W. W. SAWYER

Mi a matematikai analízis?

Tartalom

Az olvasóhoz

Ezt a könyvet a szerző azzal a szándékkal írta, hogy fontos matematikai fogalmakat a középiskolások és a laikusok széles rétege számára érdekessé és érthetővé tegyen.

Ha az olvasó eddig csak az iskolában találkozott a matematikával, akkor figyelmébe ajánljuk, hogy matematikakönyvet nem lehet gyorsan olvasni. Nem várható, hogy első olvasásra mindenki mindent megért. Szabad a bonyolultabb részeken átugorni, majd később visszatérni rájuk; gyakran egy bizonyítást az utána következő megjegyzés tesz világossá. Másrészt, az ismert anyagot tartalmazó fejezeteket nagyon gyorsan el lehet olvasni.

A matematikát legjobban problémák megoldásával lehet tanulni, ezért könyvünkben is vannak feladatok. Ha az olvasó megszokja, hogy matematikakönyveket papírral és ceruzával a kezében olvasson, akkor egyre többet fog jelenteni számára a matematika.

A kiadó

Mit kell tudnunk az analízis tanulásáról?

A matematikában újra és újra meglepődhetünk azon, hogy felteszünk egy egyszerű kérdést – olyan egyszerűt, amiről azt hihetnénk, feltenni sem érdemes –, azután kiderül, hogy a válasz igen sok új, érdekes kutatási terület előtt nyitja meg a kaput, és hatásos eszközökhöz jut, aki megérti.

Így történt az analízis esetében is. Az analízis kezdetét az a látszólag egyszerű és ártatlan kérdés jelentette, hogy mi a sebesség és hogyan lehet kiszámítani. Ez a kérdés eléggé természetes módon vetődött fel az időszámításunk utáni 1600-as évek táján, amikor a testek mozgását tanulmányozni kezdték – az égitestektől kezdve az ingáig. Ekkortájt kezdték meg az anyagi világ intenzív tanulmányozását, ezekből a vizsgálódásokból fejlődött ki a modern világkép – a csillagok és atomok, a gépek és gének, minden jó és rossz ismerete. Azt várhatnánk, hogy a sebesség vizsgálata csak nagyon korlátozott területen alkalmazható – gépeknél, tárgyak esésénél, égitestek mozgásánál. A valóság azonban mást mutat. A tudomány és a matematika 1600 és 1900 között elért eredményei gyakorlatilag mind kapcsolatban vannak az analízissel. Ebből az egyetlen gyökérből a legváratlanabb módon minden irányban új ismeretek fejlődtek ki. Az analízis alkalmazásait megtalálhatjuk a gravitáció, a hő, a fény, a hang, az elektromosság, a mágnesesség elméletében, a víz áramlásának leírásában és a repülőgépek tervezésében. Az analízis segítségével jósolhatta meg Maxwell, a fizikusok első eredményes kísérletei előtt húsz évvel, a rádiót. Az analízisnek alapvető szerepe van Einstein 1916-ban felállított elméletében is, továbbá századunk húszas éveinek új atomelméleteiben. Eltekintve ezektől és sok más tudományos alkalmazástól, az analízis elősegíti a tiszta matematika érdekes új ágainak megjelenését. Századunkban a matematikának kevés olyan ágát dolgozták ki, amelyben ne játszott volna szerepet az analízis, de még ez a kevés is keveredett valamiképp az analízissel. Nagyon hátrányos helyzetbe kerülne az, aki az analízis ismerete nélkül akarná tanulmányozni az előbb említett tárgyköröket, mert olyan eredményekkel találkozna, amelyek az analízis tételeiből következnek. Aki komolyan szándékozik matematikával foglalkozni, annak meg kell ismerkednie a matematikai analízissel.

Az analízis így mind a tiszta, mind az alkalmazott matematikával foglalkozók számára nélkülözhetetlen, holott az analízis egy egészen egyszerű fogalomból, a *sebesség* fogalmából fejlődött ki. (**Tiszta matematikának** az alkalmazásra nem kerülő, magának ***a matematikának a kedvéért művelt matematikát*** nevezzük. Az alkalmazott matematika a valóságos világ – természettudományok, műszaki tudományok, orvostudomány, közgazdaságtan, történelem stb. – problémáihoz kapcsolódik. Az elmúlt korok legnagyobb matematikusai – éppúgy, mint korunk nagy matematikusai – mind a tiszta, mind az alkalmazott matematika iránt érdeklődtek.)

Régen az emberek gyakran különlegesen nehéznek tartották az analízist. Később, különösen Angliában, a tanárok kezdték felismerni, hogy sok mindent lehet az analízisből tanítani úgy, hogy sokkal egyszerűbb és jóval érdekesebb legyen, mint az algebra bármelyik ága. Az angol középiskolákban a tanulók két vagy három évig foglalkozhatnak analízissel. Ugyanakkor némelyik matematikus szerint ez nem jó; az analízis valójában jóval bonyolultabb annál, mint amilyennek látszik, és csak nagyon jól képzett matematikusok taníthatják. Hol van az igazság ezek között az ellentmondó tények között?

Próbáljuk a fentieket egy hasonlattal megvilágítani. Egy csendes faluban él egy idős nő, aki minden vasárnap egyedül vezeti kocsiját a templomig. Kérdezzük meg tőle, könnyű-e autót vezetni. Bizonyára azt fogja válaszolni, hogy: „Ó, persze, nincsenek műszaki ismereteim, és egészen egyszerűnek találom.” Kevésbé találná egyszerűnek, ha New York legforgalmasabb útvonalán vezetne, vagy nehéz kamionnal kelne át a Szikláshegységen. De mindez nem cáfolja meg azt, hogy az idős hölgy tud autót vezetni. És ha egyszer nagy forgalomban kellene kocsit vezetnie, vezetési gyakorlata valamelyest hasznára volna. Nem lenne annyira reménytelen a helyzete, mintha sosem vezetett volna.

Így vagyunk az analízissel is. Az elemi analízis olyan, mint az elemi kocsivezetés. Nem nehéz megtanulni, és képessé tesz arra, hogy sok olyasmit csináljunk, amit egyébként sosem tudnánk. De ha az analízis útján messzebbre kívánunk eljutni, akkor bonyolultabb dolgokkal találkozunk.

Hogyan tanítsuk tehát az analízist? Riasszuk el a kezdőt olyasmikkel, amik csak sokkal magasabb szinten fontosak? Így megzavarnánk: nem látná, hogy mi szükség van ezekre. Ha pedig nem így teszünk, akkor a matematikusoknak nem fog tetszeni, hogy „becsapjuk” az ifjúságot.

Úgy vélem, az a helyes megközelítés, ha egyszerre csak egyfélét csinálunk. Ha valakit egy forgalomtól távol eső úton tanítunk autót vezetni, akkor először azt tanítjuk meg, hogy melyik a gázpedál, melyik a fék, hogyan kell kormányozni, és hogyan lehet megállni. Felesleges volna azzal megzavarni, hogy elmondjuk, mit tegyen nagy forgalomban, hogyan vezessen jeges úton. Ugyanakkor jól tesszük, ha felhívjuk a figyelmét arra, hogy ilyen helyzetek is vannak, és ne gondolja, hogy már mindent megtanult.

Ha megkíséreljük a teljes igazságot elmondani neki, valószínűleg nem fog egyszerre mindent felfogni. És ami még fontosabb: mi magunk sem tudjuk a teljes igazságot. Tanulóvezetőnk fiatal. Talán ő lesz az első, aki a Marson járművet fog vezetni. És ki tudja, milyen vezetési technikára lesz szükség a Marson?

Ilyen a matematika is. Ahogy előrehaladunk benne, mindig új és váratlan dolgokkal találkozunk, és meg kell változtatnunk addigi nézeteinket. Az alkalmazott szabályokról, a bebizonyított tételekről előre nem látható gyengeségek derülhetnek ki. Ha valaki azt kérné tőlem, hogy írjam fel egy papírlapra azokat a kijelentéseket, amelyek igazságában abszolút biztos vagyok, azokat a kijelentéseket, amelyekről úgy gondolom, hogy mindig és mindenütt igazak maradnak, akkor üresen hagynám a papírt.

Ezt a könyvet az analízis legegyszerűbb elemeivel kezdem, a vidéken való autóvezetéssel. Nem foglalkozom a kellemetlen kivételekkel. Lényegében oly módon tárgyalom, mint a matematikusok a XVII. században, az analízis kialakulása idején. Az a tapasztalatom, hogy a matematika iránt érdeklődő tanulók az analízisnek ezt a tárgyalását minden különösebb nehézség nélkül követni tudják. A könyv végén, az *Intuíció és logika* című fejezetben szerepel néhány olyan példa, amely megmutatja, hogyan válik az analízis a nagyvárosi forgalomban történő vezetéshez hasonlóvá. Ezek figyelmeztetnek a később felmerülő bonyodalmakra. Ne higgyük azonban ezekről, hogy egyszerűen nehézségek volnának. Ez korántsem így van, a bonyodalmak némelyike nagyon furcsa, váratlan és érdekes.

Most pedig beszéljünk arról, milyen előismeretekre van szükség a könyv olvasásához. A következő ismeretekre fogunk támaszkodni:

(1) ***Aritmetikai*** *alapismeretek*. Tisztában kell lennie az egész számok, a törtek és a tizedes törtek összeadásával, kivonásával,

szorzásával és osztásával. Szerepelnek majd hatványok, amelyekről tudni kell, hogy például 4^5 a $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ rövidítése.

(2) ***Algebrai*** *alapismeretek*. Ismerni kell a betűjelölést, az egyszerűbb algebrai kifejezések összeadását, kivonását, szorzását és osztását. Kell tudni formulába behelyettesíteni, például, ha x helyébe 3-at írunk, akkor az x^2-1 kifejezés értéke 8 lesz. Negatív számokkal – mint például -5 – is fogunk találkozni.

(3) ***Grafikonok***. Ismerni kell a grafikonok készítésének módját. Sok grafikont fogunk készíteni, és emlékezni kell arra, hogy milyenek voltak ezek. Például az $y = x$ és $y = 2x + 1$ grafikonjai egyenesek, míg az $y = x^2$ és $y = 1/x$ grafikonjai nem egyenesek.

Különösen fontos, hogy az algebrát ne csupán szabályok összességének tekintsük, hanem legyen valami elképzelésünk arról, hogyan fejlődött ki az algebra az aritmetikából, és hogyan használható arra, hogy segítségével aritmetikai dolgokról beszéljünk. Néhány példán bemutatjuk, mit jelent ez.

Például, az alábbiak aritmetikai **kijelentések**:

- 3^2 értéke 1-gyel nagyobb, mint $2 \cdot 4$;
- 4^2 értéke 1 -gyel nagyobb, mint $3 \cdot 5$;
- 5^2 értéke 1-gyel nagyobb, mint $4 \cdot 6$.

Ezek a kijelentések azonban azt sugallják, hogy „minden egész szám négyzete 1-gyel nagyobb, mint az előtte és utána álló két szám szorzata.” Így például sejtjük, hogy 87^2 is 1-gyel nagyobb, mint $86 \cdot 88$. Az általános eredményt az algebra nyelvén fogalmazzuk meg. Ha n jelenti az „akármelyik számot”, akkor az „előtte álló szám” $n - 1$, az „utána álló szám” $n + 1$ alakban írható fel.

A fenti mondat helyett azt írhatjuk, hogy „n^2 értéke 1-gyel nagyobb, mint

$(n - 1)(n + 1)$”,

vagy tisztán jelekkel

$$n^2 = 1 + (n - 1)(n + 1).$$

Ez az egyenlet, amely minden n egész számra teljesül, azt fejezi ki, amit az egyes aritmetikai kijelentések alapján sejtettünk. Ezenkívül lehetőségünk nyílik annak bizonyítására, hogy sejtésünk helyes. A szorzást elvégezve látjuk, hogy a két oldal mindig azonos.

A szimbolikus jelölés tehát sejtésünk megfogalmazásakor is, és a kijelentés helyességének bizonyításakor is hasznos.

Az algebrában gyakran találkozunk olyan speciális eredményekkel, amelyekből jóval általánosabbak következnek. Például, ha

$$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$$

és az

$$(x + 5)(x + 6) = x^2 + 11x + 30$$

egyenletek **szorzását** elvégezzük, akkor valószínűleg észreveszünk valamit. Az első példában azt találjuk, hogy a jobb oldalon szereplő 7 a bal oldalon álló 3 és 4 összege és a 12 a 3 és a 4 szorzata. A másodikban ugyanez a helyzet: a 11 az 5 és 6 összege, a 30 az 5 és 6 szorzata. Azt sejthetjük, hogy bármilyen számok állnak is a bal oldalon, mindig ugyanez történik. Az algebra nyelvén fogalmazva meg sejtésünket: az $(x + a)(x + b)$ szorzást elvégezve, az x együtthatója mindig $a + b$ lesz és ab lesz az állandó tag. Sejtésünket egyenlettel a következőképpen írhatjuk fel:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a+b)x + ab.$$

Most már könnyen igazolhatjuk, hogy sejtésünk valóban igaz. Ilyen típusú okoskodást gyakran fogunk alkalmazni könyvünkben.

