Gyakorló feladatok - Analízis I.

Komplex számok

Gyf 1. Oldja meg az egyenletet! Az eredményt algebrai alakban adja meg!: $x^2 - 4x + 13 = 0$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2}$

$x_1 = 2 + 3i$ és $x_2 = 2 - 3i$

Gyf 2. Az eredményt algebrai alakban adja meg!
$z_1 = 3 - i$**,** $z_2 = 1 + 2i$**,** $\frac{z_1}{z_2} = ?$

$\frac{3-i}{1+2i} = \frac{(3-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{3-1i-6i+2i^2}{1-4i^2} = \frac{3-7i-2}{1+4} = \frac{1-7i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$

Gyf 3. $x = 2 - 3i$ **gyöke-e az alábbi egyenletnek:** $x^2 - 4x + 13 = 0$**?**

<u>1. megoldás:</u>

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2}$

$x_1 = 2 + 3i$ és $x_2 = 2 - 3i$

<u>2. megoldás:</u>

$(2 - 3i)^2 - 4(2 - 3i) + 13 = 0$

$4 - 12i + 9i^2 - 8 + 12i + 13 = 0$

$4 - 9 - 8 + 13 = 0$

$0 = 0$

Tehát a megadott x érték gyöke az egyenletnek.

Gyf 4. Oldja meg az egyenletet! Az eredményt algebrai alakban adja meg!: $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$

$y = x^2$ helyettesítés után másodfokú egyenletet kapunk: $y^2 - 5y - 6 = 0$

$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$

$y_1 = 6$ amiből $x_1 = +\sqrt{6}$ és $x_2 = -\sqrt{6}$

$y_2 = -1$ amiből $x_3 = +\sqrt{-1} = i$ és $x_4 = -\sqrt{-1} = -i$

Gyf 5. Tudjuk, hogy $|3 + bi| = 5$. **Mennyi b értéke?**

$|3 + bi| = \sqrt{3^2 + b^2}$

$\sqrt{3^2 + b^2} = \sqrt{9 + b^2} = 5$

$9 + b^2 = 25$

$b^2 = 16$

$b = \pm 4$

Sorozatok

Gyf 6. $\sqrt{n+2}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}) \to ?$

$\lim \sqrt{n+2}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}) =$

$\lim \frac{\sqrt{n+2}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})} = \lim \frac{\sqrt{n+2}(n+5-n)}{(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})} = \lim \frac{5\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})} =$
$= \lim \frac{5\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}}+\sqrt{1}\right)} = \frac{5}{2}$

Gyf 7. Monoton-e:

1. $\frac{2n+1}{3n+2}$

   Az első néhány tag: 0.5, 0.6, 0.625

   Sejtés: monoton nő

   $\frac{2n+1}{3n+2} \leq \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)+2}$

   $\frac{2n+1}{3n+2} \leq \frac{2n+2+1}{3n+3+2}$

   $\frac{2n+1}{3n+2} \leq \frac{2n+3}{3n+5}$

   $(2n+1)(3n+5) \leq (2n+3)(3n+2)$

   $6n^2 + 10n + 3n + 5 \leq 6n^2 + 4n + 9n + 6$

   $5 \leq 6 \quad \surd$

2. $n \cdot 3^{-n}$

Az első néhány tag: 0.33, 0.22, 0.11

Sejtés: monoton csökken

$\frac{n}{3^n} \geq \frac{n+1}{3^{n+1}}$

$\frac{n}{3^n} \geq \frac{n+1}{3^{n+1}}$

$\frac{n}{3^n} \geq \frac{n+1}{3^n \cdot 3}$

$n(3^n \cdot 3) \geq (n+1)3^n$

$3n \geq n+1$

$2n \geq 1$

$n \geq \frac{1}{2} \quad \surd$

3. $n + \frac{1}{n}$

Az első néhány tag: 2, 2.5, 3.33, 4.25

Sejtés: monoton nő

$n + \frac{1}{n} \leq (n+1) + \frac{1}{n+1}$

$\frac{n^2+1}{n} \leq \frac{(n+1)^2+1}{n+1}$

$(n^2+1)(n+1) \leq n(n+1)^2 + n$

$n^3 + n^2 + n + 1 \leq n^3 + 2n^2 + 2n$

$0 \leq n^2 + n + 1 \quad \checkmark$

4. 4. $(-1)^n \cdot n$

Az első néhány tag: 0, -1, 2

A sorozat felváltva pozitív/negatív, tehát nem lehet monoton.

Gyf 8. Konvergens-e a megadott sorozat, ha igen, hová?: $\left(\frac{n+4}{n-2}\right)^n$

$$\lim\left(\frac{n+4}{n-2}\right)^n = \lim\left(\frac{1+\frac{4}{n}}{1-\frac{2}{n}}\right)^n = \lim\frac{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^n} = \frac{e^4}{e^{-2}} = e^6$$

Gyf 9. Konvergens-e a megadott sorozat, ha igen, hová?: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

$$\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \lim\frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \lim\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = 0$$

Gyf 10. Konvergens-e a megadott sorozat, ha igen, hová?: $\frac{0{,}5^n+3}{0{,}2^{3n}-6}$

$$\lim\frac{0{,}5^n+3}{0{,}2^{3n}-6} = \lim\frac{0{,}5^n+3}{(0{,}2^3)^n-6} = \frac{0+3}{0-6} = -\frac{1}{2}$$

