițiile** $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$, $u(x,0) = -\frac{4h}{l^2}x(x-l)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$, $0 \le x \le l$.

Soluție:



Soluția ecuației date este:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n \cos n\frac{\pi c}{l}t + B_n \sin n\frac{\pi c}{l}t)\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (1)$$

unde:

$$A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin n\frac{\pi}{l}xdx \text{ şi } B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^{\ell} g(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \qquad (2)$$

Observăm că $f(x) = u(x,0)$ şi $g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$.

Deoarece $g(x) = 0$ rezultă că $B_n = 0$.

Coeficienții A_n sunt dați de egalitatea:

$$A_n = -\frac{8h}{l^3}\int_0^{\ell} x(x-l)\sin n\frac{\pi}{l}xdx \qquad (3)$$

sau după integrarea prin părți:

$$A_{2n-1} = \frac{32h}{\pi^3}\frac{1}{(2n-1)^3}\ , \ n \in \{1,2,...\}. \qquad (4)$$

Soluția ecuației este:

$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\cos\frac{(2n-1)\pi ct}{l}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l} \qquad (5)$$

5. Să se determine funcţia u(x,t) care verifică ecuaţia: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}$ **,** $x \in [o,l]$**,** $t \in R$ **şi condiţiile** $u(x,t+2\pi) = u(x,t),\ u(o,t) = \frac{1}{5-4\cos t}$**.**

Soluţie.

Pentru a determina funcţia u(x,t) vom folosi metoda separării variabilelor.

Căutăm o soluţie de forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t). \qquad (1)$$

Observăm că: $X(x)T''(t) = \frac{1}{x}X'(x)T(t)$ de unde prin împărţire la $X(x)T(t) \neq 0$ găsim :

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{1}{x}\frac{X'(x)}{X(x)} \qquad (2)$$

Membrul stâng al ecuaţiei (2) fiind o funcţie numai de t iar membrul drept fiind o funcţie numai de x, egalitatea lor este posibilă pentru orice t şi orice x, numai dacă cei doi membrii au aceeaşi valoare constantă pe care o notăm cu λ; din (2) obţinem următoarele ecuaţii diferenţiale:

$$\begin{cases} a) T''(t) - \lambda T(t) = 0 \\ şi \\ b) X'(x) - \lambda x X(x) = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Funcţia u(x,t) este periodică in raport cu t. Ecuaţia 3 a) este o ecuaţie diferenţială de ordinul doi cu coeficienţii constanţi, omogenă. Ecuaţia caracteristică ataşată ei este $r^2 - \lambda = 0$ sau $r^2 = \lambda.$.

Dacă $\lambda > 0$ atunci $T(t) = C_1 e^{\sqrt{\lambda} t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} t}$ nu convine deoarece nu este periodică. Nici $\lambda = 0$ nu convine deoarece se obţine $T(t) = C_1 + C_2 t$

(funcție liniară). Dacă $\lambda < 0$, ecuația caracteristică are rădăcinile complex conjugate $r_{1,2} = \pm i\sqrt{-\lambda}$ şi $T(t) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}t + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}t.$

Din condiția $T(t+2\pi) = T(t)$ găsim: $(t+2\pi)\sqrt{-\lambda} - t\sqrt{-\lambda} = 2n\pi$ de unde:

$$\lambda_n = -n^2,\ n \in \{1,2,....\} \quad . \tag{4}$$

Deci

$$T_n(t) = A_n \cos nt + B_n \sin nt, \quad n \in \{1,2,...\} \quad . \tag{5}$$

Ecuația (3) b) are soluția (exceptând o constantă):

$$X_n(x) = e^{-\frac{1}{2}n^2x^2} \quad . \tag{6}$$

Pe baza suprapunerii efectelor pentru ecuația dată obținem o soluție de forma:

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nt + B_n \sin nt)e^{-\frac{1}{2}n^2x^2} \quad . \tag{7}$$

Din condiția $u(0,t) = \dfrac{1}{5-4\cos t}$ observăm că $B_n = 0$.

Pentru calculul lui A_0 şi A_n, $n \in \{1,2,...\}$ folosim formulele:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{5-4\cos t}dt \text{ şi } A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos nt}{5-4\cos t}dt,\ n \in \{1,2,...\}$$

Să considerăm şi $B_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin nt}{5-4\cos t}dt$ (care este 0) şi apoi

$$A_n + iB_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{\mathrm{int}}}{5-4\cos t}dt .$$

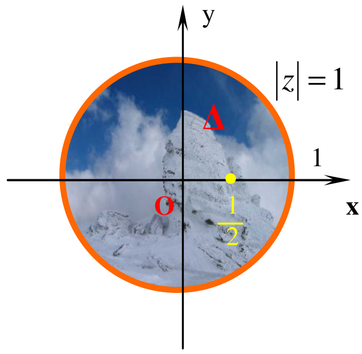
Notăm: $e^{it} = z,\ dt = \dfrac{dz}{iz},\quad \cos t = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right).$

Găsim: $A_n + iB_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z^n}{5-4\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}$, de unde

$$A_n + iB_n = -\frac{1}{\pi i}\int_{|z|=1}\frac{z^n}{2z^2-5z+2}dz \quad .$$

Observăm că: $\int_{|z|=1} \frac{z^n}{2z^2-5z+2}dz = 2\pi i\, rezh\left(\frac{1}{2}\right)$ unde $h(z) = \frac{z^n}{2z^2-5z+2}$

(singularitățile lui $h(z)$ sunt $z_1 = \frac{1}{2} \in \Delta$ (pol simplu) și $z_2 = 2 \notin \Delta$) .



Găsim: $rezh(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2^n}}{4(\frac{1}{2})-5} = -\frac{1}{3}\frac{1}{2^n}$.

Deci: $A_n + iB_n = \frac{2}{3}\frac{1}{2^n}$ de unde $A_n = \frac{2}{3}\frac{1}{2^n}$.