összegyűjtünk néhány nyilvánvaló tényt. Megvizsgáljuk ezeket. Megpróbálunk valamilyen általános formulát felállítani.

Ehhez szükségünk van a szabályok felismerésére és algebrai jelekkel történő felírására. Például, ha a következő táblázatot látjuk:

x	0	1	2	3	4
y	0	2	4	6	8

akkor könnyen felismerjük a mögötte álló szabályt. Az alsó sor minden száma kétszer akkora, mint a fölötte álló szám. A táblázatban rejlő szabály az $y = 2x$. Ugyanígy, az

x	0	1	2	3	4	5
y	0	1	4	9	16	25

táblázat mögött az $y = x^2$ szabály áll. Az alsó sor minden száma a felette álló szám négyzete.

A szabályt nem lényeges szavakban is megfogalmazni. Jóval könynyebb látni, hogy mit jelent az $y = 3x^2 - 2x + 7$ formula, mint szavakkal kifejezni. A formulákkal kapcsolatos okoskodások legalkalmasabb nyelve az algebra. Az algebra nyelvén a formula kis helyen elfér. A formulát rövidebb leírni, könnyebb olvasni, gyorsabban lehet elmondani, és egyszerűbb megérteni, mint a szavakban kifejezett megfelelő mondatot. Ha meg szeretnénk győződni arról, hogy valaki megértett-e egy formulát, akkor nem azt kérem, hogy mondja el szavakban, hanem azt, hogy készítsen hozzá táblázatot. Ha helyes táblázatot készít, akkor biztos, hogy megértette a formulát.

A táblázatok sorai között nem mindig lehet elsőfokú összefüggést találni. Például, ha az

x	0	1	2	3	4	5
y	0	3	12	27	48	75

táblázat mögött álló szabályt kell megkeresnünk, akkor lehet, hogy nem találjuk meg rögtön. Lehet, hogy egy vagy két hibás sejtés után jutunk el a helyes megoldáshoz. Némi szerencse is kell a sejtéshez. De ha kitartóak vagyunk, akkor idővel találunk olyan ösvényt, amelyen haladva célhoz érünk. Ha észrevesszük példánkban, hogy az alsó sor mindegyik száma osztható 3-mal, akkor látjuk, hogy *y* értékei valójában a következők:

- 3-szor 0,
- 3-szor 1,
- 3-szor 4,
- 3-szor 9,
- 3-szor 16,
- 3-szor 25.

Most már felismerhetjük a 0, 1, 4, 9, 16, 25 négyzetszámokat, és látjuk, hogy a szabály $y = 3x^2$. (Vegyük észre a $3x^2$ és $(3x)^2$ kifejezések közötti különbséget. A $3x^2$ kifejezésben a négyzetre emelés **csak az *x*-re vonatkozik**; vagyis veszünk valamilyen számot, négyzetre emeljük, és ***azután*** megszorozzuk 3-mal. A tanulók gyakran előbb megszorozzák az x-et 3-mal, és az eredményt emelik négyzetre. Pedig ezt az eljárást a $(3x)^2$ jellel fejezzük ki. Így $x = 10$ esetén $3x^2$ értéke $3 \cdot 10^2 = 3 \cdot 100 = 300$, míg $(3x)^2$ értéke $(3 \cdot 10)^2 = 30^2 = 900$.)

Az $y = 3x^2$ képlettel a későbbiekben még találkozunk könyvünkben. Szükségünk lesz majd arra, hogy táblázat alapján felismerjük ezt a szabályt.

Vannak módszerek arra, hogyan lehet egy táblázat szabályát felismerni, ezeket nem részletezzük. Csak egyszerű szabályokkal fogunk foglalkozni, amelyek esetében elegendő lesz a sejtés is.

Könyvünk célja és korlátai

Egy ilyen bevezető könyv nem lehet sem „szakácskönyv", sem egyszerűen tételek és bizonyítások gyűjteménye. Mindkét típusú könyv távol tartja a tanulót a matematikától.

A „szakácskönyv" csupán bizonyos típusú problémák megoldására szolgáló szabályok jegyzéke. Azt várjuk, hogy a tanuló megtanulja a szabályokat. De miért érvényesek ezek a szabályok? Hogyan jutottak el a felfedezésükhöz? Mit lehet kezdeni egy olyan problémával, amelyikre egyik szabály sem alkalmazható?

A **tétel–bizonyítás–tétel–bizonyítás** típusú könyv bizonyos korlátozott értelemben megmagyarázza a matematikát. Az első tételt legalább az első tétel bizonyítása követi, ami némileg megvilágítja, hogy miért érvényes az első tétel. De sok minden rejtve marad. Milyen alapon határozta el a szerző, hogy éppen ez a tétel legyen az első? Milyen alapon határozta el, hogy melyik tételeket veszi be könyvébe és melyik tételeket hagyja el? Mi a célja e könyvnek? Milyen gondolatmenet rejlik a könyv mögött? Hogyan fedezték fel ezeket a tételeket? Mit csináljon a tanuló, ha ő maga is szeretne ilyen tételeket felfedezni? Talán éppen a legutolsó kérdés a legfontosabb. Igen furcsa, hogy sok kiváló matematikus, aki úgy gondolja, hogy az élet egyedüli értelme új matematikai tételeket felfedezni, gyakran olyan könyveket ír, amelyek semmiféle utalást nem tartalmaznak arra vonatkozóan, hogy az olvasó hogyan próbálkozhat azzal, hogy ő maga is tegyen ilyen felfedezéseket.

A matematikai tételek elsajátításának legalább négy feltétele van.

(1) **Világosan látni és érteni kell, hogy mit állítunk**. Nem elég bizonyos szavakat memorizálni. Tudni kell, mit jelent a tétel.
(2) Össze kell gyűjtenünk olyan tényeket, amelyek **alátámasztják** tételünket. Ereznünk kell, hogy tételünk összhangban van eddigi matematikai ismereteinkkel.
(3) Tudnunk kell, **mire alkalmazható** a tétel. Lehet, hogy felhasználható a tudományokban, de az is lehet, hogy egyszerűen a tiszta matematika más, érdekes tételeihez vezet. Illik tudni, mik ezek a tételek.
(4) Tudnunk és értenünk kell a tétel bizonyítását.

Szeretném leszögezni, hogy ebben a könyvben egyetlen tétel bizonyítása sem szerepel. A (4). feltétellel egyáltalán nem foglalkozom, az egész könyvben az (1), (2) és (3) feltételekre szorítkozom. Szeretném bemutatni, hogy az analízis fogalmai egészen természetes módon keletkeztek, és szeretném, ha az olvasók maguk fedeznék fel ezeket a fogalmakat. Ha együtt volnánk egy teremben, nekem csak kérdéseket kellene feltennem, és az az érzés alakulna ki a hallgatóságban, hogy olyan fogalmak tisztázásával jutottak el az analízishez, amelyeket halvány és bizonytalan alakban már ismertek. Egy könyv keretei között sajnos ezt a módszert nem lehet követni, de megkísérlem annyira megközelíteni, amennyire csak lehet. Igyekszem eredményeket nem közölni. Felhívom az olvasó figyelmét bizonyos dolgokra, amelyeket saját maga kipróbálhat. Az ily módon összegyűjtött tények bizonyos következtetéseket ***sugallnak*** majd. Ennél többet nem fogok követelni. Úgy vélem, ez a módszer megkönnyíti az analízissel való komoly foglalkozás megkezdését. Ezek után talán nem nehéz elképzelni, hogy milyen irányban fogunk haladni.

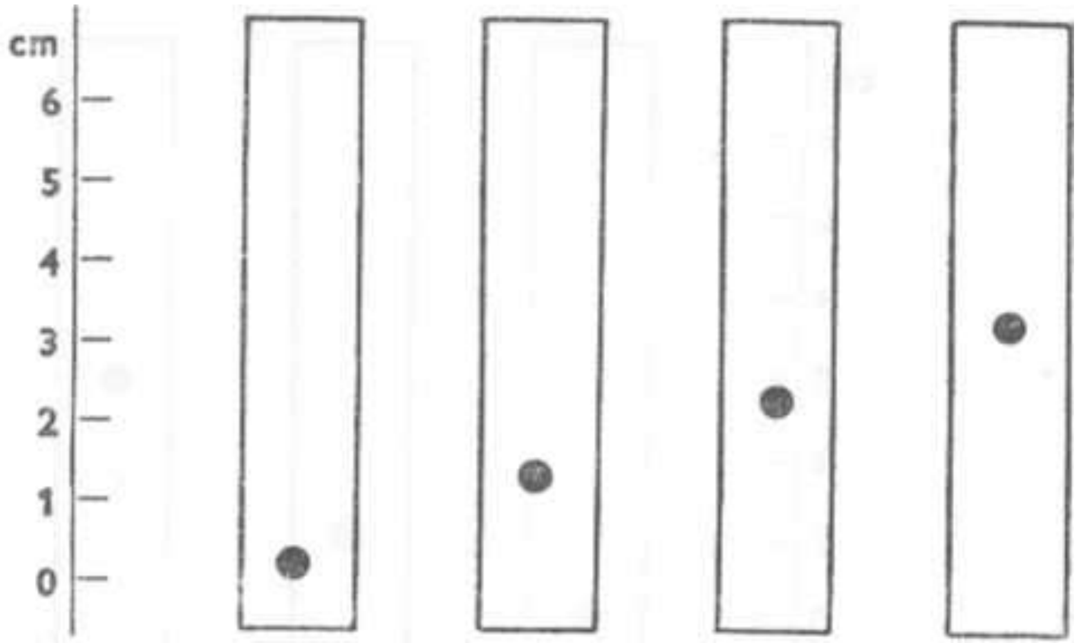
Az első hét fejezet némiképpen különbözik az utolsó háromtól. Az 1–7. fejezetekben bizonyos fogalmakkal valamelyest részletesen foglalkozunk. Azt várom, hogy az olvasó ezeket a fejezeteket gondosan elolvassa és elsajátítsa. Az utolsó három fejezet jóval kevésbé részletezett. Azért szerepeltetjük mégis, hogy az olvasó lássa, az 1-7. fejezetek ismerete után is bőven van még mit tanulnia. A 8. és 9. fejezet néhány olyan kérdést körvonalaz, amely az analízis tanulásának első éveiben merül fel. A 10. fejezet még komolyabb kérdéseket tartalmaz; olyanokra hívja fel a figyelmet, amelyekről azt gondolnánk, hogy elő sem fordulhatnak, és amelyek a valóságban mégis megtörténnek. A tanulók egy része a könyvnek éppen ezt a fejezetét tartja a legérdekesebbnek.

A 8., 9. és 10. fejezet mintegy kitekintés a későbbi tanulmányok felé. Céljuk nem a teljes áttekintés, hanem főleg az, hogy a további kérdések természetére utaljon. Így aztán senki se lepődjön meg azon, hogy ezekben a fejezetekben egy sor megválaszolatlan kérdést talál.

A könyv az analízis néhány szakkifejezésének gyűjteményével zárul. Ezt a szótárt akkor állítottuk össze, amikor a könyv nagy része már elkészült, úgyhogy a könyv megértése szempontjából nincs rá szükség. Mégis úgy éreztük, hogy hasznos lehet, ha az olvasó megismerkedik a könyvben szereplő fogalmak matematikai elnevezésével, és ez a szótár segítségére lesz, ha formálisabb analíziskönyveket fog olvasni.