Nevezetes határérték: $\lim q^n = 0$, ha $|q| < 1$

Gyf 11. Konvergens-e a megadott sorozat, ha igen, hová?: $\sqrt[n]{2^{n+3}}$

$$\lim\sqrt[n]{2^{n+3}} = \lim\sqrt[n]{2^n \cdot 2^3} = \lim(\sqrt[n]{2^n} \cdot \sqrt[n]{2^3}) = 2 \cdot 1 = 2$$

Gyf 12. Konvergens-e a megadott sorozat, ha igen, hová?: $\sqrt{\frac{28n+1}{7n+1}}$

$$\lim \sqrt{\frac{28n+1}{7n+1}} = \lim \sqrt{\frac{28+\frac{1}{n}}{7+\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{28}{7}} = \sqrt{4} = 2$$

Gyf 13. Konvergens-e a megadott sorozat, ha igen, hová?: $\frac{2^n+3^n}{3^n-4^n}$

$$\lim \frac{2^n+3^n}{3^n-4^n} = \lim \frac{\frac{2^n}{4^n}+\frac{3^n}{4^n}}{\frac{3^n}{4^n}-\frac{4^n}{4^n}} = \frac{0+0}{0-1} = 0$$

Gyf 14. Konvergens-e a megadott sorozat, ha igen, hová?: $\left(\frac{3n^2+2n+7}{11n^7-5n^2-\pi}\right.$

$$\lim \left(\frac{3n^2+2n+7}{11n^7-5n^2-\pi}\right)^2 = \lim \left(\frac{\frac{3n^2}{n^7}+\frac{2n}{n^7}+\frac{7}{n^7}}{\frac{11n^7}{n^7}-\frac{5n^2}{n^7}-\frac{\pi}{n^7}}\right)^2 = \lim \left(\frac{\frac{3}{n^5}+\frac{2}{n^6}+\frac{7}{n^7}}{11-\frac{5}{n^5}-\frac{\pi}{n^7}}\right)^2 = \left(\frac{0+0+0}{11-0-0}\right)^2 = 0$$

Gyf 15. Konvergens-e a megadott sorozat, ha igen, hová?: $\frac{n-1}{n+1}+\frac{n}{2n+2}$

$$\lim \frac{n-1}{n+1} + \frac{n}{2n+2} = \lim \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2+\frac{2}{n}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Függvények

Gyf 16. $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2+t}\right)$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2+t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t^2+t-t}{t(t^2+t)}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t^2}{t^2(t+1)}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t+1}=1$$

Gyf 17. Hol a hiba? $\lim\limits_{+\infty} x^2-x=\lim\limits_{+\infty} x^2-\lim\limits_{+\infty} x=\infty-\infty=0$

És hogy lenne helyesen?

A $\infty-\infty$ típusú határértékről nem tudjuk megmondani, milyen, át kell alakítani a függvényt:

$$\lim_{+\infty} x^2-x=\lim_{+\infty} x(x-1)=\lim_{+\infty} x\cdot\lim_{+\infty}(x-1)=\infty\cdot\infty=\infty$$

Gyf 18. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-x^2=?$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x-x^2=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-1\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}-1\right)=\infty\cdot\infty=\infty$$

Megjegyzés: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$ $\quad\frac{\infty}{\infty}$ típusú, alkalmazható a L'Hospital szabály

A L'Hospital szabályt kétszer alkalmazva kapjuk: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$

Gyf 19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=?$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-x\sin\frac{1}{x})}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\left(1-x\sin\frac{1}{x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\left(1-\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=1$$

Megjegyzés: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$ (Nevezetes határérték)

és $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=0$ (Mert $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ végtelenbe tart, sin függvény pedig korlátos)

Gyf 20. $\lim\limits_{x\to e} \frac{\log(\log x)}{\sin(x-e)} = ?$

0/0 típusú, alkalmazható a L'Hospital szabály:

$$\lim_{x\to e} \frac{\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}}{\cos(x-e)} = \frac{1}{e}$$

Gyf 21. $\lim\limits_{9} \frac{\sin(\sqrt{x}-3)}{x-9}$

$$\lim_{9} \frac{\sin(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \lim_{9} \frac{1}{(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sin(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

Gyf 22. $\lim\limits_{-1} \frac{\sin(x^2-x-2)}{x+1}$

$$\lim_{-1} \frac{\sin(x^2-x-2)}{x+1} = \lim_{-1} \frac{\sin((x-2)(x+1))}{x+1} = \lim_{-1} \frac{\sin((x-2)(x+1))}{(x+1)(x-2)} \cdot (x-2) = 1 \cdot (-3) = -3$$

Gyf 23. Mi az értékkészlet, inverz függvény, értelmezési tartomány?
$f(x) = e^{x^5}$

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$

Inverz függvény: $y = e^{x^5} \to x = e^{y^5}$

$\ln x = \ln e^{y^5} = y^5$

$y = \sqrt[5]{\ln x} = f^{-1}(x)$

Értékkészlet (ami megegyezik az inverz függvény értelmezési tartományával):
$x \in \mathbb{R}^+$

Gyf 24. Mi az értékkészlet, inverz függvény, értelmezési tartomány?
$f(x) = \ln(x + 3)$