Soluția ecuației date va fi:

$$u(x,t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}e^{-\frac{1}{2}n^2x^2}\cos nt \quad . \qquad (8)$$

6. Să se determine $u(x,t)$ care satisface ecuația:

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} = 0$**,** $x \in [0,l], t \in (-\infty,\infty)$ **și condițiile**

$$u(x,t+2\pi) = u(x,t),\ \ x \in [0,l], t \in (-\infty,\infty), u(0,t) = 0, u(l,t) = \frac{\sin t}{5-4\cos t}, t \in (-\infty,\infty).$$

Soluție:

Vom folosi metoda separării variabilelor; căutăm o funcție de forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t). \qquad (1)$$

Observăm că:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t) \text{ și } \frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)T(t).$$

Ecuația dată devine: $X(x)T''(t) + x^2X''(x)T(t) + xX'(x)t(t) = 0$ de unde împărțind prin: $X(x)T(t) \neq 0$ obținem:

$$x^2\frac{X''(x)}{X(x)} + x\frac{X'(x)}{X(x)} = -\frac{T''(t)}{T(t)} \qquad (2)$$

Membrul stâng al ecuației (2) fiind o funcție numai de x iar membrul drept fiind o funcție numai de t, egalitatea lor este posibilă pentru orice x şi orice t, numai dacă cei doi membrii au aceiaşi valoare constantă reală pe care o notăm cu k ; din (2) obținem următoarele ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} a) T''(t) + kT(t) = 0 \\ \text{şi} \\ b) x^2 X''(x) + xX'(x) - kX(x) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Funcția $u(x,t)$ este periodică în raport cu t. Ecuația (3) a) este o ecuație diferențială de ordinul doi cu coeficienți constanți, omogenă. Ecuația caracteristică ataşată ei este $r^2 + k = 0$ sau $r^2 = -k$. Dacă $k < 0$ atunci $T(t) = C_1 e^{\sqrt{-k}t} + C_2 e^{-\sqrt{-k}t}$ care nu convine deoarece nu este periodică. Nici $k = 0$ nu convine deoarece $T(t) = C_1 + C_2 t$ (funcție liniară neperiodică). Dacă $k > 0$ ecuația caracteristică are rădăcinile complexe, conjugate $r_{12} = \pm i\sqrt{k}$ şi $T(t) = C_1 \cos\sqrt{k}t + C_2 \sin\sqrt{k}t$. Din condiția $T(t + 2\pi) = T(t)$ găsim $(t + 2\pi)\sqrt{k} - t\sqrt{k} = 2n\pi$ de unde

$$k = n^2, n \in \{1,2,...\} \tag{4}$$

Deci:

$$T_n(t) = C_{1n} \cos nt + C_{2n} \sin nt \tag{5}$$

Ecuația b) devine :

$$x^2 X''(x) + xX'(x) - n^2 X(x) = 0 \tag{6}$$

este o ecuație diferențială de ordinul doi de tip Euler. Pentru rezolvarea ei facem substituția $x = e^s$.

Observăm că $X'(x) = e^{-s} \dfrac{dX}{ds}$ şi $X''(x) = e^{-2s}\left(\dfrac{d^2X}{ds^2} - \dfrac{dX}{ds}\right)$. Ecuația (6) devine:

$$\frac{d^2X}{ds^2} - n^2 X(s) = 0 \tag{6'}$$

cu soluția

$$X_n(x) = C_{1n}^* x^n + C_{2n}^* x^{-n} \quad . \qquad (7)$$

Condiţia $u(0,t) = 0$ conduce la alegerea $C_{2n}^* = 0$.

Obţinem funcţiile:

$$u_n(x,t) = x^n (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \qquad (8)$$

unde $A_n = C_{1n} C_{1n}^*$ şi $B_n = C_{1n}^* C_{2n}$, $n \in \{1,2,...\}$.

Pe baza principiului suprapunerii efectelor, căutăm o soluţie de forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \qquad (9)$$

sau

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \quad . \qquad (10)$$

Din condiţia $u(l,t) = \dfrac{\sin t}{5 - 4\cos t}$, $t \in (-\infty, \infty)$ observăm că:

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{1}{\pi l^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\sin t \cos nt}{5 - 4\cos t} dt \\ \text{şi} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , n \in \{1,2,....\} \\ B_n = \dfrac{1}{\pi l^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\sin t \sin nt}{5 - 4\cos t} dt \end{cases} \quad . \qquad (11)$$

Pentru calculul lui A_n şi B_n vom considera suma $A_n + iB_n$.

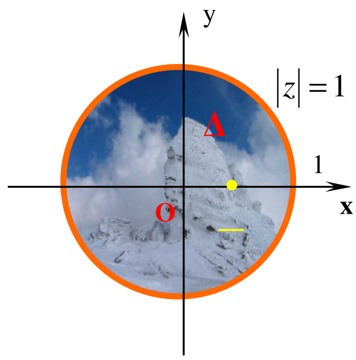
Avem:

$$A_n + iB_n = \frac{1}{\pi l^n} \int_0^{2\pi} \frac{\sin t (\cos nt + i \sin t)^n}{5 - 4\cos t} dt \quad .$$

Notăm $e^{it} = z$, $dt = \dfrac{dz}{iz}$, $\sin t = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$, $\cos t = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

Cu aceste notaţii, vom avea: $A_n + iB_n = \dfrac{1}{\pi l^n} \displaystyle\int_{|z|=1} \dfrac{\dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right) z^n}{5 - 4\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)} \dfrac{dz}{iz}$ sau

$$A_n + iB_n = \frac{1}{2\pi l^n} \int_{|z=1|} \frac{(z^2 - 1) z^{n-1}}{2z^2 - 5z + 2} dz \qquad (12)$$



Considerăm funcția $f(z) = \dfrac{(z^2 - 1)z^{n-1}}{2z^2 - 5z + 2}$.

Observăm că $z = \dfrac{1}{2} \in \Delta$ este pol simplu al funcției $f(z)$.