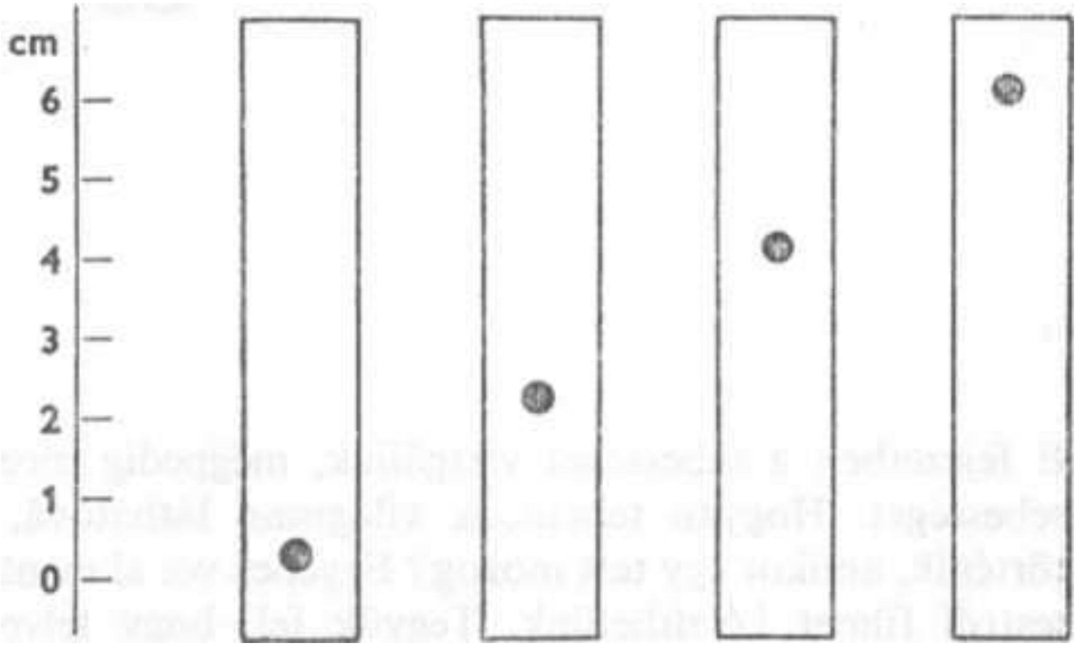
MÁSODIK FEJEZET – Ismerkedés a sebességgel

E fejezetben a sebességet vizsgáljuk, mégpedig mozgó testek sebességét. Hogyan tehetnénk világosan láthatóvá, hogy mi történik, amikor egy test mozog? Egyenes vonal mentén mozgó testről filmet készíthetünk. Tegyük fel, hogy felvevőgépünk minden tizedmásodpercben készít egy felvételt. Helyezzük a felvételeket sorra egymás mellé úgy, ahogyan az 1. ábrán láthatók. Hogyan mozog ez a test? Minden tizedmásodpercben 1 centiméterrel feljebb kerül. Úgy látszik, hogy másodpercenkénti 10 centiméteres állandó sebességgel halad.



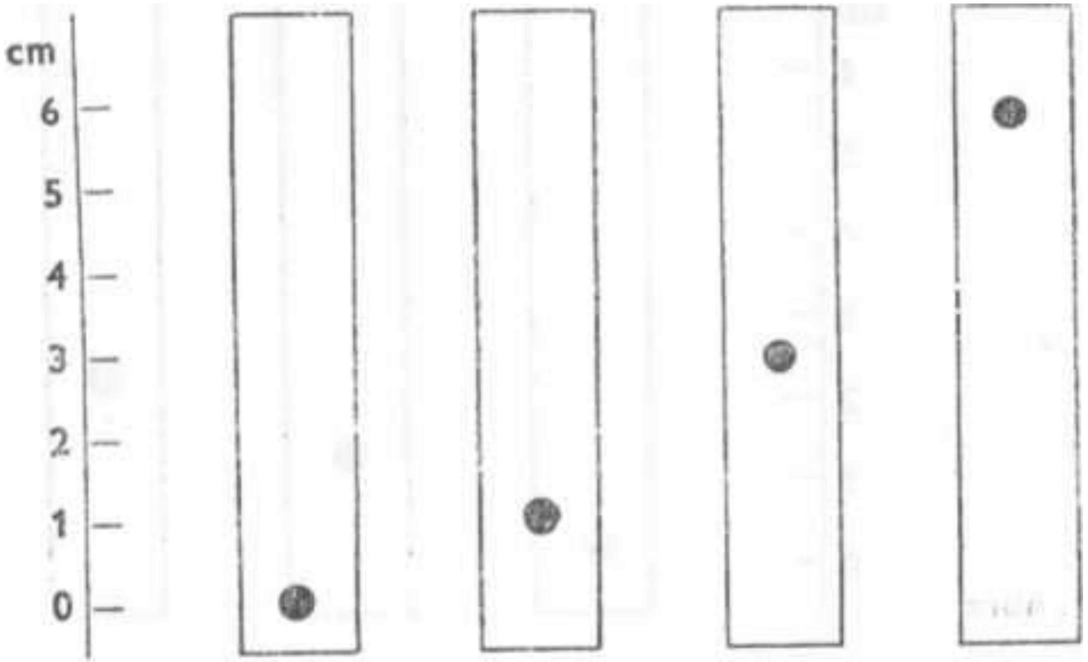
1. ábra – Mozgások

Egy más alkalommal a 2. ábrán látható képekhez jutunk. Itt a mozgó test minden egyes képe és az utána következő között 2 centimétert haladt. Sebessége másodpercenként 20 centiméter.



2. ábra – Mozgások

Vizsgáljunk meg most egy változó sebességű testet. Tegyük fel, hogy egy test gyorsul, mondjuk az első és második kép között megtett 1 centimétert, a második és harmadik között 2 centimétert, a harmadik és negyedik között 3 centimétert. A mozgásról készült felvételek a 3. ábrán láthatók.

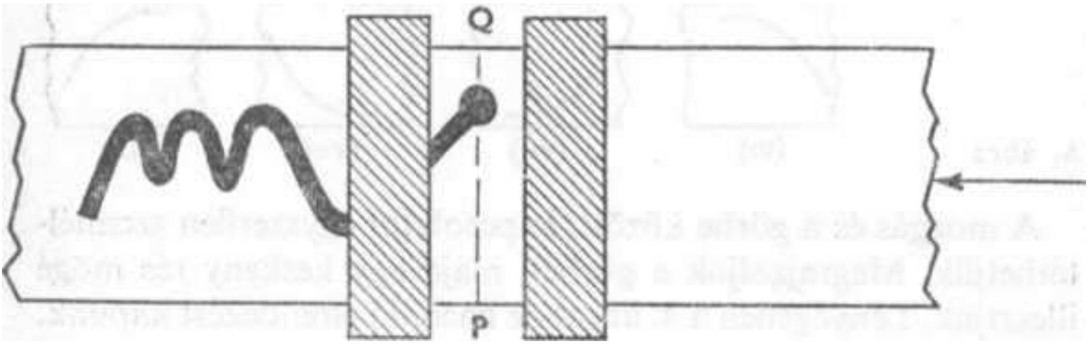


3. ábra – Mozgások – gyorsulás

Máris megfigyelhetjük, hogy a pontok (1) állandó sebesség esetén egy egyenesen, (2) gyorsuló mozgás esetén egy görbén helyezkednek el.

***1**. feladat.* Az 1. és 2. ábrában a pontok állandó sebességű mozgást ábrázolnak. Az ábrák megfigyelése alapján hogyan tudnánk megállapítani, hogy melyik test mozgott gyorsabban? Válaszunkban nem kell számoknak szerepelnie. Egyetlen szempillantás alatt megmondhatjuk, melyik gyorsabb. Hogyan? (Minél meredekebb az egyenes, annál gyorsabban mozog a test.)

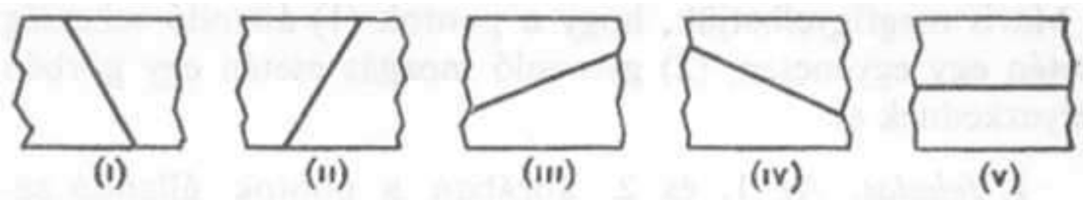
Maga a mozgó test is elkészítheti a mozgás képét. A 4. ábrán látható test a *PQ* egyenes mentén mozog felfelé és lefelé. A közvetlenül alatta levő papírlap állandó sebességgel jobbról balra mozog. A testet befestjük, hogy nyomot hagyjon a papíron. Ha a test sebessége állandó, akkor nyomvonala egyenes lesz.



4. ábra – A mozgás nyoma

***2**. feladat.* Feleltessük meg egymásnak az 5. ábrán látható felvételeket és az alábbi leírásokat:

(a) Gyorsan mozog felfelé. ....(II)
(b) Lassan mozog felfelé. ...(III)
(c) Nyugalmi állapotban van. ...(V)
(d) Lassan mozog lefelé. ....(IV)
(e) Gyorsan mozog lefelé. ....(I)

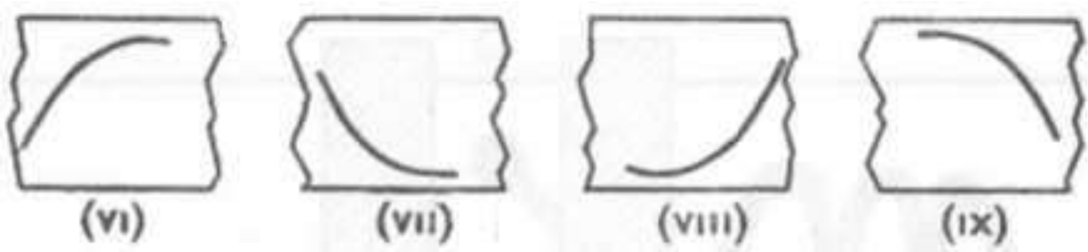


5. ábra – Mozgások

***3**. feladat.* Feleltessük meg egymásnak a 6. ábrán látható felvételeket és az alábbi leírásokat.

(f) Nyugalmi állapotból indul, felfelé fokozatosan növekvő sebességgel. ... (VIII)
(g) Gyorsan halad felfelé, majd fokozatosan megáll. ... (VI)
(h) Nyugalmi állapotból indul, lefelé fokozatosan növekvő sebességgel. ... (IX)

(i) Gyorsan esik lefelé, majd fokozatosan lassulva megáll. ... (VII)



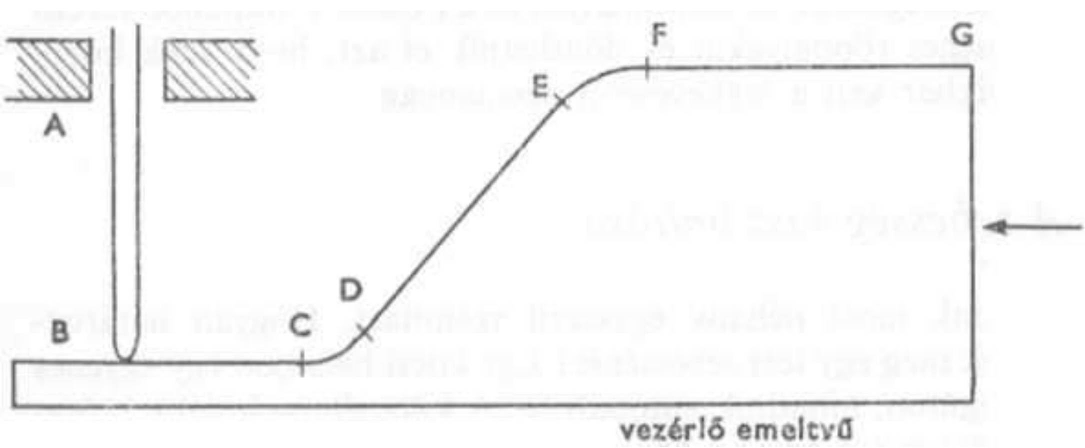
6. ábra– Görbék

A mozgás és a görbe közötti kapcsolatot egyszerűen szemléltethetjük. Megrajzoljuk a görbét, majd egy keskeny rés mögé illesztjük. Lényegében a 4. ábrához hasonló elrendezést kapunk. A résen keresztül a görbének csak egy kis részét látjuk. A papírt mozgatva az a benyomásunk, hogy egy emelkedő és süllyedő pontot látunk.

Van ennek egy műszaki alkalmazása. Ha olyan tárgyat akarunk készíteni, amely előírt módon viselkedik, akkor alkalmas vezérlő emeltyűt készítünk.

A 7. ábrán például a vezérlő emeltyű egyenletes tempóban balra halad. Az *AB* pálca nyugalmi helyzetben marad addig, amíg a *C* pont eléri B-t, ekkor növekvő sebességgel felfelé halad, amíg a *D* pont eléri B-t. Amikor a *DE* egyenes szakasszal érintkezik, akkor a pálca egyenletes sebességgel felfelé halad, majd az *EF* görbével érintkezve sebessége egyre csökken, végül az *FG* szakaszt elérve újra nyugalmi helyzetbe kerül.

Az 5., 6. és 7. ábrákon láthatóakhoz hasonló görbék megkönnyítik számunkra a mozgások közötti eligazodást. A görbe segítségével határozottan el tudjuk képzelni a mozgást.