Értelmezési tartomány: $x + 3 > 0$, amiből: $x > -3$

Inverz függvény: $y = \ln(x + 3) \to x = \ln(y + 3)$

$e^x = e^{\ln y+3} = y + 3$

$y = e^x - 3 = f^{-1}(x)$

Értékkészlet (ami megegyezik az inverz függvény értelmezési tartományával):
$x \in \mathbb{R}$

Gyf 25. Adja meg a határértéket!: $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$$

Gyf 26. Adja meg a határértéket!: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^3+2x+8}{3x^3-5x+1}$

$$\lim\frac{4x^3+2x+8}{3x^3-5x+1} = \lim\frac{4+\frac{2}{x^2}+\frac{8}{x^3}}{3-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{4+0+0}{3-0+0} = \frac{4}{3}$$

Gyf 27. Adja meg a határértéket!: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$

$$\lim\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x} = \lim\frac{x(4x^2-2x+1)}{x(3x+2)} = \lim\frac{4x^2-2x+1}{3x+2} = \frac{0-0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

Gyf 28. Adja meg a határértéket!: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{6}{x^2-9} - \frac{1}{x-3}$

$$\lim\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x-3} = \lim\frac{6}{(x-3)(x+3)}-\frac{1}{x-3} = \lim\frac{6}{(x-3)(x+3)}-\frac{1(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \lim\frac{6-(x+3)}{(x-3)(x+3)}$$

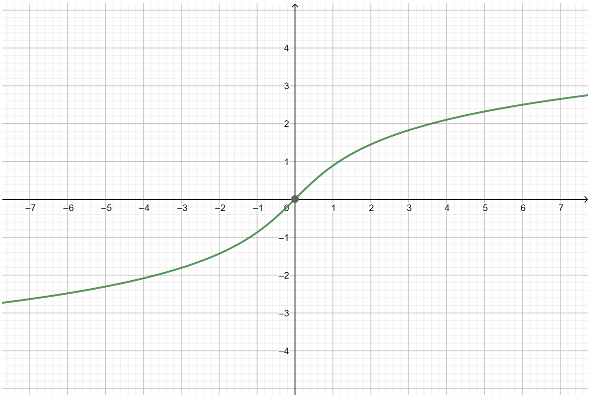
$$= \lim\frac{6-3-x}{(x-3)(x+3)} = \lim\frac{3-x}{(x-3)(x+3)} = \lim\frac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim\frac{-1}{(x+3)} = -\frac{1}{6}$$

Gyf 29. Adja meg a határértéket!: $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sin(\sqrt{x}-3)}{x-9}$

$$\lim\frac{\sin(\sqrt{x}-3)}{x-9} = \lim\frac{\sin(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \lim\frac{\sin(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)}\frac{1}{\sqrt{x}+3} = 1\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Differenciálszámítás, függvények diszkussziója

Gyf 30. $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$



<u>Mutassa meg, hogy f páratlan.</u>

$f(-x) = -f(x)$

$\log(-x + \sqrt{(-x)^2+1}) = -\log(x + \sqrt{x^2+1})$

$\log(-x + \sqrt{(-x)^2+1}) = \log(x + \sqrt{x^2+1})^{(-1)}$

$\log(-x + \sqrt{(-x)^2+1}) = \log \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})}$

$-x + \sqrt{(-x)^2+1} = \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})}$

$(x^2+1) - x^2 = 1$

$1 = 1$

<u>Mi az értelmezési tartomány, értékkészlet?</u>

Értelmezési tartomány:

$x + \sqrt{x^2+1} > 0$

$\sqrt{x^2+1} > -x$

Ha $x \geq 0$, akkor $-x \leq 0$. Egy négyzetgyökös kifejezés mindig nagyobb, vagy egyenlő 0, vagyis teljesül az egyenlőtlenség minden ilyen x-re.

Ha $x < 0$, akkor mindkét oldal nem negatív, vagyis négyzetre emelhetünk, anélkül, hogy az egyenlőtlenség iránya változna.: $x^2+1 > (-x)^2$ minden ilyen x-re teljesül.

vagyis: $Domf = x \in \mathbb{R}$

Értékkészlet:

Vizsgáljuk meg az inverz függvény értelmezési tartományát ($Domf^{-1} = Ranf$):

$f(x) = y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$

$f^{-1} = x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$

$e^x = y + \sqrt{y^2+1}$

$e^x - y = \sqrt{y^2+1}$

$e^{2x} - 2ye^x + y^2 = y^2 + 1$

$e^{2x} - 1 = 2ye^x$

$y = \frac{e^{2x}-1}{2e^x}$

Az inverz függvény értelmezési tartománya: $Domf^{-1} = x \in \mathbb{R}$, amiből:

A megadott függvény értékkészlete: $Ranf = y \in \mathbb{R}$

Hol monoton növ/csök?

$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{2}(x^2+1)^{(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})\cdot 2\sqrt{x^2+1}}$

Tudjuk, hogy a nevező pozitív értékű, így a hányados is pozitív, vagyis a függvény mindenhol monoton nő.

Gyf 31. Legyen $f(x) = ax^2 + bx$. Határozzuk meg a, b-t úgy, hogy f-nek $(1, 1)$-ben érintője legyen az $y = 3x - 2$ egyenes!