Folosind teorema reziduurilor obținem:

$$\int_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i \, rezf\left(\frac{1}{2}\right) \quad . \qquad (13)$$

Din relațiile (12) şi (13) obținem:

$$A_n + iB_n = \frac{i}{l^n} rezf\left(\frac{1}{2}\right) \quad . \qquad (14)$$

Dar $rezf\left(\dfrac{1}{2}\right) \underset{\frac{P\left(\frac{1}{2}\right)}{Q'\left(\frac{1}{2}\right)}}{=} \dfrac{\left(\frac{1}{4} - 1\right)\frac{1}{2^{n-1}}}{4\frac{1}{2} - 5} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Deci $A_n + iB_n = \dfrac{i}{l^n 2^{n+1}}$ de unde:

$$\begin{cases} A_n = 0 \\ şi \\ B_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2l}\right)^n \end{cases} \quad . \qquad (15)$$

În final, găsim soluția $u(x,t)$ sub forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2l}\right)^n \sin nt \quad . \qquad (16)$$

Capitolul VII
ELEMENTE DE CALCUL VARIAȚIONAL

1. Să se determine extremalele şi natura lor pentru funcționala $I : D \to R$,

$I[y] = \int_0^1 \left(y'^2 + y^2 + 2ye^{2x} \right) dx$ **unde** $D = \left\{ y \in C^1[0,1] : y(0) = \frac{1}{3},\ y(1) = \frac{1}{3}e^2 \right\}$**.**

Soluție:

Notăm cu $F(x, y, y') = y'^2 + y^2 + 2ye^{2x}$. Ecuația lui Euler este:

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

Observăm că $F_y(x, y, y') = 2y + 2e^{2x}$ şi $F_{y'} = 2y'$. Ecuația (1) devine:

$$2y + 2e^{2x} - 2y'' = 0 \qquad (1')$$

sau

$$y'' - y = e^{2x} \qquad (2)$$

Ecuația omogenă ataşată ecuației (2) este $y'' - y = 0,$ având ecuația caracteristică $r^2 - 1 = 0$. Rădăcinile ei sunt $r_1 = 1$ şi $r_2 = -1$. Soluția generală:

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Soluția particulară a ecuației (2) este: $y_p = Ae^{2x}$; $y_p'' = 4Ae^{2x}.$ Prin înlocuire în (2) obținem $A = \frac{1}{3}$ şi deci $y_p = \frac{1}{3}e^{2x}$. Soluția generală a ecuației (2) va fi $\left(y = y_H + y_p \right)$:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} \qquad (3)$$

Punând condițiile ca y să fie admisibilă, adică $y \in D$ găsim:

$$C_1 + C_2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ şi } C_1 e + C_2 \frac{1}{e} + \frac{1}{3}e^2 = \frac{1}{3}e^2 \tag{4}$$

cu soluția $C_1 = C_2 = 0.$ Deci $\overline{y} = \frac{1}{3}e^{2x}$ este funcția admisibilă ce realizează extremul funcționalei $I[y].$ Observăm că $F_{y'y'}\left(\overline{y}\right) = 2 > 0$ şi deci pe baza teoremei lui Legendre $\overline{y}$ va realiza un minim şi $I_{\min} = I\left[\overline{y}\right]$. Avem:

$$I\left[\overline{y}\right] = \int_0^1 \left(\frac{4}{9}e^{4x} + \frac{1}{9}e^{4x} + \frac{2}{3}e^{4x} \right) dx = \frac{11}{9}\frac{e^{4x}}{4}\Bigg|_0^1$$

sau

$$I_{\min} = \frac{11}{36}\left(e^4 - 1\right). \tag{5}$$

2. Să se determine extremalele şi natura lor pentru funcționala $I : D \to R,$ $\quad I[y] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(4y^2 - y'^2 + 8y + 4\right) dx$**, unde** $D = \left\{ y \in C^1\left[0, \frac{\pi}{4}\right] : y(0) = -1, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \right\}$**.**

Soluție:

Notăm $F\left(x, y, y'\right) = 4y^2 - y'^2 + 8y + 4$. Ecuația lui Euler este:

$$F_y\left(x, y, y'\right) - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\left(x, y, y'\right)\right) = 0 \tag{1}$$

În cazul nostru, $F_y\left(x, y, y'\right) = 8y + 8$ şi $F_{y'} = -2y'$. Ecuația (1) devine:

$$8y + 8 + 2y'' = 0 \tag{1'}$$

sau

$$y'' + 4y = -4 \tag{2}$$

Ecuația omogenă ataşată ecuației (2) este $y'' + 4y = 0$ având ecuația caracteristică $r^2 + 4 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = 2i$ şi $r_2 = -2i.$ Soluția generală a ecuației omogene este $y_H = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$ Soluția particulară a ecuației

(2) este $y_p = A$. Prin înlocuirea în (2) a lui y_p găsim $A = -1$ şi deci $y_p = -1$. Soluția generală a ecuației (2) va fi $\left(y = y_H + y_p\right)$:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 1 \quad . \qquad (3)$$

Punând condiția ca y să fie admisibilă, adică $y \in D$, găsim:

$$\begin{cases} C_1 - 1 = -1 \\ C_2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

sau

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases} . \qquad (4')$$

Deci $\overline{y} = \sin 2x - 1$ este linia admisibilă ce realizează extremul funcționalei $I[y]$. Observăm că $F_{y'y'}\left(\overline{y}\right) = -2 < 0$ şi pe baza teoremei lui Legendre $\overline{y}$ va realiza un maxim şi $I_{\max} = I\left[\overline{y}\right]$. Avem:

$$I\left[\overline{y}\right] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[4\left(\sin^2 2x - 2\sin 2x + 1\right) - 4\cos^2 2x + 8\sin 2x - 8 + 4\right]dx$$

sau

$$I\left[\overline{y}\right] = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin^2 2x - \cos^2 2x\right)dx = -4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x dx = -4\frac{1}{4}\sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\sin\pi + \sin 0 = 0 .$$

Deci: $$I_{\max} = 0 \quad . \qquad (5)$$

3. Să se determine extremalele şi natura lor pentru funcționala $I : D \to R$, $\quad I[y] = \int_0^1 \left(2y + y''^2\right)dx$, **unde** $D = \left\{y \in C^2[0,1] : y(0) = y(1) = 0, y'(0) = y'(1) = 0\right\}$.