7. ábra – Görbék

Amit eddig csináltunk, az már az analízis vizsgálódási körébe tartozik. Az analízis a sebesség tanulmányozásával kezdődik. A sebesség vizsgálata a fenti görbékhez vezetett. Ezeket a görbéket leírhatjuk a sebesség fogalmával. Például, a (VIII) görbéről azt mondhatjuk, hogy olyan mozgást ír le, amelynek során a test mind gyorsabban és gyorsabban mozog felfelé. Így az analízis nemcsak a *mozgások* leírására, hanem a *görbék alakjának* leírására is felhasználható. Valójában már a kezdet kezdetén mindkét célra alkalmazták az analízist. Kepler az 1609–1619 közötti években felfedezte a Föld és a bolygók Nap körüli mozgásának pályáját, valamint azt, hogy a bolygók sebessége hogyan változik keringésük során. Isaac Newton az 1665 – 1687 közötti években már bizonyítani tudta, hogy ha a Nap a távolság négyzetének reciprok értékével arányosan fejti ki vonzó hatását, akkor a bolygóknak így kell mozogniuk. Így az analízis segítségével számot adott mind a sebességekről, mind a görbékről. Igen nagy hatással volt az emberekre az, hogy a naprendszer bonyolult viselkedése visszavezethető három vagy négy egyszerű feltevésre – a Newton-féle mozgástörvényekre és a Newton-féle tömegvonzási törvényre. Newton törvényei és az analízis csillagászati alkalmazásai különös érdeklődésre tarthatnak számot napjainkban, amikor nemcsak nézhetjük a Marsot, hanem lesznek közöttünk olyanok, akik el is jutnak oda. Az analízis segítségével számíthatjuk ki a Földtől a Marshoz vezető lehetséges röppályákat és dönthetjük el azt, hogy ezek közül melyikhez kell a legkevesebb üzemanyag.

A sebesség kiszámítása

Lássunk most néhány egyszerű számítást. Hogyan határozhatjuk meg egy test sebességét? Egy kocsi haladjon egy egyenes országúton, mondjuk autópályán. A kilométerszámláló 2 órakor 70 km-t, 5 órakor 220 km-t mutat. Tegyük fel, hogy a kocsi végig állandó sebességgel mozgott (ami a gyakorlatban nagyon valószínűtlen!). Milyen gyorsan haladt? A kérdés nem nehéz. Ha a 220-ból kivonjuk a 70-et, látjuk, hogy a kocsi 150 km-t tett meg. Ha az 5-ből kivonjuk a 2-t, látjuk, hogy ehhez 3 órára volt szüksége. A 150-et 3-mal elosztva 50-et kapunk. Így a sebesség 50 km/ó.

E példánál nem annyira az eredmény kiszámítása volt a cél, hanem inkább a *módszer* megismerése. Ezt a módszert felhasználva szeretnénk formulát kapni a sebességre. Vezessünk be néhány jelölést. Legyen a kilométerszámláló állása t órakor s km. Így $t = 2$ azt jelzi, hogy az idő 2 óra volt, $s = 70$ pedig azt, hogy az eddig megtett összes út 70 km volt. Az előbbi feladatban szereplő adatokat ilyen táblázatban rendezhetjük el:

t	2	5
s	70	220

Szakadjunk el a 2, 5, 70, 220 számoktól, keressünk olyan formulát a sebességre, amely bármely két időpontra és bármely két távolságra alkalmazható. Vezessünk be néhány további jelölést.

Általánosított probléma

„A kilométerszámláló a órakor p km-t mutat. A kilométerszámláló b órakor q km-t mutat. A kocsi állandó sebességgel mozog. Határozzuk meg a kocsi v km/ó sebességét."

Ugyanazokat a lépéseket kell végrehajtanunk, mint az előbbi példában, de az egyes számokat a megfelelő jelekkel helyettesítjük. Ahol az előbb 2 állt, oda most a kerül; az 5 helyét a b, a 70 helyét a p, a 220 helyét a q foglalja el. Táblázatunk a következő:

t	a	b
s	p	q

Az előbb azzal kezdtük, hogy 220-ból kivontunk 70-et: most vonjunk ki q-ból p-t. A kocsi $q–p$ km utat tett meg. Mennyi időre volt szüksége ehhez? Az előbb 5-ből kivontunk 2-t, most vonjunk ki b-ből a-t. A kocsi $b–a$ óráig volt úton. A sebességet úgy kapjuk meg, hogy a megtett kilométerek számát elosztjuk az eltelt órák számával. Ebből a következőt kapjuk:

$$(1)\ \textit{formula}\quad v = \frac{q-p}{b-a}.$$

Nem szabad megfeledkeznünk arról, hogy formulánk csak akkor érvényes, ha a kocsi végig ugyanolyan gyorsan haladt, azaz ha állandó sebességgel mozgott.

Tegyük fel például, hogy egy kocsi vezetője egy óra alatt 50 km-t tett meg. Ezután három órát étkezéssel, pihenéssel töltött, majd amikor észrevette, hogy eltelt az idő, egy órán át 150 km/ó sebességgel vezetett, és ekkor balesetet okozott. Nem volna igaza, ha ezt mondaná: „5 órát töltöttem úton és 200 km-t tettem meg, a sebességem így csak 40 km/ó lehetett. A baleset tehát nem az én hibámból történt.” A baleset pillanatában a sebességmérő 150 km/ó-t mutatott. Ezt a sebességmérő által *egy adott időpillanatban* mutatott értéket értjük sebességen. Ha vezetőnk például egy évig nem használta volna kocsiját, akkor azt is mondhatnánk, hogy egy év alatt csak 200 km-t tett meg, ami óránként 0,023 km-nek felel meg. Ezt az érvelést mindenki nevetségesnek találná. Azért hangsúlyozom ezt, mert sok diák pontosan így gondolkozik, amikor az analízissel foglalkozik. Emlékszik az (1) formulára, ami annyira egyszerű, hogy még olyan helyzetekben is ezt alkalmazza, amikor egészen nevetséges eredményekhez vezet.

Az (1) formula csak akkor alkalmazható, ha egy test állandó sebességgel halad. Ha a sebesség csak kicsit változik, akkor az (1) formula nem adja meg ugyan a pontos sebességet, de elfogadható becslést ad rá. Ha egy kocsi sebessége egy másodperc alatt nem sokat változik, és megmérjük az egy másodperc alatt megtett utat, akkor az (1) formulából *elfogadható becslést* kapunk a kocsi sebességére. Az analízisben ilyen eljárást alkalmazunk. Főként olyan esetekkel találkozunk, amelyekben a sebesség állandóan változik. Ha egyszerűen az (1) formulát alkalmaznánk, akkor teljesen rossz eredményeket kapnánk. Az (1) formulát ezért a sebesség *becslésére* alkalmazzuk, és egyre rövidebb és rövidebb időközöket véve próbálunk valamilyen következtetésre jutni.

Negatív sebesség

Az (1) formulából még állandó sebesség esetén is kaphatunk furcsa eredményt. Képzeljük el, hogy a kocsi *visszafelé* megy. Kocsik esetében ez ritkán vagy sosem fordul elő, így példánk némiképp irreális. A tudományokban azonban gyakran találkozhatunk ilyen helyzetekkel; például ha feldobunk egy követ, akkor az egy ideig emelkedik, utána lefelé esik. Amikor esik, akkor éppúgy visszatér kiinduló helyzetébe, mint amikor egy kocsi tolat. Tegyük fel, hogy egy kocsi több órán át állandó sebességgel tolat. Milyen lehet a kocsi mozgásának táblázata? Valami ilyesmi:

t	3	5
s	80	60

A kocsi 3 órakor 80 km-re volt garázsától, 5 órakor csak 60 km-re. Az eltelt idő 2 óra, a kocsi ezalatt 20 km-t haladt visszafelé, tehát nyilván 10 km/ó sebességgel tolatott.

Milyen eredményt ad az (1) formula? Helyettesítsük be az

$$a = 3, b = 5, p = 80, q = 60$$

értékeket. Így a következőt kapjuk:

$$v = \frac{q-p}{b-a} = \frac{60-80}{5-3} = \frac{-20}{2} = -10.$$

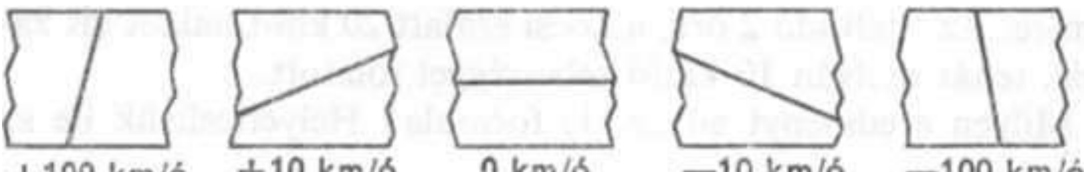
Tudjuk, hogy a kocsi 10 km/ó sebességgel tolatott. A formulából a $v = -10$ értéket kaptuk.

Kétféle álláspontra helyezkedhetünk:

(1) „Lehetetlen, hogy negatív sebességet kapjunk. A sebesség nem lehet nullánál kisebb. Ha a kocsi tolat, más formulát kell alkalmazni. Az (1) formula erre az esetre nem alkalmazható."

(2) „Az (1) formulát minden állandó sebességgel mozgó testre alkalmazzuk. Ha az (1) formula negatív értéket ad, akkor tudjuk, hogy a test visszafelé mozog."

A (2) álláspont sokkal járhatóbbnak látszik, mint az (1). Ha az (1) álláspontot követnénk, munkánk megkétszereződne; külön szabályt kellene alkalmaznunk a felfelé és a lefelé mozgó testekre. A (2) álláspont lehetővé teszi, hogy egyetlen formulával dolgozhassunk. Ha a végén negatív eredmény adódik, tudjuk, mit értsünk azon. A gyakorlatban az autók sebességmérője csak akkor mutat valamilyen sebességértéket, ha a kocsi *előre* mozog. Amit most csinálunk, inkább ahhoz hasonlít, ami egy hajón történik, ha a kapitány a „teljes gőzzel előre" és „teljes gőzzel hátra" utasításokat adja ki. Elképzelhetünk persze olyan kocsit is, amelynek sebességmérője a nullán túl – 5 km/ó-t mutat, ha a kocsi 5 km/ó sebességgel tolat, – 10 km/ó-t mutat, ha a kocsi 10 km/ó sebességgel tolat stb. Könyvünkben azonban nem lesz különösebb jelentősége a sebesség előjelének. A 8. ábrán példaként különböző mozgásokról készült felvételek láthatók.



8. ábra – Különböző mozgásokról készült felvételek

A változás mértékei

Az autó sebessége a kilométerek száma növekedésének mértéke. A sebesség a megtett távolság változásának mértéke. Az analízis azzal foglalkozik, hogy milyen gyorsan változnak a dolgok. Nemcsak a távolság változhat. Kérdezhetjük azt is, hogy „Milyen gyorsan gazdagszik meg egy ember?” vagy „Milyen gyorsan telik meg egy kocsi tartálya benzinnel?” Ezek változások mértékei – a bankszámla változásának mértéke; a tartályban levő benzin mennyisége változásának mértéke.

A kényelem kedvéért a „***[...] változásának mértéke***” kifejezésre bevezetünk egy *rövidítést*. Igen egyszerű jelet fogunk alkalmazni, az **’** jelet. Ha valamilyen mennyiség mértéke *f*, akkor **f'** azt jelenti, hogy **ez a mennyiség milyen mértékben változik** (**f'**-t „***f-vessző***”-nek olvassuk).

Például, ha egy gyerek n éves korában h cm magas, akkor h' azt jelenti, hogy milyen mértékben növekszik (h' egysége cm/év).

- Ha egy autó t óra alatt s km-t tesz meg, akkor s' azt jelenti, hogy milyen mértékben növekszik a megtett kilométerek száma; s' valójában az autó sebessége (s' egysége km/ó).
- Ha t másodperc eltelte után a tartályban g liter benzin van, akkor g' a tartály töltődésének mértéke (g' egysége liter/sec.).
- Ha valakinek n éves korában m dollárja van, akkor m' vagyona növekedésének mértéke (m' egysége dollár/év).

Itt is megjegyezzük, hogy $m’$ nem ugyanaz, mint m/n. Ha valakinek 30 éves korában 3000 dollárja van, akkor ebből egyáltalán nem következik, hogy vagyona évente 100 dollárral növekszik. Csak akkor következtethetnénk erre, ha tudnánk, hogy születése óta minden évben ugyanannyi pénzt tett félre. Az is elképzelhető viszont, hogy 27 éves koráig egy centje sem volt, és az utolsó három évben 1000–1000 dollárt tudott megtakarítani. Ebben az esetben m' értéke 1000 lenne. Az is elképzelhető, hogy az utóbbi időben rossz az anyagi helyzete és évente 500 dollár vesztesége van. Ebben az esetben $m' = -500$. m' azt méri, ami **éppen most** történik.