Érintő egyenes egyenlete: $y - y_0 = m(x - x_0)$

$f'(x) = 2ax + b$

$P(1, 1)$, ahol $y - 1 = m(x - 1)$

Vagyis: $y - 1 = (2a + b)(x - 1)$

$y = x(2a + b) - 2a - b + 1 = 3x - 2$

Ebből egy kétismeretlenes egyenletrendszert megoldva kapjuk meg a és b értékét:

$2a + b = 3$ és $1 - 2a - b = -2$, illetve a ponton átmenő parabola: $1 = a + b$, amiből $b = 1 - a$:

$2a + (1 - a) = 3$

$a = 2$ és $b = -1$

Ellenőrzés:

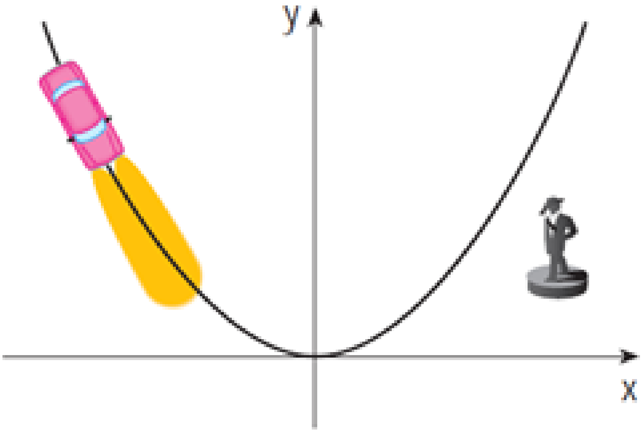
$f(x) = ax^2 + bx = 2x^2 - x$

$f'(x) = 4x - 1$, értéke a pontban: 3 (meredekség)

Az érintő egyenes egyenlete:

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 1 = 3(x - 1) \rightarrow y = 3x - 2$

Gyf 32. Egy autó egy parabola alakú úton közlekedik, melynek egyenlete $y = \frac{1}{100}x^2$. Az autó a $(-100, -100)$ pontból indul. A $(100, 50)$ pontban van egy szobor. Melyik pontban fogja az autó lámpája megvilágítani a szobrot?



Azt a pontot keressük, ahol az az egyenes, ami átmegy a szobor koordinátáin, érinti a parabolát. Vagyis kell a parabola deriváltja.

A parabola: $f(x) = \frac{1}{100}x^2$

Deriváltja: $f'(x) = \frac{1}{50}x$ - ez adja meg az egyenes meredekségét

Az érintő egyenes egyenlete: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Az érintő egyenesnek ismerjük egy pontját (szobor koordinátái), ami beírva az egyenletbe, meghatározza, hol érinti az egyenes a parabolát, vagyis meghatár az autó helyzetét:

$50 = \frac{1}{50}x_0(100 - x_0) + \frac{1}{100}x_0^2$

$50 = 2x_0 - \frac{1}{50}x_0^2 + \frac{1}{100}x_0^2$

$5000 = 200x_0 - 2x_0^2 + x_0^2$

$x_0^2 - 200x_0 + 5000 = 0$

A másodfokú egyenletet megoldva kapjuk:

$(x_0)_1 = 170,5$ és $(x_0)_2 = 29,29$ Mivel x_0 értéke nem lehet nagyobb a szobor x koordinátájánál, így az első gyököt kizárhatjuk.

$y = f(x_0) = \frac{1}{100}x_0^2 = \frac{1}{100}(29,29)^2 = 8,579$

Vagyis a pont, amit kerestünk: $P(29,29; 8,579)$

Ellenőrzésképpen az egyenes egyenletébe visszaírva:

$y = \frac{1}{50}(29,29)(x - 29,29) + \frac{1}{100}(29,29)^2$

$50 = 0,5858(100 - 29,29) + 8,579$

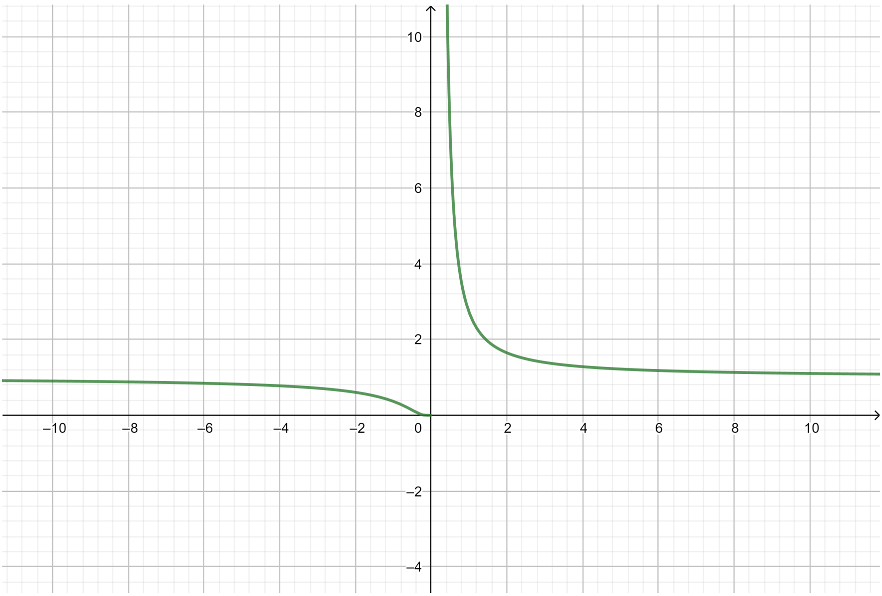
$50 = 50$

Gyf 33. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$ függvénynek nincs szélsőértéke (sem lokális, sem abszolút).