Soluție:

Notăm $F\left(x, y, y', y''\right) = 2y + y''^2$. Ecuația lui Euler-Poisson este:

$$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(F_{y''}\right) = 0 \qquad (1)$$

Observăm că $F_y = 2$, $F_{y'} = 0$, $F_{y''} = 2y''$. Ecuația (1) devine:

$$y^{(4)} + 1 = 0 \qquad (1')$$

cu soluția generală:

$$y = -\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4 \qquad (2)$$

Constantele se determină din condiția ca $y \in D$ (ceea ce asigură ca linia extremală să fie o linie admisibilă). Obținem:

$$\overline{y} = -\frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{24}, \quad x \in [0,1] \qquad (3)$$

Deoarece $F_{y''y''}(\overline{y}) = 2 > 0$, condiția lui Legendre arată că linia extremală realizează minimul funcționalei : $I\left[\overline{y}\right]$.

Se obține în final:

$$I_{\min} = I\left[\overline{y}\right] = -\frac{1}{720} \qquad (4)$$

4. Să se determine extremul funcționalei $I : D \to R$, dacă

$$I[y,z] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(y'\right)^2 + \left(z'\right)^2 + 2yz\right]dx,$$

unde $D = \left\{(y,z) \in C^1\left[0,\frac{\pi}{2}\right] : y(0) = z(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1\right\}$**.**

Soluție:

Sistemul Euler-Lagrange corespunzător funcției $F(x,y,z,y',z') = y'^2 + z'^2 + 2yz$ este:

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0 \\ F_z - \dfrac{d}{dx}\left(F_{z'}\right) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

sau

$$\begin{cases} z - y'' = 0 \\ y - z'' = 0 \end{cases} \qquad (1')$$

Soluțiile sistemului (1') sunt:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x \\ şi \\ z = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x \end{cases} . \qquad (2)$$

Din condiția ca $(y,z) \in D$ obținem $C_1 = C_2 = C_3 = 0, \quad C_4 = 1$. Linia admisibilă ce realizează extremul funcționalei va fi:

$$\begin{cases} \overline{y} = \sin x \\ \overline{z} = -\sin x \end{cases} . \qquad (3)$$

Condițiile lui Legendre sunt:

$$\begin{cases} D_1 = F_{y'y'}\left(\overline{y}, \overline{z}\right) = 2 > 0 \\ şi \\ D_2 = \begin{vmatrix} F_{y'y'}\left(\overline{y}, \overline{z}\right) & F_{y'z'}\left(\overline{y}, \overline{z}\right) \\ F_{z'y'}\left(\overline{y}, \overline{z}\right) & F_{z'z'}\left(\overline{y}, \overline{z}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Deci $\left(\overline{y}, \overline{z}\right)$ realizează unu minim pentru funcționala $I[y,z]$ şi $I_{\min} = I\left[\overline{y}, \overline{z}\right]$. Valoarea minimului se obține uşor :

$$I_{\min} = 0 \qquad (5)$$

5. Să se determine extremul funcționalei $I : D \to R$, dacă

$$I[y,z] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y'^2 + z'^2 - 2yz + 4 \right) dx$$

unde $D = \left\{ (y,z) \in C^1\left[0, \frac{\pi}{2}\right] : y(0) = z(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \right\}$**.**

Soluție:

Sistemul Euler-Lagrange corespunzător funcției $F(x, y, z, y', z') = y'^2 + z'^2 - 2yz + 4$ este:

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0 \\ F_z - \dfrac{d}{dx}\left(F_{z'}\right) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

sau

$$\begin{cases} -2z + 2y'' = 0 \\ -2y - 2z'' = 0 \end{cases} \tag{1'}$$

Soluțiile sistemului (1') sunt:

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x \\ și \\ z = -C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x \end{cases} \tag{2}$$

Din condiția ca $(y, z) \in D$ obținem: $C_1 = C_2 = C_3 = 0,\ \ C_4 = 1$. Linia admisibilă ce realizează extremul funcționalei este:

$$\begin{cases} \overline{y} = \sin x \\ \overline{z} = -\sin x \end{cases} \tag{3}$$

Condițiile lui Legendre sunt:

$$\begin{cases} D_1 = F_{y'y'}\left(\overline{y}, \overline{z}\right) = 2 > 0 \\ și \\ D_2 = \begin{vmatrix} F_{y'y'}\left(\overline{y}, \overline{z}\right) & F_{y'z'}\left(\overline{y}, \overline{z}\right) \\ F_{z'y'}\left(\overline{y}, \overline{z}\right) & F_{z'z'}\left(\overline{y}, \overline{z}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \end{cases} \tag{4}$$

Deci $\left(\overline{y}, \overline{z}\right)$ realizează unu minim pentru funcționala $I[y, z]$ şi

$$I_{\min} = 2\pi . \tag{5}$$

6. Să se determine extremul funcționalei $I : D \to R$ dacă

$$I[y, z] = \int_0^1 \left(y'^2 + z'^2 + 2y\right) dx$$

unde $D = \{(y, z) \in C^1[0,1] : y(0) = z(0) = z(1) = 0, y(1) = 1\}$**.**

Soluție:

Sistemul Euler-Lagrange corespunzător funcției $F(x, y, z, y', z') = y'^2 + z'^2 + 2y$ este:

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0 \\ F_z - \dfrac{d}{dx}\left(F_{z'}\right) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

sau

$$\begin{cases} 2 - 2y'' = 0 \\ -2z'' = 0 \end{cases} \tag{1'}$$

Soluțiile sistemului (1') sunt:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} + C_1 x C_2 \\ z = C_3 x + C_4 \end{cases} \tag{2}$$

Din condiția ca $(y, z) \in D$ obținem: $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = C_3 = C_4 = 0.$ Linia admisibilă ce realizează extremul funcționalei este:

$$\begin{cases} \overline{y} = \dfrac{x^2 + x}{2} \\ \overline{z} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Condițiile lui Legendre sunt:

$$\begin{cases} D_1 = F_{y'y'}\left(\overline{y}, \overline{z}\right) = 2 > 0 \\ \text{şi} \\ D_2 = \begin{vmatrix} F_{y'y'}\left(\overline{y}, \overline{z}\right) & F_{y'z'}\left(\overline{y}, \overline{z}\right) \\ F_{z'y'}\left(\overline{y}, \overline{z}\right) & F_{z'z'}\left(\overline{y}, \overline{z}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \end{cases} \tag{4}$$

Deci $\left(\overline{y}, \overline{z}\right)$ realizează unu minim pentru funcționala $I[y, z]$ şi $I_{\min} = I\left[\overline{y}, \overline{z}\right]$. Valoarea minimului este:

$$I_{\min} = -\frac{23}{12}. \tag{5}$$

7. Să se determine extremul funcționalei $I : D \to R$,

$$I[u] = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - 3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \right] dxdy$$

unde $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \le 4\}$, $D = \left\{ u \in C^2(\Omega) : u(x,0) = x^2, \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 2x \right\}$.