Ha egy kocsi t óra alatt s kilométert tesz meg, akkor s' a kocsi sebessége km/ó-ban. Most sem igaz, hogy $s' = s/t$. Abból, hogy 3 órája vezetek és 150 kilométert tettem meg, senki sem tudja megállapítani, hogy *ebben a pillanatban* milyen gyorsan vezetek. Az s' értékét csak a sebességmérőről lehet leolvasni. Lehet, hogy éppen kilencvennel megyek. Ebben az esetben $s = 150$, $t = 3$, $s' = 90$. Lehet, hogy éppen megálltam. Ebben az esetben $s = 150$, $t = 3$, $s' = 0$. Lehet, hogy 10 km/ó sebességgel tolatok. Ekkor $s = 150$, t = 3, $s' = -10$.

Az eltelt idő és a megtett út ismeretében semmit sem mondhatunk a mozgás gyorsaságáról. Ezt azért hangsúlyozzuk, mert az iskolában általában begyakoroltatják, hogy „sebesség egyenlő út osztva idővel”. Ez ***csak állandó** sebesség esetében* van így. Az analízis lényege azonban a változó sebességek tanulmányozása: a földre leeső labda, a földről induló rakéta mozgásának vizsgálata.

s' tehát az a szám, amelyet a sebességmérő az egyes időpillanatokban mutat.

Példák. Fordítsuk le az analízis nyelvére:

(1) Amikor 5 órája utaztam, 250 kilométert tettem meg és 80 km/ó sebességgel vezettem.

Megoldás. Ha t = 5, akkor $s = 250$ és $s' = 80$.

(2) Amikor két órája vezettem, 50 km/ó-t, amikor 3 órája vezettem, 45 km/ó-t mutatott a sebességmérő.

Megoldás. Ha $t = 2$, akkor $s' = 50$, ha $t = 3$, akkor $s' = 45$.

(3) Az első két órában állandóan 60 km/ó sebességgel vezettem.

Megoldás. Minden 0 és 2 közötti t értékre $s' = 60$.

A sebesség meghatározása egyszerűbb esetekben

Bizonyos esetekben a sebességet aritmetikai úton is meghatározhatjuk. Ezek az esetek persze nem túlságosan izgalmasak; érdekes eredmények olyan problémákból adódnak, amelyekhez új módszerekre van szükség. Az egyszerű esetek vizsgálata azonban alkalmat ad arra, hogy megszokjuk az s' jelrendszert.

Tegyük fel, hogy kocsim kilométerszámlálója nulláról indul és egy bizonyos ideig óránként 10 kilométeres állandó sebességgel vezetek. A kilométerszámláló állását az egyes időpillanatokban az alábbi táblázat adja meg:

t	0	1	2	3	4
s	0	10	20	30	40.

Itt a szabály: $s = 10t$. Mekkora s'? Azt mondtuk, hogy a sebességem állandóan 10 km/ó volt és s' a sebességet méri. Így

$s' = 10$. Írjuk fel ezt formálisan.

A eredmény.

Ha

$$s = 10t,$$

akkor

$$s' = 10.$$

Sebességem egész idő alatt 10 km/ó. Az s' = 10 formula nem egyszerűen azt jelenti, hogy egy adott időpillanatban s' = 10, hanem azt, hogy s' értéke a mozgás folyamán minden időpillanatban 10. Az s = 10t formula a mozgás szabálya: megtudjuk belőle, hogy a különböző időpillanatokban hol található a kocsi. Ha azt kérdezzük, hogy hol van a kocsi 1 1/2 óra múlva, akkor a t = 1 1/2 helyettesítéssel az s = 10t formulából az s = 15 értéket kapjuk. Az s' = 10 formula is ilyen szabály, ebből azt tudhatjuk meg, hogy a különböző időpillanatokban mekkora a kocsi sebessége. A formula szerint a sebesség mindig 10.

Fenti példánk az analízis egyik legelső problémája: adott egy formula, amely minden időpillanatban megadja egy test helyzetét, keressünk olyan formulát, amely minden időpillanatban megadja a sebességet.

Gyakorlatok

1. Kocsim kilométerszámlálója induláskor nullát mutatott. 20 km/ó állandó sebességgel vezetek. Milyen képlettel írható le a kocsi helyzete a különböző időpillanatokban? Mekkora a kocsi sebessége a különböző időpillanatokban? Mindkét kérdésre egyenlettel válaszoljunk. (Megoldás: s = 20t. s' = 20.)

2. Kocsim helyzetét az s = 30t egyenlet írja le. Mit mutat a kilométerszámlálóm, ha t = 0?, ha t = 1 ?, ha t = 2?, ha t = 3? Mekkora a kocsi sebessége? Milyen egyenlet adja meg s'-t?

(Megoldás:

t	0	1	2	3
s	0	30	60	90

A sebesség 30 km/ó. s' = 30.)

3. Kocsim helyzetét az $s = 40t$ egyenlet adja meg. Írjuk fel a kocsi sebességét megadó egyenletet! (Megoldás: s' = 40.)

4. Fejezzük be a következő mondatot: „Ha $s = 50t$, akkor s'..." (Megoldás: 50.)

5. Ha k tetszőleges rögzített számot jelent (az előző példákban sorra k = 20, 30, 40, 50) és $s = kt$, akkor $s' = \ldots$? (Megoldás: k.)

Eddigi példáinkban a kilométerszámláló mindig nulláról indult. Ez azonban nem lényeges. Tekintsük például az s = 10t+3 szabályt. Ennek táblázata a következő;

t	0	1	2	3	4
s	3	13	23	33	43.

Itt a kilométerszámláló induláskor 3-at mutatott. A táblázat azt mutatja, hogy a kocsi minden órában 10 kilométert tett meg. A sebesség 10 km/ó, és így $s' = 10$. Így látjuk, hogy

B eredmény.

Ha

$$s = 10t + 3,$$

akkor

$$s' = 10.$$

Gyakorlatok

A fentiekhez hasonló módon határozzuk meg a következő szabályokhoz tartozó s' sebességeket:

$$(1)\ s = 10t + 5,\ (2) s = 10t + 7,\ (3)\ s = 10t + 9.$$

Ha s = 10t + c, ahol c tetszőleges rögzített érték, akkor mekkora az s'?

(Megoldás:

(1) 10 (2) 10 (3) 10.

Ha s = 10t + c, akkor s' = 10.)

Határozzuk meg a következő szabályokhoz tartozó s' értékeket: (4) s = 20t + 3, (5) s = 20t + 5, (6) s = 20t + 7, (7) s = 20t + 9. Mire következtethetünk ezekből a példákból?

(Megoldás:

(4) 20 (5) 20 (6) 20 (7) 20.

Következtetés: Ha s = 20t + c, akkor s' = 20.)

Fel tudnánk írni közvetlenül az alábbi szabályokhoz tartozó sebességeket: (8) s = 30t +7, (9) s = 50t + 9, (10) s = 40t + 23, (11) s = 30t + 20, (12) s = 50t + 150?

Ha az itt vizsgált mozgásokhoz olyan grafikonokat készítenénk, mint amilyenek az 1–8. ábrákon láthatók, milyenek lennének ezek a grafikonok?

(Megoldás:

(8) 30 (9) 50 (10) 40 (11) 30 (12) 50.

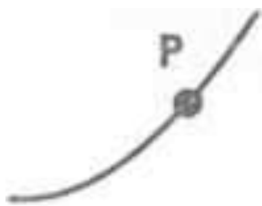
A grafikonok egyenesek. Ha a skálát rögzítjük, akkor minél nagyobb az s' sebesség, annál meredekebb egyenest kapunk. Ha különböző szabályok ugyanazt a sebességet adják, mint az (1), (2) és (3) esetekben, akkor az egyenesek párhuzamosak.)

HARMADIK FEJEZET – A változó sebesség legegyszerűbb esete

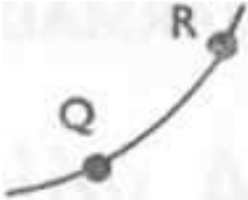
Pillanatnyi sebesség

Az állandó sebességű mozgás nagyon egyszerű. Az igazi probléma a változó mozgás vizsgálata.

Hangsúlyozzuk, hogy olyan v vagy s' mennyiséget keresünk, amely *egy adott pillanatban* méri a mozgás sebességét. A mindennapi életben ezt nagyon egyszerűnek találjuk: rápillantunk a kocsi sebességmérőjére. Ha a mutató a 60 km/ó-t jelez, akkor tudjuk, hogy ebben a pillanatban 60 km/ó sebességgel haladunk. Ha elkezdjük vizsgálni, mit is jelent ez tulajdonképpen, akkor egy paradoxonba ütközünk. A sebesség fogalma – úgy látszik – *két* időpontot tartalmaz, egy időköz kezdetét és végét. A mozgó test bizonyos idő alatt megtett útját figyeljük. Ha ez az idő nulla volna, akkor a test által megtett út is nulla volna. Bármilyen gyorsan is haladunk, az ugyanabban a pillanatban készített két felvételen ugyanott vagyunk. Ha az (1) formula segítségével úgy próbáljuk a pillanatnyi sebességet meghatározni, hogy a és b értékét azonosnak választjuk, akkor p és q is azonos lesz és a sebességre 0/0 adódik – amivel nem sokra megyünk.

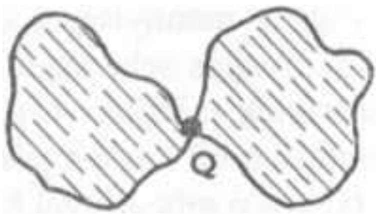


9. ábra

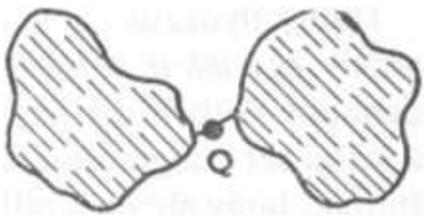


10. ábra

A testek mozgásának leírására görbéket is alkalmazunk. A gyorsan mozgó testnek meredek vonal, a lassan mozgónak enyhébb emelkedésű vonal felel meg (5. és 6. ábrák). Így kérdésünket a görbékre vonatkoztatva is megfogalmazhatjuk. „Mekkora ebben a pillanatban a sebesség?” helyett azt is kérdezhetjük, hogy „Milyen meredek a görbe a *P* pontban?” (lásd a 9. ábrát). Ez ésszerű kérdésnek látszik. Egyetérthetünk például abban, hogy a 10. ábrán látható görbe az *R* pontban meredekebb, mint a *Q* pontban. De képzeljük, hogy a görbét letakarjuk és csak a *Q* pontot látjuk (11. ábra). Most fogalmunk sem lehet, hogy *Q* pontban milyen meredek a görbe. Mozdítsuk el a görbét letakaró lapokat, hogy látható legyen a görbe *Q* körüli kis része (12. ábra).



11. ábra – Fedett pontok

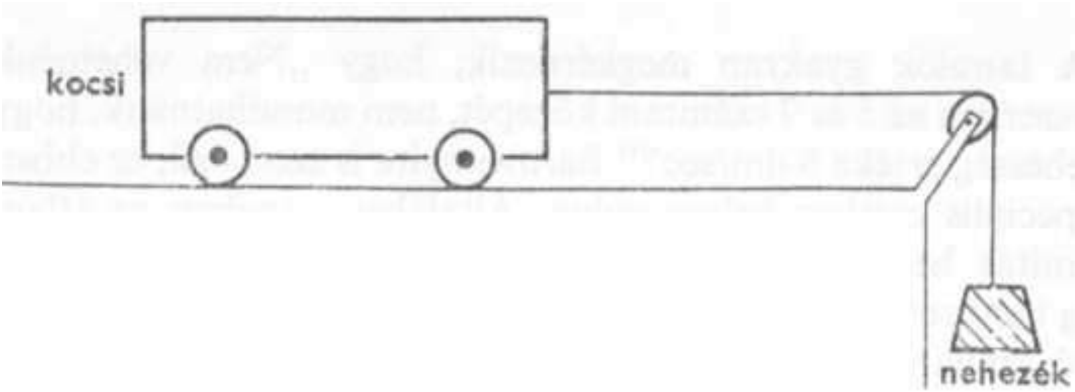


12. ábra

Most már látjuk, hogy a *Q* pontban milyen meredek a görbe. Nem számít, hogy mekkora részt látunk a görbéből, csupán az a fontos, hogy *Q* mindkét oldalán lássunk belőle valamennyit.