$f'(x) = 101x^{100} + 51x^{50} + 1$

Ahhoz, hogy szélsőértéke legyen, a derivált függvénynek egyenlőnek kell lennie 0-val. Mivel minden tag pozitív, az összeadás eredménye nem adhat 0-át, így a függvénynek nem lehet szélsőértéke.

Gyf 34. Függvényvizsgálat: $e^{\frac{1}{x}}$



Értelmezési tartomány:
$x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Értékkészlet:
$f^{-1} = \frac{1}{\ln x}$, amiből: $y \in \mathbb{R}^{+} - \{1\}$

Zérushely: nincs

Határérték az értelmezési tartomány szélein:

$$\lim_{-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{0-0} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{0+0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

Monotoitása:

$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

A derivált függvény minden x esetén negatív, viszont $x = 0$ helyen szakadási pontja van. Így, ha $x < 0$, a függvény monoton csökken, ha $x > 0$, a függvény monoton csökken.

Szélsőérték, konvexitás, inflexiós pont:

$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{2}{x^3} + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^4} = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)$

Tudjuk, hogy $e^{\frac{1}{x}}$ minden x-re (kivéve 0) pozitíc értéket ad, így a szorzat másik tagját kell vizsgálnunk $\left(\frac{2x+1}{x^4}\right)$:

$f''(x) > 0$ ha $\frac{2x+1}{x^4} > 0$ - itt a függvény konvex

$-\frac{1}{2} < x < 0$, $x > 0$ tartományokon

$f''(x) < 0$ ha $\frac{2x+1}{x^4} < 0$ - itt a függvény konkáv

$x < -\frac{1}{2}$

Gyf 35. Hol monoton? e^{x^3}

$f(x) = e^{x^3}$

$f'(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2$

Ha $f'(x) \geq 0$, akkor a függvény monoton nő. A függvény deriváltja minden x esetén pozitív, tehát a függvény monoton nő.

Gyf 36. Állapítsuk meg, hogy a 0 lokális szélsőértékhely-e:

1. $e^x \sin x^2$

   $f(x) = e^x \sin x^2$

   $f'(x) = e^x \sin x^2 + e^x \cos x^2 \cdot 2x$

   Ott lehet lokális szélsőértéke, ahol $f'(x) = 0$:

   $f'(0) = e^0 \sin 0^2 + e^0 \cos 0^2 2 \cdot 0 = 0$

   Vizsgáljuk meg a 2. deriváltat is:

   $f''(x) = (e^x \cdot \sin x^2 + e^x \cdot \cos x^2 \cdot 2x) + (e^x \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^x \cdot (-\sin x^2) \cdot 2x \cdot 2x + e^x \cdot \cos x^2 \cdot 2))$

   $f''(0) = (e^0 \cdot \sin 0^2 + e^0 \cdot \cos 0^2 \cdot 2 \cdot 0) + (e^0 \cdot \cos 0^2 \cdot 2 \cdot 0 + e^0 \cdot (-\sin 0^2) \cdot 2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 0 + e^0 \cdot \cos 0^2 \cdot 2)) = (0 + 0) + (0 + 0 + 2) = 2$

   $f''(0) = 2 > 0$, tehát 0-ban lokális minimuma van.

2. $e^{x^2} \sin x$

   $f(x) = e^{x^2} \sin x$

   $f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x \sin x + e^{x^2} \cos x$

   Ott lehet lokális szélsőértéke, ahol $f'(x) = 0$:

   $f'(0) = e^{0^2} \cdot 2 \cdot 0 \sin 0 + e^{0^2} \cos 0 = 1$ Tehát a 0 nem lokális szélsőértékhely.

Gyf 37. Függvényvizsgálat: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

ÉT.: $x \in \mathbb{R}$

Zérushely: $\frac{x}{x^2+1} = 0$ ha $x = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)-(x\cdot 2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

Monoton nő, ha $f' > 0$, vagyis: $-x^2+1 > 0$, amiből: $-1 < x < 1$

Monoton csökken, ha $f' < 0$, vagyis: $x < -1$ vagy $x > 1$

Lokális szélsőérték helyei lehetnek, ahol $f' = 0$, vagyis: $x = 1$ és $x = -1$

$x = -1$ helyen lokális minimuma van (monotonitásból adódik, mert csökken, majd nő)

$x = 1$ helyen lokális maximuma van (monotonitásból adódik, mert nő, majd csökken)

Lokális szélsőértékek: $f(-1) = -\frac{1}{2}$ és $f(1) = \frac{1}{2}$

Gyf 38. Van-e $\sin(x - \sin x)$-nek lokális szélsőértéke 0-ban?

Egy függvénynek ott lehet lokális szélsőértéke, ahol a derivált 0:

$f(x) = \sin(x - \sin x)$

$f'(x) = \cos(x - \sin x) \cdot (1 - \cos x)$

$f'(0) = \cos(0 - \sin 0) \cdot (1 - \cos 0) = 0$ Tehát 0-ban lehet szélsőértéke.

Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából $x = 0$ környezetében:

$1 - \cos x \geq 0$ minden x esetén teljesül

A sin függvény -1 és 1 közötti értékeket vehet fel, így ha $x = 0,1$, $x - \sin$ értéke -0,9 és 1,1 közötti lehet. A cos függvény ezen tartományon pozitív.