Soluție:

Ecuația lui Euler – Ostrogradschi corespunzătoare funcției

$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - 3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2$ este:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{u_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(F_{u_y} \right) - F_u = 0 \qquad (1)$$

$\left(u_x = \frac{\partial u}{\partial x}; u_y = \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ sau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1')$$

Observăm că $\delta(x, y) = 1 + 3 = 4 > 0$ deci ecuația $(1')$ este de tip hiperbolic. Ecuația caracteristică este :

$$dy^2 - 2dxdy - 3dx^2 = 0 \qquad (2)$$

Cele două integrale prime sunt :

$$\begin{cases} 3x - y = C_1 \\ \text{şi} \\ x + y = C_2 \end{cases} \qquad (3)$$

Pentru reducerea la forma canonică a ecuației $(1')$ să considerăm transformarea regulată : $T \begin{cases} \xi = 3x - y \\ \eta = x + y \end{cases}$.

Derivatele parțiale de ordinul doi sunt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -3\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{cases}$$

Înlocuind valorile de mai sus obţinem forma canonică a ecuaţiei ($1^{/}$) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \qquad (4)$$

Prin integrarea ecuaţiei (4) obţinem soluţia:

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) \qquad (5)$$

sau

$$u(x, y) = f(3x - y) + g(x + y) \ . \qquad (6)$$

Condiţiile $u \in D$ sunt :

$$u(x,0) = f(3x) + g(x) = x^2 \text{ şi } \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = -f^{/}(3x) + g^{/}(x) = 2x.$$

Obţinem următorul sistem funcţional:

$$\begin{cases} f(3x) + g(x) = x^2 \\ -f(3x) + 3g(x) = 3x^2 + c \end{cases} . \qquad (7)$$

Soluţia sistemului (7) este:

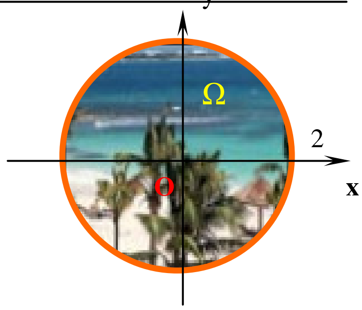
$$\begin{cases} f(3x) = -\dfrac{c}{4} \\ \text{şi} \\ g(x) = x^2 + \dfrac{c}{4} \end{cases} . \qquad (8)$$

Soluţia ecuaţiei ($1^{/}$) este (relaţiile (6) şi (8)):

$$\overline{u}(x, y) = (x + y)^2 \ . \qquad (9)$$

Extremul funcţionalei I este $I[\overline{u}]$.

Avem: $I[\overline{u}] = \iint\limits_{\Omega} \left[4(x+y)^2 + 8(x+y)^2 - 12(x+y)^2 + 2\right] dxdy$ sau



$$I[\overline{u}] = 2\iint_{\Omega} dxdy = 2\,aria(\Omega) = 2\pi 2^2 .$$

Deci

$$I[\overline{u}] = 8\pi .$$

8. Să se găsească extremul funcționalei:

$$I[u] = \iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + x^2y^2\right]dxdy$$

unde $\Omega = \left\{u \in C^2(\Omega) : u\big|_{\partial D} = x^4 + y^4 - \frac{3}{4}\right\},\ D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$.

Soluție:

Ecuația lui Euler – Ostrogradschi corespunzătoare funcției

$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + x^2y^2$ este:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{u_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(F_{u_y}\right) - F_u = 0 \qquad (1)$$

$\left(u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ sau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1')$$

care este ecuația lui Laplace. S-a obținut problema interioară Dirichlet pentru cerc. Pentru a impune mai uşor condiția la limită $u\big|_{\partial D}$, vom trece la coordonate polare:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad (2)$$

de unde rezultă:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctg\,\frac{y}{x} \end{cases} \qquad (2')$$

Observăm că: $\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}$, $\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho}$, $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{\rho^2}$ şi $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{\rho^2}$.

Obținem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial x}=\dfrac{x}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}-\dfrac{y}{\rho^2}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \\ \text{şi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial y}=\dfrac{y}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}+\dfrac{y}{\rho^2}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases} \tag{3}$$

şi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{x^2}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}-\dfrac{2xy}{\rho^3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}+\dfrac{y^2}{\rho^4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\dfrac{\rho^2-x^2}{\rho^3}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}+\dfrac{2xy}{\rho^4}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \\ \text{şi} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{y^2}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\dfrac{2xy}{\rho^3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}+\dfrac{x^2}{\rho^4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\dfrac{\rho^2-y^2}{\rho^3}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}-\dfrac{2xy}{\rho^4}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases} \tag{4}$$

Înlocuind (4) în ($1^{/}$) acesta devine:

$$\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \tag{5}$$

cu condiția la limită:

$$u\big|_{\partial D}=x^4+y^4-\frac{3}{4}\bigg|_{\substack{x=\cos\theta\\ y=\sin\theta}}=\frac{1}{4}\cos 4\theta \tag{6}$$

Pentru rezolvarea problemei (5) şi (6) vom folosi metoda separării variabilelor; căutăm o soluție de forma:

$$u(\rho,\theta)=R(\rho)T(\theta). \tag{7}$$

Observăm că $\dfrac{\partial u}{\partial \rho}=R^{/}(\rho)T(\theta), \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}=R^{//}(\rho)T(\theta)$ şi $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=R(\rho)T^{//}(\theta)$.