Gyorsuló mozgás

Vizsgáljunk meg most egy speciális változó sebességű mozgást. Nézzük meg, hogyan számítható ki bármely időpillanatban a mozgás sebessége. Az ilyen típusú mozgásokat rendszerint a mechanikai tanulmányok elején szokták vizsgálni, és nagy jelentőségük van a fizikában. Így mozog például a 13. ábrán látható szerkezet.



13. ábra – A kocsi mozgása

Ki lehet számítani, hogy ha például a kocsi tömege 50 dkg, akkor a nehezéknek 1 dkg-nál valamivel nagyobbnak kell lennie ahhoz, hogy a mozgást a következő táblázat írja le.

t	0	1	2	3	4
s	0	1	4	9	16

ahol az időt másodpercekben, a megtett utat deciméterekben mértük. (Ezeket az értékeket Newton II. törvénye alapján kaptuk. Ha a kocsi tömege M, a súly tömege m, és a súrlódástól eltekintünk, akkor a kocsi gyorsulása a = mg / (M+2m), ahol g = 98,1 dm/sec^2. A nehezék tömegét akkor tudjuk pontosan megadni, ha ismerjük a súrlódási együtthatót is.) A táblázathoz nyilván az

$$s = t^2$$

szabály tartozik.

A táblázatból látjuk, hogy a mozgás valóban „gyorsuló". Az első másodpercben t = 0 és t = 1 között a kocsi csak 1 dm-t haladt. A második másodpercben t = 1 és t = 2 között azonban már 3 dm, t = 2 és t = 3 között 5 dm (ugyanis 5 = 9 – 4), t = 3 és t = 4 között 7 dm utat tett meg (ugyanis 7=16-9). Ezek a számok összhangban vannak azzal az érzésünkkel, hogy a kocsi gyorsul, a nehézségi erő hatására egyre gyorsabban és gyorsabban mozog.

Próbáljunk most becslést adni, mondjuk a t = 3 időponthoz tartozó pillanatnyi sebességre. A kiválasztott időpont előtti másodpercben, t = 2 és t = 3 között a kocsi 5 dm utat tett meg, a következő másodpercben, t = 3 és t = 4 között 7 dm utat tesz meg. Ésszerű sejtésnek látszik, hogy a t = 3 pillanatban a sebesség értéke 5 dm/sec és 7 dm/sec között van.

A tanulók gyakran megkérdezik, hogy „Nem vehetnénk egyszerűen az 5 és 7 számtani közepét, nem mondhatnánk, hogy a sebesség értéke 6 dm/sec?" Bármennyire is szomorú, ez ebben a speciális esetben helyes volna. Általában azonban az átlagszámítás helytelen eredményhez vezet, jóformán sosem adja meg helyesen a pillanatnyi sebességet, csak akkor, ha a mozgást leíró szabály

$$s = at^2 + bt + c$$

alakú. Később látni fogjuk, hogy a *s* = t^3 szabály esetében az átlagolás valóban hibás eredményhez vezet.

Ezek szerint el kell vetnünk azt a sejtést, hogy a pillanatnyi sebesség értéke példánkban 5 és 7 között pontosan középen van, csupán annyit mondhatunk, hogy a sebesség értéke *valahol* 5 és 7 között van.

Hogyan szűkíthetnénk ezt a rést? Korábban megegyeztünk abban, hogy minél rövidebb időközt veszünk, annál pontosabb becslést kapunk a sebességre. Jó ötletnek látszik, hogy vegyünk rövidebb időintervallumot. A *t = 3* előtti és utáni másodperc helyett próbálkozzunk meg a t = 3 előtti és utáni fél másodperccel. Az *s* = t^2 formulába behelyettesítve a következő kis táblázatot kapjuk:

t	2 $^1/_2$	3	3 $^1/_2$
s	6 $^1/_4$	9	12 $^1/_4$

Mi hasznunk lehet ezekből a fél másodpercekből? A t = 2 1/2 és *t* = 3 közötti fél másodpercben *s* értéke 6 1/4-ről 9-re növekedett, vagyis a kocsi 2 $^3/_4$ dm utat tett meg. A két és háromnegyed deciméter 1/2 másodperc alatt 2 $^3/_4$: $^1/_2$, vagyis *5* $^1/_2$ dm/sec sebességet sugall.

A t = 3 utáni fél másodpercben a kocsi 12 1/4 – 9, vagyis 3 1/4 dm utat tett meg. A három és negyed deciméter 1/2 másodperc alatt 3 1/4 : 1/2 vagyis 6 1/2 dm/sec sebességet sugall.

Így azt gondolhatjuk, hogy a pillanatnyi sebességnek 5 1/2 dm/sec és 6 1/2 dm/sec között kell lennie.

De miért ne vehetnénk egyre rövidebb és rövidebb intervallumokat, hogy mind jobb és jobb becsléseket kapjunk?

Ha a $t = 3$ időpont előtti és utáni egytized másodperceket vesszük, akkor az $s = t^2$ formula felhasználásával a következő kis táblázatot kapjuk:

t	2,9	3	3,1
s	8,41	9	9,61

A $t = 3$ előtti tized másodpercben a kocsi 0,59 dm-t haladt, a sebesség értékére így 0,59:0,1 = 5,9 dm/sec-et kapunk. A $t = 3$ utáni tized másodpercben a kocsi 0,61 dm-t haladt, itt a sebesség 0,61:0,1 = 6,1 dm/sec. Így azt gondolhatjuk, hogy a pillanatnyi sebesség értékének 5,9 dm/sec és 6,1 dm/sec között kell lennie.

Pontosan ugyanezzel a módszerrel a $t = 3$ előtti és utáni század másodperceket véve, arra a meggyőződésre juthatunk, hogy a pillanatnyi sebességnek 5,99 dm/sec és 6,01 dm/sec között kell lennie. A másodperc ezredrészét véve azt találjuk, hogy a pillanatnyi sebesség értékének 5,999 dm/sec és 6,001 dm/sec között kell lennie.

Eredményeinket a következő táblázatban foglalhatjuk össze:

Az alábbi időintervallumokat véve	Arra a meggyőződésre jutottunk, hogy a v pillanatnyi sebesség dm/sec egységben mérve az alábbi két érték közé esik:
1 másodperc	5 és 7
0,1 másodperc	5,9 és 6,1
0,01 másodperc	5,99 és 6,01

0,001 másodperc	5,999 és 6,001

Az utolsó becslésnél nagyon keskeny tartományba szorítottuk be v értékét, hiszen 5,999 és 6,001 csak 0,002-del különbözik egymástól. De miért állnánk meg a 0,001 másodperces időintervallumnál? Vehetünk milliomod, vagy akár billiomod másodperceket, és így v értékére még pontosabb becsléseket kapunk. Valójában semmi sem korlátozza, hogy milyen pontos becslést adunk v értékére. A fenti táblázat nagyon szembeszökően mutatja ezt. Úgy gondolom, most már mindenki tudja a táblázatot folytatni.

Gyakorlat

Becsüljük meg – számolás nélkül – a v sebesség 0,0001 és 0,00001 másodperces intervallumokhoz tartozó értékeit. Sejtéseinket ellenőrizzük számításokkal.

Meggyőződésem, hogy senkinek sem jelent különösebb nehézséget a táblázat folytatása. Minden következő sorban eggyel több kilencest találunk, a 5,99... 9-ben és eggyel több nullát a 6,00... 01-ben. A becslések egyre közelebb és közelebb kerülnek egymáshoz. Minden egyes becslés hagy valamennyi bizonytalanságot v értéke körül, még akkor is, ha ez a bizonytalanság nagyon kicsi. Ha azonban az *összes* becslést figyelembe vesszük, akkor a bizonytalanság eltűnik. Csak egy olyan szám van, amely akárhány kilencest írva is nagyobb, mint 5,999 ...9, és akárhány nullát írva is kisebb, mint 6,000 ...01. Ez a szám a 6.

Így, bár a sebesség becsléséről beszéltünk, és a becslések rendszerint tartalmaznak hibát vagy bizonytalanságot, itt a végeredményben már nincs bizonytalanság. Egyedül a becslések által jobbról és balról közrefogott 6 elégít ki minden becslést.

Az aritmetikai számítások tehát azt mutatják, hogy ha egy test az $s = t^2$ szabály szerint mozog, akkor a $t = 3$ időpontban a sebessége $v = 6$.

Ugyanezzel az eljárással most már mindenki maga is ki tudja számítani a t=l, t = 2, t = 4, t = 5 pillanatokhoz tartozó v sebességértékeket. Az így kapott értékeket megfigyelve valamilyen szabályt vehetünk majd észre.

Biztosnak kell lennem abban, hogy az olvasó megértette ezt a módszert, amellyel meg lehet határozni a tetszőleges adott t értékhez tartozó v sebességet. Az iskolában mindig vannak olyan tanulók, akik a módszer lényegét azonnal megértik, de akadnak olyanok is, akiknek többször kell elmondani. Ezért azoknak az olvasóimnak, akiknek szükségük van rá, megpróbálom világosabbá tenni a módszert. Fontos, hogy mindenki megértse ezt, mert munkánk következő szakaszában csak ennek birtokában fedezheti fel önállóan az analízis első eredményeit; sokkal elégedettebb és magabiztosabb lesz az, aki maga fedezi fel, mint az, aki tőlem tudja meg.

Mindenekelőtt világosan kell látnunk, hogy milyen gondolat rejtőzik a módszer mögött. Az (1) formula, a „sebesség egyenlő út osztva idővel", csak állandó sebesség esetén alkalmazható. Ha a sebesség változik, akkor az út és idő hányadosa csak az *átlagsebességet* adja meg: A valóságos sebesség bármelyik pillanatban az átlagsebességnél több is, kevesebb is lehet. Ha egyre rövidebb és rövidebb időintervallumokat vizsgálunk, akkor a sebesség értéke egyre kevésbé tér el a valóságos sebességtől. A nagyon kis intervallumban vett átlagsebesség jó becslést ad a valódi sebességre.

Másrészt jó, ha az olvasó maga is el tudja végezni a konkrét számításokat. Érdemes először pontosan a 35–37. oldalakon leírtak mintájára a t = 2 időponthoz tartozó sebesség értékét meghatározni. Azután újra kezdhetjük: most határozzuk meg a $t = 4$ időponthoz tartozó v

értéket. Természetesen nem szabad megelégedni a számítások puszta elvégzésével, mindig végig kell gondolni, hogy mit csinálunk és miért csináljuk.

Ha meghatároztuk a $t = 1$, $t = 2$, $t = 4$ és $t = 5$ értékekhez tartozó v értékeket, akkor egészítsük ki a következő táblázatot:

t	1	2	3	4	5	
v	•	•	6	•	•	•

A táblázat kitöltése után megfigyelhetjük, hogy a v és t értékek között van valamilyen összefüggés, mégpedig a következő: v = ...

Azt ajánlom olvasóimnak, hogy ne olvassák tovább a könyvet, amíg ezt a feladatot sikerrel nem oldották meg.

A sebességre vonatkozó szabály

Aki pontosan elvégezte a számításokat, a következő táblázatot kapja:

t	1	2	3	4	5
v	2	4	6	8	10

A második sor minden száma pontosan kétszer akkora, mint a felette álló szám. A szabály tehát $v = 2t$ összefüggés. Ha a 28. oldalon bevezetett ' jelet alkalmazzuk, akkor v helyett s'-t írhatunk. Így a 31. és 32. oldalakon szereplő *A* és B eredmények mellé egy újat írhatunk:

C eredmény. Ha

$$s = t^2$$

akkor

$$s' = 2t.$$

Ez az igen egyszerű megállapítás bonyolult számítások eredménye. Rövidesen látni fogjuk, hogyan lehet ugyanezt jóval egyszerűbben megkapni. A hosszadalmas számolás azonban semmiképpen sem volt felesleges, mert meg lehet érteni belőle, hogy valójában mi is történik. Az analíziskönyvekben erre az eredményre rövid bizonyításokat szoktak adni, az olvasók gyorsan átsiklanak az algebra felett, és nem értik meg teljesen, hogy voltaképp mit is olvastak.

Nézzük meg most, hogyan használhatjuk fel az algebrát munkánk rövidítésére, és egyúttal hogyan teszi következtetéseinket meggyőzőbbé.

Amikor azt vizsgáltuk, hogy az $s = t^2$ szabály szerint mozgó test a $t = 2{,}99$ és $t = 3$ időpont között mennyi utat tett meg, akkor az a kellemetlen aritmetikai feladatunk volt, hogy meg kellett határoznunk 2,99 négyzetét. Ezt az algebra segítségével egyszerűbben is megtehetjük. Az algebra közismert azonossága szerint

$$(2)\ \text{formula}\ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Az $a = 3$, $b = -0{,}01$ helyettesítéssel $a + b = 2{,}99$. Így a (2) formulából a következőt kapjuk:

$$2{,}99^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot (-0{,}01) + 0{,}01^2 =$$
$$= 9 - 0{,}06 + 0{,}0001 =$$
$$= 8{,}9401.$$

Ezt a módszert alkalmazva kevesebbet kell számolnunk, mint a szokásos elemi aritmetikai eljárás esetén, és a hibalehetőség is kisebb.