A fentiekből következik, hogy a derivált függvény $x = 0$ előtt és után is pozitív, monoton nő, vagyis a 0 nem lehet szélsőértékhely.

Gyf 39. Írja fel az érintő egyenes egyenletét $x = 1$-nél: $f(x) = x^2 + 3x$!

Érintő egyenes egyenlete: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$f' = 2x + 3$ $f'(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$

$f(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$

Az érintő: $y = 4 + 5(x - 1)$

Gyf 40. Hol vízszintes az $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8$ függvény grafikonjának érintő egyenese?

Ott, ahol a derivált függvény 0.

$f' = 6x^2 - 12x = x(6x - 12)$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$

Gyf 41. Adja meg a határértéket!: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x}$

$\frac{0}{0}$ típusú, alkalmazható a L'Hospital szabály:

$\lim \frac{\sin 7x}{\sin 3x} = \lim \frac{\cos 7x \cdot 7}{\cos 3x \cdot 3} = \frac{7}{3}$

Gyf 42. Adja meg a határértéket!: $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\lim \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$

Integrálszámítás

Gyf 43. Számítsa ki a görbék közti területet!:
$f(x) = 2x^2 - 2$ **és** $g(x) = 2x + 2$

A két függvény metszéspontjai:

$2x^2 - 2 = 2x + 2$

$2x^2 - 2x - 4 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+32}}{4} = \frac{2\pm\sqrt{36}}{4} = \frac{2\pm 6}{4}$

$x_1 = -1 \quad$ és $\quad x_2 = 2$

A görbék közti terület:

$$\int\limits_{-1}^{2} (2x+2) - (2x^2 - 2) = \int\limits_{-1}^{2} -2x^2 + 2x + 4 = \left[-\tfrac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} =$$
$$= \left(-\tfrac{2}{3}2^3 + 2^2 + 4\cdot 2\right) - \left(-\tfrac{2}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + 4\cdot(-1)\right) =$$
$$= -\tfrac{16}{3} + 4 + 8 - \tfrac{2}{3} - 1 + 4 = \tfrac{14}{3} + 15 = \tfrac{14}{3} + \tfrac{45}{3} = \tfrac{59}{3}$$

Gyf 44. Alkalmazza a parciális integrálás módszerét!: $\int xe^x \quad dx$

$\int xe^x \quad dx = xe^x - \int 1\cdot e^x = xe^x - e^x + c$

Gyf 45. Alkalmazza a parciális integrálás módszerét!: $\int x\sin 3x \quad dx$

$\int x\sin 3x \quad dx = x\frac{-\cos 3x}{3} - \int -\frac{\cos 3x}{3} = x\frac{-\cos 3x}{3} + \frac{1}{3}\int \cos 3x =$

$= x\frac{-\cos 3x}{3} + \frac{1}{3}\frac{\sin 3x}{3} = x\frac{-\cos 3x}{3} + \frac{\sin 3x}{9} + c$

Gyf 46. Integrálja a megadott függvényt!: $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} \quad dx$

$\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)} = \frac{x(A+B)-(2A+B)}{(x-1)(x-2)}$

Az egyenletrendszert megoldva kapjuk: $A = -1$ és $B = 3$

$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = \int \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-2} \quad dx = -1 \ln|x-1| + 3 \ln|x-2| + C$

Gyf 47. Számítsa ki a megadott függvény ívhosszát 0 és 3 között!:
$y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$

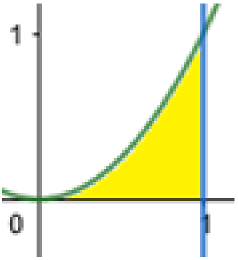
Ívhossz: $s = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx$

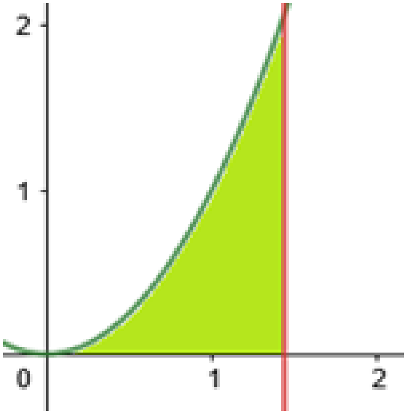
$f' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}$

$\int\limits_0^3 \sqrt{1+(x(x^2+2)^{\frac{1}{2}})^2} = \int\limits_0^3 \sqrt{1+x^2(x^2+2)} = \int\limits_0^3 \sqrt{x^4+2x^2+1} = \int\limits_0^3 \sqrt{(x^2+1)$

$\int\limits_0^3 x^2+1 = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^3 = \left(\frac{3^3}{3}+3\right) - 0 = 12$

Gyf 48. Az ábrákon az x^2 függvény grafikonja alatti zöld idom területe háromszorosa a sárgának. Hol metszi a piros egyenes az x-tengelyt?