Înlocuind în (5) obținem:

$$\rho^2 R^{//}(\rho)T(\theta)+\rho R^{/}(\rho)T(\theta)+R(\rho)T^{//}(\theta)=0 \tag{8}$$

de unde prin împărțire la $R(\rho)T(\theta)\neq 0$ obținem:

$$\rho^2\frac{R^{//}(\rho)}{R(\rho)}+\rho\frac{R^{/}(\rho)}{R(\rho)}=-\frac{T^{//}(\theta)}{T(\theta)} \tag{9}$$

Membrul stâng al ecuației (9) fiind o funcție numai de ρ iar membrul drept fiind o funcție numai de θ, egalitatea lor este posibilă pentru orice ρ şi orice θ, numai dacă cei doi membri au aceeaşi valoare constantă pe care o notăm cu λ; din relația (9) obținem următoarele ecuații:

$$T''(\theta)+\lambda T(\theta)=0 \tag{10}$$

şi

$$\rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0 \tag{11}$$

Funcţia căutată $u(\rho,\theta)$ trebuie să fie periodică în raport cu θ, cu perioada 2π adică să avem $u(\rho,\theta+2\pi)=u(\rho,\theta)$.

Pentru aceasta $T(\theta)$ trebuie să fie periodică cu perioada 2π. Avem deci de găsit valorile parametrului real λ pentru care ecuaţia (10) are soluţii nebanale (problema Sturm - Liouville) periodice cu perioada 2π. Ecuaţia (10) este o ecuaţie diferenţială liniară, omogenă, cu coeficienţii constanţi, cu ecuaţia caracteristică $r^2+\lambda=0$ şi rădăcinile $r_{1,2}=\pm\sqrt{-\lambda}$.

<u>Cazul 1^0</u> $\lambda<0$. Găsim $T(\theta)=C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\theta}+C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\theta}$ care este o soluţie exponenţială reală şi ca atare nu este periodică.

<u>Cazul 2^0</u> $\lambda=0$. Avem $r_1=r_2=0$ şi $T(\theta)=A+B\theta.$ Vom determina A_1 şi B_2 astfel încât $T(\theta)$ să fie periodică, cu perioadă 2π, adică $T(\theta)=T(\theta+2\pi)\Leftrightarrow A+B\theta=$
$=A+B(\theta+2\pi)\Leftrightarrow B=0$ şi deci $T(\theta)=A$ (o constantă) soluţie banală inacceptabilă.

<u>Cazul 3^0</u> $\lambda>0$. Ecuaţia caracteristică are rădăcinile complexe conjugate $r_{1,2}=\pm i\sqrt{\lambda}$ şi deci soluţia generală este $T(\theta)=A\cos\sqrt{\lambda}\theta+B\sin\sqrt{\lambda}\theta.$ Din condiţia $T(\theta+2\pi)=T(\theta)$ şi din faptul că funcţiile $\sin$ şi $\cos$ sunt periodice cu perioada 2π rezultă că: $(\theta+2\pi)\sqrt{\lambda}-\theta\sqrt{\lambda}=2n\pi$ sau $2\pi\sqrt{\lambda}=2n\pi$ de unde:

$$\lambda_n=n^2,\ n\in\{1,2,3,...\} \tag{12}$$

Deci soluţia generală a ecuaţiei (10) este:

$$T_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta,\ n\in\{1,2,3,...\} \tag{13}$$

Cu valorile proprii (12) astfel obţinute, ecuaţia (11) devine:

$$\rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)-n^2 R(\rho)=0 \tag{11'}$$

Ecuația ($11^{/}$) este de tip Euler; pentru integrarea ei vom face schimbarea de variabilă $\rho = e^t$. Obținem:

$$\begin{cases} R^{/}(\rho) = e^{-t}\dfrac{dR}{dt} \\ \text{şi} \\ R^{//}(\rho) = e^{-2t}\left(\dfrac{d^2R}{dt^2} - \dfrac{dR}{dt}\right) \end{cases}$$

Înlocuind $R^{//}(\rho)$ şi $R^{/}(\rho)$ ecuația ($11^{/}$) devine:

$$\frac{d^2R}{dt^2} - n^2R = 0 \qquad (11^{//})$$

care este o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți având ecuația caracteristică $r^2 - n^2 = 0$ cu rădăcinile $r_{1,2} = \pm n$ şi deci soluția generală:

$$R_n(\rho) = C_n\rho^n + D_n\rho^{-n} \qquad (14)$$

Pentru problema lui Dirichlet interioară trebuie să luăm $D_n = 0$ deoarece în caz contrar $\rho^{-n} = \dfrac{1}{\rho^n} \to \infty$ pentru $\rho \to 0$ şi deci soluția u nu ar fi mărginită în origine. Deci

$$R_n(\rho) = C_n\rho^n \qquad (15)$$

Am găsit astfel pentru ecuația (5) soluțiile :

$$u_n(\rho,\theta) = R_n(\rho)T_n(\theta) \quad ,n \in \{1,2,3...\} \qquad (16)$$

sau

$$u_n(\rho,\theta) = \rho^n\left(\overline{A}_n \cos n\theta + \overline{B}_n \sin n\theta\right) \quad ,n \in \{1,2,3...\} \qquad (16^{/})$$

unde $\overline{A}_n = A_nC_n$ şi $\overline{B}_n = B_nC_n$.

Conform principiului suprapunerii efectelor, căutăm o soluție $u(\rho,\theta)$ de forma:

$$u_n(\rho,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n\left(\overline{A}_n \cos n\theta + \overline{B}_n \sin n\theta\right) \quad ,n \in \{1,2,3...\} \qquad (17)$$

Vom determina coeficienţii $\overline{A_n}$ şi $\overline{B_n}$ astfel încât ecuaţia (17) să verifice condiţia la limită (6): $u(1,\theta) = u|_{\partial D} = \frac{1}{4}\cos 4\theta.$

Observăm că $\overline{A_4} = \frac{1}{4}, \overline{A_k} = 0, \forall k \in N^* - \{4\}, \overline{B_k} = 0, \forall k \in N^*$. Deci soluţia admisibil ă $u(\rho,\theta)$ primeşte forma:

$$\overline{u(\rho,\theta)} = \frac{\rho}{4}\cos 4\theta. \qquad (18)$$

Funcţionala $I[u]$ admite un minim $I[\overline{u}]$, deoarece $D_1 = F_{u_x u_x}(\overline{u}) = 2 > 0$ şi $D_2 = \begin{vmatrix} F_{u_x u_x}(\overline{u}) & F_{u_x u_y}(\overline{u}) \\ F_{u_y u_x}(\overline{u}) & F_{u_y}F_{u_y}(\overline{u}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$.