Az algebrának azonban nagyobb haszna is van, mint a számítások rövidebbé tétele. A 37. oldalon az 5, 5,9, 5,99 és 5,999 számokból álló oszlopot vizsgáltuk, és megsejtettük, hogyan folytatható ez az oszlop.

Az algebra jelöléseit alkalmazva elkerülhetjük a találgatást. Ahelyett, hogy egyenként vizsgálnánk a

- ❖ 3 és 3 + 0,1 közötti,
- ❖ 3 és 3 – 0,1 közötti,
- ❖ 3 és 3 + 0,01 közötti,
- ❖ 3 és 3 – 0,01 közötti stb.

intervallumokat, megfigyelhetjük, hogy mindezek a

3 és 3 + *h* közötti

intervallum speciális esetei. Az egyes eseteket úgy kaphatjuk meg, hogy *h* helyébe rendre a 0,1 – 0,1, 0,01, –0,01 stb. értékeket helyettesítjük be. Mivel *h* helyébe ugyanígy 0,000001 vagy 0,000000 001 is helyettesíthető, dolgozhatunk milliomod vagy billiomod másodperces intervallumokkal, vagy akármilyen kicsikkel, mindezt egy csapásra, egyetlen algebrai számítással.

Valósítsuk meg ezt a gondolatot. Célunk a t = 3 időponthoz tartozó sebességérték meghatározása. Vizsgáljuk meg a $t=3$ és $t=3+h$ közötti intervallumot. Először meg kell állapítanunk, hogy hol van a mozgó test ezekben az időpontokban. A test helyzetét az $s = t^2$ formula adja meg. Ha t = 3, akkor $s = 9$. Ha $t = 3 + h$, akkor $s = (3 + h)^2 = 9 + 6h + h^2$. Így a következő táblázatot kapjuk:

t	3	$3 + h$
s	9	$9 + 6h + h^2$.

Ezután az „út osztva idővel” szabály alkalmazásával megkapjuk a sebesség közelítő értékét. Mennyi utat tett meg a test a vizsgált időintervallumban? Számítsuk ki az *s* sorában álló kifejezések különbségét. A test a vizsgált időintervallumban $6h + h^2$ deciméterrel mozdult el. Milyen hosszú volt ez az időintervallum? Számítsuk ki a *t* sorában álló kifejezések különbségét. Az intervallum hosszúsága *h* másodperc. A *v* sebességre vonatkozó becslést osztással kapjuk meg:

$$\frac{6h + h^2}{h}.$$

A kifejezést lehet egyszerűsíteni. Mivel

$$6h + h^2 = h \cdot (6 + h),$$

ezért mindkét oldalt *h*-val elosztva a következőt kapjuk:

$$\frac{6h + h^2}{h} = 6 + h.$$

Gyakorlat

A fenti kifejezésben helyettesítsük be *h* helyébe rendre az 1,–1; 0,1, –0,1; 0,01,–0,01 értékeket, és ellenőrizzük, hogy a kapott eredmények megegyeznek-e a 37. oldalon található értékekkel (*h* pozitív értékei az egyik oszlopot, negatív értékei a másik oszlopot adják meg).

Amikor *h* pozitív, akkor a $t = 3$ után egy kis intervallumot vizsgálunk. A becslés szerint $v = 6 + h$, ami csak egy kicsivel több, mint 6.

Amikor *h* negatív, akkor a $t = 3$ előtt egy kis intervallumot vizsgálunk. A becslés szerint *v* ekkor csak egy kicsivel kevesebb, mint 6. (Például, ha $h = -0{,}01$, akkor a becslés $6 + h$, vagyis $6 + (-0{,}01)$, ami éppen 5,99; egy kicsivel kevesebb, mint 6.)

Minél kisebb intervallumot veszünk, becslésünk annál jobban megközelíti a 6 értéket. Így arra a következtetésre jutunk, hogy

$$v = 6.$$

Ily módon az algebra segítségével meghatároztuk a $t = 3$ időponthoz tartozó sebességet. De a 3 semmilyen különleges tulajdonsággal sem rendelkezik, bármelyik más számra is elvégezhetnénk ezeket a számításokat. Most újból segíthet az algebra: bevezethetünk egy „tetszőleges számot” jelentő jelet és így meghatározhatjuk a tetszőleges t értékhez tartozó v értéket.

Tegyük fel most, hogy a $t = a$ időpontra szeretnénk meghatározni a sebességet, ahol a „tetszőleges számot” jelent. A számításokat pontosan a $t = 3$ eset mintájára végezhetjük el. Lépésről lépésre ugyanazt csinálhatjuk, mint az előbb, csak 3 helyett mindig a-t kell írnunk.

Gyakorlat

Mielőtt továbbmennénk, próbáljuk meg elvégezni ezt a számítást.

A következő táblázatot kapjuk:

t	a	$a + h$
s	a^2	$a^2 + 2ah + h^2$.

Az időintervallum alatt megtett út az s sorában levő két kifejezés különbsége; a megtett út $2ah + h^2$ deciméter. Az időt a t sorában levő két érték különbsége adja meg. Ez az idő h másodperc. Osztással a következő becslést kapjuk a v sebességre:

$$\frac{2ah + h^2}{h}.$$

Ezt egyszerűsíthetjük:

$$2a + h.$$

Itt h a vizsgált időintervallum hosszúságát adja meg másodpercekben. Minél rövidebb ez az intervallum, annál pontosabb becslést kapunk v értékére. Amint h egyre kisebb és kisebb lesz, $2a + h$ közeledik $2a$-hoz. Arra a következtetésre jutunk tehát, hogy

$$v = 2a.$$

Így ha $t = a$, akkor $v = 2a$. Szavakban: „Ha t bármilyen szám, v kétszer akkora, mint ez a szám." Eredményünk megegyezik a 40. oldalon szereplő sejtésünkkel. Ott azonban csak az 1, 2, 3, 4, 5 számokra mutattuk meg ezt. Az algebra segítségével beláthattuk, hogy t *minden* értékére $v = 2t$. Természetesen a nemcsak egész szám lehet; az algebra törvényei törtekre és irracionális számokra is érvényesek.

Bizonyára van, akiben felmerül a kérdés: miért volt szükségünk az a szám bevezetésére, miért nem írtuk a $t = a$, $v = 2a$ kifejezések helyett egyszerűen a $v = 2t$ formulát?

Ennek oka az, hogy először a $t = a$ *és* $t = a + h$ közötti h másodperces időintervallumot vizsgáltuk. Ha el akartuk volna kerülni az a alkalmazását, $t = t$ *és* $t = t + h$ közötti intervallumról kellett volna beszélnünk, ami bizony elég furcsán hangzott volna.

Egy hasznos jelölés

A mozgások elemzése során gyakran használunk olyan kifejezéseket, mint „hol van egy test egy adott pillanatban”, vagy mint az ennek megfelelő „mennyi egy adott *t* értékhez tartozó *s* érték” algebrai kifejezés. Kényelmes volna, ha bevezetnénk erre egy rövidítést. A „t = *a* értékhez tartozó *s* érték” kifejezés rövidítésére az *s(a)* jelölést fogjuk alkalmazni. Így például a

t	0	1	2	3
s	0	1	4	9

táblázatban a $t = 3$ értéknek az $s = 9$ érték felel meg; sok helyet megtakarítunk, ha ezt röviden $s(3) = 9$ alakban írjuk fel. Ugyanebben a táblázatban s(0) = 0, s(1) = l, s(2) = 4.

Amikor sebességeket vizsgálunk, *a* $t = a$ *és* $t = a + h$ közötti időintervallumot tekintjük. Azt vizsgáljuk, hogy hol van a mozgó test ennek az időintervallumnak a kezdetén és a végén. Helyzetét az *s* értéke adja meg. A $t = a$ időponthoz tartozó *s* értéket most $s(a)$ alakban, a $t = a + h$ időponthoz tartozó *s* értéket $s(a + h)$ alakban írhatjuk fel.

Így ebben az időintervallumban a test $s(a + h) - s(a)$ utat tesz meg. Az idő $(a + h) - a = h$ másodperc. Ezek szerint ebben az intervallumban az átlagsebesség

$$(3)\ formula\quad \frac{s\,(a + h) - s(a)}{h}$$

deciméter másodpercenként.

Hogyan határozzuk meg a sebességet?

Most már le tudjuk írni azokat a lépéseket, amelyek alapján megtaláltuk a sebességre vonatkozó szabályt. Az eljárás leírásával az a célunk, hogy az $s = t^2$ szabályon kívül másokra is alkalmazzuk azt.

(1) Először t segítségével megadtuk az s-et kifejező formulát.
(2) Ezután megvizsgáltuk, hogy a $t = a$ és $t = a + h$ időpontok közötti intervallumban mekkora az átlagsebesség. Így a fenti (3) formulában megadott

$$\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$$

kifejezést kaptuk.
(3) A következő lépésben h értékét egyre kisebbre vettük, így h nullához közeledett. Ekkor észrevettük, hogy az

$$\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$$

egy bizonyos értékhez közeledett.
(4) Úgy tekintettük, hogy ez az érték a $t = a$ időponthoz tartozó sebesség.

Jelöléseinkkel ezt az értéket $v(a)$ vagy $s'(a)$ alakban írhatjuk, ugyanis ez adja meg a $t = a$ időponthoz tartozó v vagy s' értéket.

Negyedik fejezet – Magasabb hatványok

Hosszú oldalakon át részletesen tanulmányoztuk az $s = t^2$ szabályt. Ezt tettük azért, mert $s = t^3$, $s = t^4$ vagy bármelyik magasabb hatvány esetén pontosan ugyanúgy lehet meghatározni a sebességet. Remélem, hogy olvasóim az alábbi gyakorlatok alapján önállóan is meg tudják határozni az s'-kre vonatkozó szabályokat.

Gyakorlatok

1. Az $s = t^3$ szabály alapján töltsük ki az alábbi táblázat üres rovatait.

t 1 1,001 2 2,001 3 3,001 4 4,001 5 5,001

s

A feladat egyszerűbbé válik, ha csak három tizedesjegy pontossággal számolunk. A táblázat alapján adjunk becslést a $t = 1, 2, 3, 4, 5$ értékekhez tartozó sebességértékekre. *(Útmutatás*. Mindegyik sebességérték egész szám.) Milyen szabály olvasható ki ezekből az értékekből? (Aki nem tudja kitalálni a szabályt, lapozzon vissza a 15. oldalra.) *Következtetés:* ha $s = t^3$, akkor $v = s' = ...$

(Megoldás:

t:

1	1,001	2	2,001	3	3,001	4	4,001	5	5,001

s:

1__1,003__4__8,012__27_27,027___64__64,048__125__125,075

(Megoldás: Lásd a 48. oldalt.)

3. Határozzuk meg az $s = t^4$ szabályhoz tartozó sebességet azzal a módszerrel, amelyet könnyebbnek találunk. (Megoldás: Lásd a 48. oldalt.)

4. Az $s = t^2$ sebesség szabályát az előző fejezetekben már meghatároztuk; aki válaszolt az 1., 2. és 3. kérdésekre, az már tudja az $s = t^2$, $s = t^4$ szabályokhoz tartozó sebesség szabályokat is. Vizsgáljuk meg ezeket az eredményeket. Vajon milyen szabály érvényes az $s = t^5$ esetre?, az $s = t^6$ esetre?, az $s = t^n$ esetre, ahol n tetszőleges egész szám? Sejtésünk igaz-e az $n = 1$ esetre? (Megoldás: $5t^4$; $6t^5$; nt^{n-1}. Lásd a 49. oldalt.)

Az $s = t^n$ szabály

Remélem, hogy az 1. feladatból mindenki arra a következtetésre jutott, hogy ha $s = t^3$, akkor $s' = 3t^2$. A 2. feladatban algebrai úton ugyanezt az eredményt kellett kapnunk. Táblázatunk a következő;

t	a	$a + h$
s	a^3	$a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3$.

Így v értékére az alábbi becslést kapjuk:

$$\frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} = 3a^2 + 3ah + h^2.$$

Ha h közeledik a nullához, akkor a $3ah$ és h^2 is közeledik a nullához. Így a fenti kifejezés értéke a $3a^2$ értékhez közeledik. Ezért, amint vártuk, ha $t = a$, akkor $v = 3a^2$.