$3\int\limits_0^1 x^2 = \int\limits_0^{x_0} x^2$

$3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{x_0}$

$3\left(\frac{1}{3} - 0\right) = \left(\frac{x_0^3}{3} - 0\right)$

$1 = \frac{x_0^3}{3}$

$x_0 = \sqrt[3]{3}$

Gyf 49. $\int\limits_{-2}^{1} |x|$

$\int\limits_{-2}^{0} -x + \int\limits_0^1 x$

$\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$\left(0 - (-\frac{-2^2}{2})\right) + \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{5}{2}$

Gyf 50. Egy f függvényről tudjuk, hogy $\int\limits_1^2 f(x)\ dx = -4,\ \int\limits_1^5 f(x)\ dx =$ 6. Mennyi $\int\limits_2^5 3f(x)\ dx =?$

$\int\limits_1^5 f(x)\ dx = 6$

$\int\limits_1^2 f(x)\ dx + \int\limits_2^5 f(x)\ dx = 6$

$(-4) + \int\limits_2^5 f(x)\ dx = 6$

$\int\limits_2^5 f(x)\ dx = 10$

$\int\limits_2^5 3f(x)\ dx = 3\int\limits_2^5 f(x)\ dx = 30$

Gyf 51. Határozzuk meg azt a görbét, melynek ívhosszát a következő integrál adja meg $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx$. Hány ilyen görbe van? Hány van, ha még kikötjük azt is, hogy a görbe átmegy az $(1,1)$ ponton?

Ívhossz: $s = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx \quad = \displaystyle\int_1^4 \sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx$

vagyis: $(f'(x))^2 = \frac{1}{4x}$

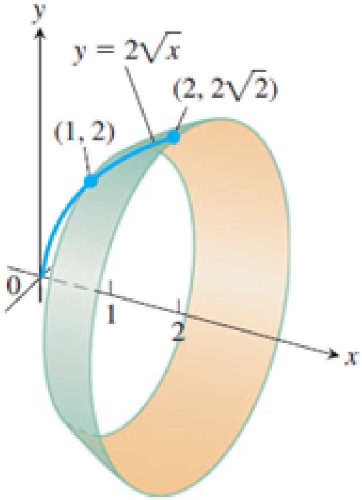
$f'(x) = \pm\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = \int f'(x) = \int \pm\frac{1}{2\sqrt{x}} = \int \pm\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{2}\cdot 2x^{\frac{1}{2}} + c = \pm\sqrt{x} + c$

Hány ilyen görbe van: végtelen sok

Ha átmegy $(1,1)$ ponton: 1 db

Gyf 52. Mekkora az ábrázolt forgástest felszíne?



$$A = 2\pi \int\limits_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}\; dx$$

Itt: $f(x) = 2\sqrt{x}$ és $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$A = 2\pi \int\limits_1^2 2\sqrt{x}\sqrt{1 + \tfrac{1}{x}}\; dx = 4\pi \int\limits_1^2 \sqrt{x + 1\; dx} = 4\pi \left[\tfrac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right]_1^2 = 4\pi \left((2\sqrt{3}\right)$$

Gyf 53. Mutassuk meg, hogy egyetlen olyan a szám van, melyre $\int\limits_1^a \frac{1}{x} dx = 1$

$$\int\limits_1^a \frac{1}{x} dx = \big[\ln x\big]_1^a = \ln a - \ln 1 = \ln \tfrac{a}{1} = \ln a$$

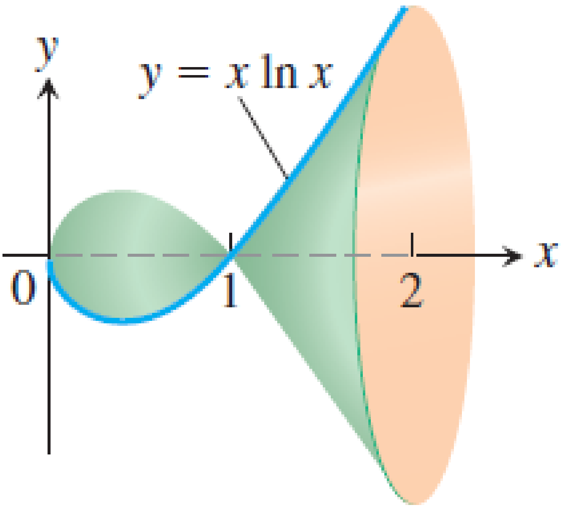
$$\ln a = 1$$

$$a = e$$

Gyf 54. $\int 2xe^{x^2} \cos e^{x^2}$

$$\int 2xe^{x^2} \cos e^{x^2} = \sin e^{x^2}$$

Gyf 55. Mekkora az ábrázolt forgástest térfogata?



$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\ dx$$

$$f(x) = x \ln x$$

$$V = \pi \int_0^2 x^2 \ln^2 x\ dx$$

Parciális integrálás: $\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$

$$\int x^2 \ln^2 x\ dx = \ln^2 x \cdot \frac{x^3}{3} - \int 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \frac{x^3}{3} = \ln^2 x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} \int x^2 \ln x =$$
$$\ln^2 x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} \left(\ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} \right) = \ln^2 x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} \left(\ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^2}{3} \right) =$$
$$\ln^2 x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} \left(\ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} \right) = \frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2x^3}{27}$$

$$V = \pi \left[\frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2x^3}{27} \right]_0^2 = \pi \left(\frac{8}{3} \ln^2 2 - \frac{16}{9} \ln 2 + \frac{16}{27} \right)$$

Vegyes feladatok végeredménnyel - Analízis I.

Komplex számok

Vf 1. Oldja meg az egyenletet! Az eredményt algebrai alakban adja meg!: $x^3 + x^2 + 2,5x = 0$

Mo.: $x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \quad x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

Vf 2. Az eredményt algebrai alakban adja meg! $z_1 = 2 - 2i$**,** $z_2 = 1 - 5i$**,** $\frac{z_1}{z_2} = ?$

Mo.: $\frac{12}{26} + \frac{8}{26}i$

Vf 3. $x = 5 - 3i$ **gyöke-e az alábbi egyenletnek:** $x^2 - 5x + \frac{17}{2} = 0$**?**

Mo.: Nem.