Observăm că

$$F|_{\overline{u}} = \left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2 + \rho^4\sin^2\theta\cos^2\theta =$$

$$= \left(\frac{4\rho^3}{4}\cos\theta\cos 4\theta + \frac{4\rho^3}{4}\sin 4\theta\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{4\rho^3}{4}\sin\theta\cos 4\theta - \frac{4\rho^3}{4}\sin 4\theta\cos\theta\right)^2 +$$

$$+\frac{\rho^4}{4}\sin^2 2\theta = \rho^6\cos^2 3\theta + \rho^6\sin^2 3\theta + \frac{\rho^4}{4}\frac{1-\cos 4\theta}{2} \text{ sau } F_{\overline{U}} = \rho^6 + \frac{\rho^4}{8} - \frac{\rho^4}{8}\cos 4\theta .$$

Deci,

$$I_{\min} = I[\overline{u}] = \iint_{D'}\left(\rho^6 + \frac{\rho^4}{8} - \frac{\rho^4}{8}\cos 4\theta\right)\rho d\rho d\theta \qquad (19)$$

unde $D' \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$ şi $dxdy = \rho d\rho d\theta$.

Relaţia (19) se mai scrie:

$$I_{\min} = \iint_{D'}\left(\rho^7 + \frac{\rho^5}{8}\right)d\rho d\theta - \iint_{D'}\frac{\rho^5}{8}\cos 4\theta d\rho d\theta = \int_0^1\left(\rho^7 + \frac{\rho^5}{8}\right)d\rho\int_0^{2\pi}d\theta -$$

$$-\frac{1}{8}\int_0^1\rho^5 d\rho\int_0^{2\pi}\cos 4\theta d\theta = \left(\frac{\rho^8}{8} + \frac{\rho^6}{48}\right)\Bigg|_0^1 \theta\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{8}\frac{\rho^6}{6}\Bigg|_0^1 \frac{1}{4}\sin 4\theta\Bigg|_0^{2\pi} = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{48}\right)2\pi - 0$$

de unde

$$I_{\min} = \frac{7\pi}{24} \qquad (20)$$

9. Să se determine extremalele funcționalei $I : D \to R,\ I[y] = \int_0^1 y'^2 dx$ **cu legătura** $\int_0^1 y dx = 3,$ **unde** $D = \{y \in C^1[0,1] : y(0) = 1, y(1) = 6\}.$

Soluție:

Ecuația lui Euler este:

$$F_y + \lambda G_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'} + \lambda G_{y'}\right) = 0 \qquad (1)$$

unde $F = y'^2$ şi $G = y.$ Observăm că $F_y = 0, G_y = 1, F_{y'} = 2y'$ şi $G_{y'} = 0.$ Ecuația (1) devine:

$$\lambda - 2y'' = 0 \qquad (1')$$

cu soluția

$$y = \frac{\lambda}{4}x^2 + C_1 x + C_2 \qquad (2)$$

Punem condiția ca $y \in D$; obținem $C_2 = 1$ şi $\frac{\lambda}{4} + C_1 + C_2 = 6$, de unde $C_1 = 5 - \frac{\lambda}{4}$, $C_2 = 1$ şi $y = \frac{\lambda}{4}x^2 + \left(5 - \frac{\lambda}{4}\right)x + 1$.

Pentru a determina pe λ folosim legătura: $\int_0^1 \left[\frac{\lambda}{4}x^2 + \left(5 + \frac{\lambda}{4}\right)x + 1\right]dx = 3$

sau $\frac{\lambda}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left(5 + \frac{\lambda}{4}\right)\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 = 3,\ \frac{\lambda}{12} + \frac{5}{2} - \frac{\lambda}{8} + 1 = 3 \Leftrightarrow 2\lambda + 60 - 3\lambda = 48 \Leftrightarrow \lambda = 12$

şi $\bar{y} = 3x^2 + 2x + 1.$ Cum $F_{y'y'}(\bar{y}) = 2 > 0,$ $\bar{y}$ realizează un minim pentru funcționala $I[y]$ şi

$$I_{\min} = I[\bar{y}] = \int_0^1 (6x+2)^2 dx = 36\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 24\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 4x\Big|_0^1 = 12 + 12 + 4 = 28$$

Deci $I_{\min} = 28.$

10. Să se determine extremalele funcționalei $I: D \to R$**,** $I[y]=\int_0^\pi y'^2 dx$ **cu legătura** $\int_0^\pi y\sin x dx = 1,$ **unde** $D=\{y\in C^1[0,\pi]: y(0)=y(\pi)=0\}$.

Soluție:

Ecuația lui Euler este:

$$F_y + \lambda G_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'} + \lambda G_{y'}\right) = 0 \qquad (1)$$

unde $F = y'^2$ şi $G = y\sin x.$ Observăm că $F_y = 0, G_y = \sin x, F_{y'} = 2y'$ şi $G_{y'} = 0.$

Ecuația (1) devine:

$$\lambda \sin x - 2y'' = 0 \qquad (1')$$

cu soluția

$$y = -\lambda \sin x + C_1 x + C_2 \qquad (2)$$

Punem condiția ca $y \in D$, adică $C_2 = 0$ şi $C_1\pi + C_2 = 0$ de unde $C_1 = 0,$ $C_2 = 0$ şi $y = -\lambda \sin x.$ Pentru a determina pe λ folosim legătura $\int_0^\pi (-\lambda)\sin^2 x dx = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\lambda\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx = 1 \Leftrightarrow -\frac{\lambda}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi = 1 \Leftrightarrow -\frac{\lambda\pi}{2} = 1 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{\pi}$ şi deci $\bar{y} = \frac{2}{\pi}\sin x.$ Deoarece $F_{y'y'}(\bar{y}) = 2 > 0,$ $\bar{y}$ realizează un minim pentru funcționala $I[y]$ şi

$$I_{\min} = I[\bar{y}] = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi \cos^2 x dx = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{2}{\pi^2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi^2}\pi = \frac{2}{\pi}.$$

Adică:

$$I_{\min} = \frac{2}{\pi} \qquad (3)$$

CAPITOLUL VIII

PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE MATEMATICĂ

“ *TRAIAN LALESCU*”- anul II (Politehnică)

(*fazele naționale* - 1980- 1996) (selectiv).