Vf 4. Oldja meg az egyenletet! Az eredményt algebrai alakban adja meg!: $x^4 + x^2 - 6 = 0$

Mo.: $x_{1,2} = \pm\sqrt{2} \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{3}i$

Vf 5. Tudjuk, hogy $|a + 3i| = 5$**. Mennyi a értéke?**

Mo.: $a = \pm 4$

Sorozatok

Vf 6. $\sqrt[n]{2^{\sin n}} \to ?$

Mo.: 1

Vf 7. $\sqrt[n]{2^{7+3^n}} \to ?$

Mo.: $+\infty$

Vf 8. $\sqrt[n]{17+n} \to ?$

Mo.: 1

Vf 9. Konvergens-e a megadott sorozat, ha igen, hová?: $\left(\frac{n-5}{n+2}\right)^n$

Mo.: e^{-7}

Vf 10. Konvergens-e a megadott sorozat, ha igen, hová?:
$\sqrt{2n-5} - \sqrt{n-1}$

Mo.: $+\infty$

Vf 11. Konvergens-e a megadott sorozat, ha igen, hová?: $\frac{0{,}5^n+1}{0{,}4^n+4}$

Mo.: $\frac{1}{4}$

Vf 12. Konvergens-e a megadott sorozat, ha igen, hová?: $\sqrt[n]{2^n+5}$

Mo.: 2

Vf 13. Konvergens-e a megadott sorozat, ha igen, hová?: $\sqrt{\frac{16n+1}{4n+1}}$

Mo.: 2

Vf 14. Konvergens-e a megadott sorozat, ha igen, hová?: $\frac{4^n+3^n}{3^n-5^n}$

Mo.: 0

Vf 15. Konvergens-e a megadott sorozat, ha igen, hová?: $\left(\frac{2n^3+5n+1}{7n^7+3n^2-5\pi}\right)$

Mo.: 0

Vf 16. Konvergens-e a megadott sorozat, ha igen, hová?: $\frac{2n+1}{n-5}+\frac{n+2}{2n-6}$

Mo.: $\frac{5}{2}$

Függvények

Vf 17. Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy függvény. Mennyi g határértéke az adott pontokban, ha tudjuk, hogy

1. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{3g(x) - 7} = 2$ Mo.: $g(x) \to 5$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2+1}{g(x)} = +\infty$ Mo.: $g(x) \to 0$

3. $\lim\limits_{x \to \sqrt{5}} \frac{1}{x+g(x)} = 2$ Mo.: $g(x) \to \frac{1-2\sqrt{5}}{2}$

4. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{5-x^2}{\sqrt{g(x)}} = 0$ Mo.: $g(x) \to +\infty$

Vf 18. Mi az értékkészlet, inverz függvény, értelmezési tartomány?
$f(x) = e^{x^3}$

Mo.: Értékkészlet: $x \in \mathbb{R}$ $f^{-1} = \sqrt[3]{\ln x}$ Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}^+$

Vf 19. Mi az értékkészlet, inverz függvény, értelmezési tartomány?
$f(x) = \ln(x - 2)$

Mo.:Értékkészlet: $x > 2$ $f^{-1} = e^x + 2$ Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$

Vf 20. Adja meg a határértéket!: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{2x}$

Mo.: $\frac{5}{2}$

Vf 21. Adja meg a határértéket!: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^4-11x+3}{3x^4+5x^2+8}$

Mo.: $\frac{5}{3}$

Vf 22. Adja meg a határértéket!: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{7x^3+3x^2+2x}{5x^2-8x}$

Mo.: $-\frac{2}{8}$

Vf 23. Adja meg a határértéket!: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x^2-4} - \frac{4}{x-2}$

Mo.: $\frac{1}{4}$

Vf 24. Adja meg a határértéket!: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-x-2)}{x+1}$

Mo.: 0

Differenciálszámítás, függvények diszkussziója

Vf 25. Írja fel az érintő egyenes egyenletét $x = 2$-nél: $f(x) = x^2 + 5x$!

Mo.: $y = 14 + 9(x - 2)$

Vf 26. Hol vízszintes az $f(x) = x^3 - 5x^2 + 10$ függvény grafikonjának érintő egyenese?

Mo.: $x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{10}{3}$

Vf 27. Adja meg a határértéket!: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$

Mo.: $\frac{5}{4}$

Vf 28. Adja meg a határértéket!: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{3x^2+5}}$

Mo.: $+\infty$

Integrálszámítás

Vf 29. Számítsa ki a görbék közti területet!: $f(x) = x^2 + 2$ **és** $g(x) = x + 2$

Mo.: $\frac{1}{6}$

Vf 30. Alkalmazza a parciális integrálás módszerét!: $\int x \ln x \quad dx$

Mo.: $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$

Vf 31. Alkalmazza a parciális integrálás módszerét!: $\int x^2 e^x \quad dx$

Mo.: $x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

Vf 32. Integrálja a megadott függvényt!: $\int \frac{1}{x^2 - 5x + 4} \quad dx$

Mo.: $\frac{1}{3} \ln |x - 4| - \frac{1}{3} \ln |x - 1| + C$