1. Să se calculeze integrala:

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(x+1)^3} dx \ .$$

= 1980 =

2. Să se determine soluția pe $[0, \infty)$ a ecuației diferențiale $xy'' + 2y' = x^2$ care satisface condițiile $y(0)=0$ şi este mărginită în vecinătatea originii folosind transformata Laplace.

= 1981 =

3.Fie $f(x,t) = e^{\frac{x}{2}(t-\frac{t}{2})}$ olomorfă pentru $x \in R$ fixat şi $0 < |t| < \infty$. Dacă $f(x,t)$ admite o dezvoltare în serie Laurent de forma $f(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) \cdot t^n$ atunci $f(x,t)$ verifică următoarele relații:

$$2J_n^{'}(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \ , \quad x \in R^*.$$

= *1981* =

3. Folosind metoda separării variabilelor să se afle soluția ecuației:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = a^2 u, \quad a>0$$

care satisface condițiile:

(1) u(x,t) = u(x,t + 2л) , $x \in R^*, t \geq 0$

(2) u(0,t) = $\frac{1}{5 - 3\cos t}$.

= 1982 =

4. Să se dezvolte în serie Fourier funcția

$$f : R \to R, f(x) = \frac{1}{1 - 2a\cos x + a^2}, \text{ a > 1.}$$

= *1983* =

5. Se dă ecuația cu derivatele parțiale:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

a) Să se determine tipul ecuației şi să se aducă la forma canonică;

b) Să se determine soluția generală;

c) Să se determine soluția particulară care satisface condițiile: u(0,y) = 2y, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 2$.

=*1984* =

6. a) Să se determine funcția olomorfă f(z) = u(x,y) + iv(x,y) pentru care u(x,y) = $e^x \cos y + x \sin x chy - y shy \cos x$;

b) Să se calculeze: $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{5 - 4\cos x} dx$.

=*1985* =

7. Fie $\vec{r}$ vectorul de poziție al punctului de coordonate (x,y,z) $\in R^3$ şi $\varphi : R^3 \to R$ o funcție armonică într-un domeniu D$\subset R^3$.

a) Să se determine parametrii reali a,b astfel încât

grad $(\vec{r} grad\varphi) + arot(\vec{r} x grad\varphi) + bgrad\varphi = 0$

pentru orice funcție armonică φ.

b) Să se exprime printr-o integrală de suprafață integrală triplă:

$$I = \iiint_\Omega \left[grad\varphi + \left(\vec{r}\nabla\right)grad\varphi\right]dw$$

unde Ω este un domeniu cu frontiera suficient de regulată, Ω⊂D, $\vec{r}\,\nabla = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$.

= *1986* =

8. a) Să se determine funcţia monogenă f ştiind că f(z) = $\varphi(x+\sqrt{x^2+y^2})$,

φ derivabilă.

c) Să se calculeze integrala:

$$I = \int_{|Z|=R} \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{(z-1)} dz, R \neq 1 \quad .$$

= *1987* =

9. a) Să se determine funcţiile olomorfe f: $C \to C$ pentru care u(x,y) $= \varphi(x)\cdot\psi(y)$ cu φ şi ψ de clasă $C^2(R)$ unde u (x,y) = $\mathrm{Re}\, f(z)$, z = x + iy.

b) Să se calculeze:

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty \frac{x \sin ax}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)} dx,$$

unde a,b,c $\in R$.

=*1988* =

10.Se dă funcţia complexă

$$\mathrm{F(p)} = \frac{1}{(p+1)\left[(p+1)^2+\omega^2\right]}, \omega > 0,$$

p$\in$ Z. Se cere:

a) Să se determine funcția original f(t);

b) Să se rezolve ecuația integrală:

$$\int_0^t g(u)f(t-u)du = e^{-t}(\omega t - \sin \omega t).$$

c) Să se calculeze $I_1 = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$.

d) Pentru $\omega = 2$ să se calculeze:

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} e^t f(t) \cos^6 t dt.$$

= 1993 = (Universitatea C. Brâncuşi Tg-Jiu)

12. Să se calculeze integrala:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n}$$, a,b, reale, strict pozitive.

Folosind rezultatul obținut să se calculeze:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{1993}}.$$

= 1996 =(Universitatea Tehnică Cluj-Napoca)

13.Să se calculeze integrala:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x \cdot \sin nx}{5-4\cos x} dx$$, $n \in N^*$.

BIBLIOGRAFIE

1. **BĂLAN T.,** ***Matematici speciale*** , Universitatea Craiova 1980.

2. **IOVANOV M. ,** ***Matematici speciale*** , Universitatea "Constantin Brâncuşi" –Tg. Jiu , 1993.

3. **IOVANOV M. , PECINGINA O.** ***Matematici speciale – probleme*** , Departamentul de matematică ,Univ. "Constantin Brâncuşi" –Tg. Jiu , (suport electronic) , 2006.

4. **IOVANOV M. ,** ***Matematici speciale*** , Departamentul de matematică , Univ. "Constantin Brâncuşi" –Tg. Jiu , (suport electronic) , 2006.

5. **MOCANU P.T., HAMBURG P., NEGOESCU N.,** ***Analiză matematică (funcții complexe) ,*** EDP, Bucureşti, 1982**.**

6. **ŞABAC Gh.,** ***Matematici speciale*** **,** vol. I, II, EDP, Bucureşti, 1965.

7. **UNGUREANU V.,** ***Matematici speciale*** **,** Editura Mirton, Timisoara,2003.