A 3. feladatban az algebrai módszer jóval kevesebb munkával jár, mint az aritmetikai. Az $s = t^4$ szabály esetén a következő táblázatot kapjuk:

$\boldsymbol{t}$	a	$a + h$
s	a^4	$a^4 + 4a^3h + 6a^2h^2 + 4ah^3 + h^2$,

és ebből v értékére a következő becslés adódik:

$$\frac{4a^3h + 6a^2h^2 + 4ah^3 + h^4}{h} = 4a^3 + 6a^2h + 4ah^2 + h^3.$$

Ha h a nullához közeledik, akkor a $4a^3$ kivételével mindegyik tag a nullához közeledik, így helyes az a következtetés, hogy a $t = a$ időpontban a sebesség értéke: $v = 4a^3$. Így az $s = t^4$ szabályhoz tartozó sebességet az $s' = 4t^3$ szabály adja meg.

Gyűjtsük össze eddigi eredményeinket:

***s* szabálya:**	t^2	t^3	t^4
***s'* szabálya:**	$2t$	$3t^2$	$4t^3$

Megfigyelhetjük, hogy az s' szabályában a t kitevője mindig eggyel kisebb, mint az s szabályában. Például, ha $s = t^{17}$, akkor az s' szabályában t^{16} szerepel. Általában azt várjuk, hogy $s = t^n$ esetében az s' szabályában t^{n-1} fog szerepelni. A formulában szereplő másik számot még ennél is könnyebb megsejteni; látjuk, hogy $s = t^2$ esetén $s' = 2t$, $s = t^3$ esetén $s' = 3t^2$. Az s' formulában elöl szereplő szám éppen megegyezik az s kitevőjével. Így ha $s = t^{17}$ akkor azt várjuk, hogy $s' = 17t^{16}$. Sejthetjük már, hogy $s = t^n$ esetén $s' = nt^{n-1}$.

Ez a válasz a 4. feladatban feltett kérdésre. Eredményünk tehát a következő:

(4) *formula* – Ha $s = t^n$, akkor $s' = nt^{n-1}$

A 4. feladatban arról is szó volt, hogy ellenőrizzük sejtésünket az n = 1 esetre. Ha n = 1, akkor t^n egyszerűen *t, és* tudjuk, hogy $s = t$ az 1 sebességgel mozgó test szabálya, tehát s' csak 1 lehet. Vajon ezt kapjuk formulánkból is? Ha nem, akkor sejtésünk hibás. A (4) formulából $n = 1$ helyettesítéssel $s' = 1 * t^0$ adódik. Ebben a formulában t^0 szerepel. Bizonyára vannak olvasóim között olyanok, akik tudják, mit jelent ez, de lehetnek olyanok is, akik nem tudják, ezért jobb, ha röviden elmagyarázom. Tekintsük a következő kifejezéseket:

$$t^5, t^4, t^3, t^2, t, 1, 1/t, 1/t^2$$

Mindegyik kifejezés az előzőből *t*-vel való osztással keletkezett.

De ha a kitevőket nézzük, a sor elején az 5, 4, 3, 2 számokat látjuk. A kitevők mindig eggyel csökkennek. Ez azt sugallja, hogy kifejezéseinket

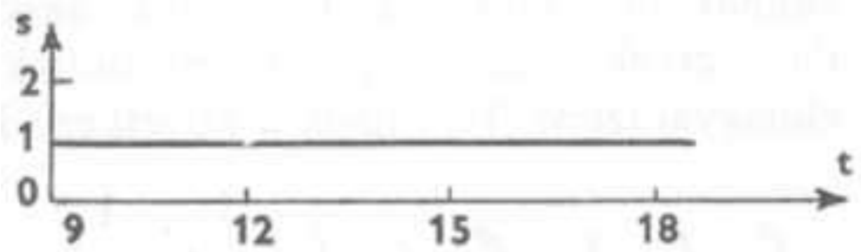
$$t^5, t^4, t^3, t^2, t^1, t^0, t^{-1}, t^{-2}$$

alakban is felírhatjuk. Ebből az látszik, hogy a t^0 kifejezés értéke 1 kell, hogy legyen. Ekkor $s' = 1 \cdot t^0$ értéke s' = 1*1 = 1.

A fenti okoskodással értelmet adhatunk a t^0, t^{-1} t^{-2} kifejezéseknek is. Vajon érvényes-e a (4) formula ezekre a kitevőkre is? Jó eredményhez jutunk-e, ha mondjuk az $n = 0$ vagy $n = -1$ értékeket helyettesítjük be a (4) formulába? Ez csupán sejtés, de próbáljuk ki.

A (4) formulából $n = 0$ helyettesítéssel a következőt kapjuk: „Ha $s = t^0$, akkor $s' = 0 \cdot t^{-1}$." Igaz-e, ez a kijelentés? Amint a fentiekben láttuk, t^0 jelentése 1, továbbá t^{-1} jelentése $1/t$, de ezzel nem is nagyon érdemes törődnünk, hiszen nullával szorozva úgyis nullát kapunk belőle. Így az eredmény nulla. (Felteszem, hogy t nem veszi fel a nulla értéket; ez ugyanis mindenféle bonyodalmakhoz vezetne.) Állításunk tehát a következő: „Az $s = 1$ szabály esetén $s' = 0$."

Mit jelent ez? Az $s' = 0$ összefüggés azt jelenti, hogy a test sebessége minden pillanatban nulla, vagyis a test nem mozog. Mit jelent az $s = 1$ szabály? Azt, hogy a test minden időpontban valamilyen rögzített helytől 1 távolságra van. Ha kocsimat egész nap a garázs ajtajától 1 deciméterre tartom, akkor bizonyára nyugalomban van. Mozgásának grafikonja a 14. ábrán látható. A grafikon nem emelkedik és nem süllyed, meredeksége nulla: $s' = 0$.



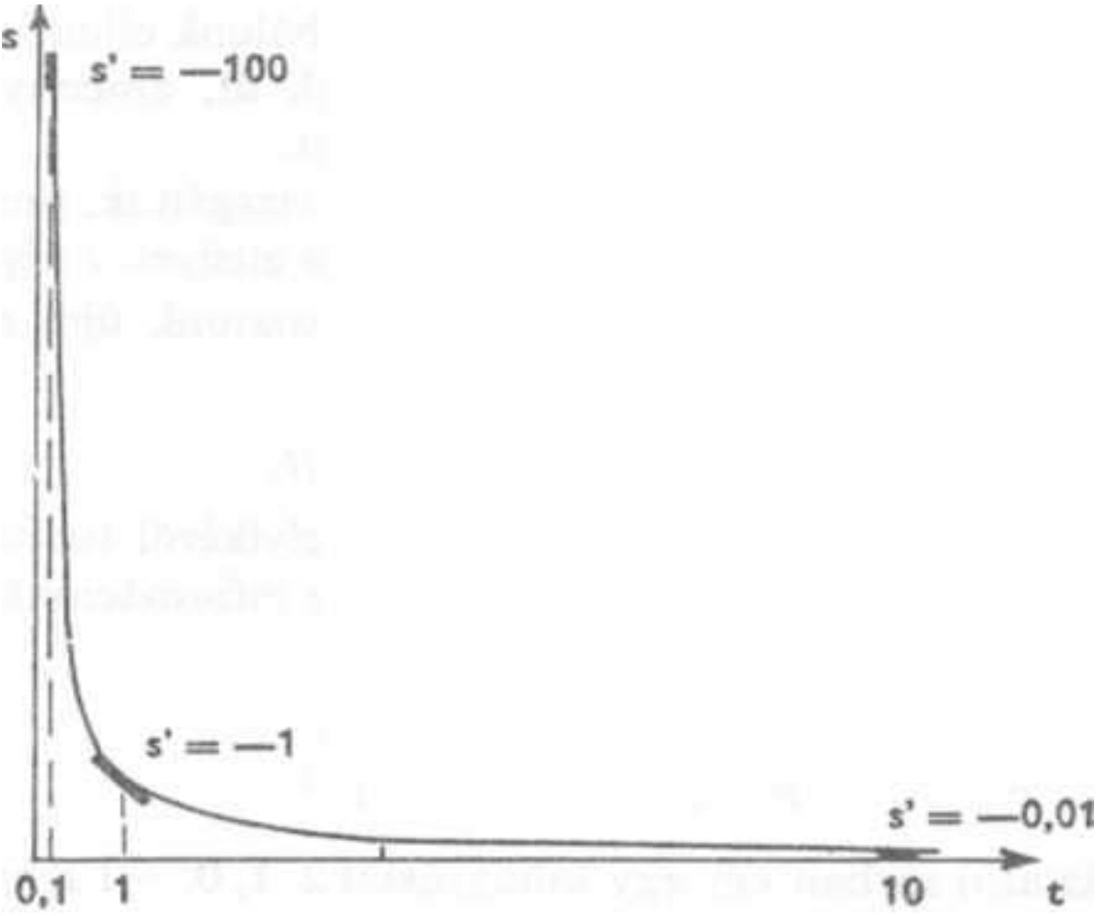
14. ábra – Nincs mozgás

Mit mondhatunk az $n = -1$ esetről? Ha az alábbi két sorozatot

$$t^5, t^4, t^3, t^2, t, 1, 1/t, 1/t^2$$

$$t^5, t^4, t^3, t^2, t^1, t^0, t^{-1}, t^{-2}$$

összehasonlítjuk, észrevesszük, hogy t^{-1} ugyanazt jelenti, mint $1/t$, és t^2 azt jelenti, mint $1/t^2$. A (4) formulából $n = -1$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy az $s = t^1$ mozgás sebessége a következő: $s' = (-1) \cdot t^2$. Ezt és t^2 jelentésének felhasználásával át lehet fogalmazni. Így a következőt kapjuk: az $s = 1/t$ (szabálynak az $s' = -1/t^2$ sebesség felel meg. Igaz ez? Az $s = 1/t$ grafikonja pozitív t értékekre a 15. ábrán látható. A grafikon eleinte nagyon gyorsan süllyed, később egyre lassabban. Végig csökkenő, de egy idő után már olyan „lapos", hogy azt gondolhatnánk, nem is változik. Összhangban van-e ezzel a viselkedésmóddal az s'-re kapott formula? A grafikon végig csökkenő. Ez azt jelenti, hogy s' értékének mindig negatívnak kell lennie, és ez valóban így is van. Bármilyen t értéket választunk is, $s' = -1/t^2$ mindig negatív lesz.



15. ábra – Csökkenés

A görbe eleinte igen gyorsan csökken. Nézzük meg például a $t = 0,1$ értéket. Ekkor $t^2 = 0,01$ és $1/t^2 = 100$. Így ha $t = 0,1$, akkor $s' = -1/t^2 = -100$, és ilyen meredeken csökkenő grafikon esetében ilyen értéket várhattunk is. Később elérjük a t = 1 értéket. Ekkor $s' = -1/t^2 = -1$. Ez már, ahogyan vártuk, lassabb csökkenést jelent. Még később eljutunk a t = 10 értékhez. Ekkor $s' = -1/t^2 = -1/100 = -0{,}01$. Ez pedig – szintén várakozásunknak megfelelően – alig észrevehető csökkenésnek felel meg.

Sejtéseink, úgy látszik, beigazolódtak. Először: t^n-t értelmezni tudjuk, akkor is, ha $n = -1$, $n = -2$, másodszor a (4) formula ilyen n értékek esetében is érvényes. Sejtéseink alapján előre meg tudtuk mondani, hogy az $s = 1/t$ grafikonja különböző helyeken milyen meredek, és így kapott eredményeink összhangban voltak a valóságos grafikonnal.

A matematikában gyakran alkalmazunk ilyen eljárást – többbet feltételezünk, mint amennyire szigorúan véve jogunk van. Tudjuk, hogy egy módszer bizonyos körülmények között alkalmazható, aztán kipróbáljuk, hátha más körülmények között is ugyanúgy alkalmazható; addig próbálunk eljutni a szabályunkkal, amíg olyan sok esetet fogunk át, amennyit csak lehet. Vigyük egy kicsit tovább ezt az elvet.

Amikor a t^5, t^4, t^3,... sorozatot vizsgáltuk, mindegyik lépésnél t-vel osztottunk. Mi történik, ha ehelyett t négyzetgyökének egy hatványát írjuk fel és $\sqrt{t}$*-vel* osztunk újra és újra? Ilyen sorozatot kapunk:

$$t^2,\ t\sqrt{t},\ t,\ \sqrt{t},\ 1,\ 1/\sqrt{t},\ 1/t,\ \ldots$$

A sorozatban szereplő tagok némelyikéről tudjuk, hogyan írhatók fel t^n alakban. Írjuk fel ezt az információnkat, és hagyjuk ki a még ismeretlen tagok helyét:

t^2	$t\sqrt{t}$	t	$\sqrt{t}$	1	$1/\sqrt{t}$	$1/t$
t^2	...	t^1	...	t^0	. . .	t^{-1}

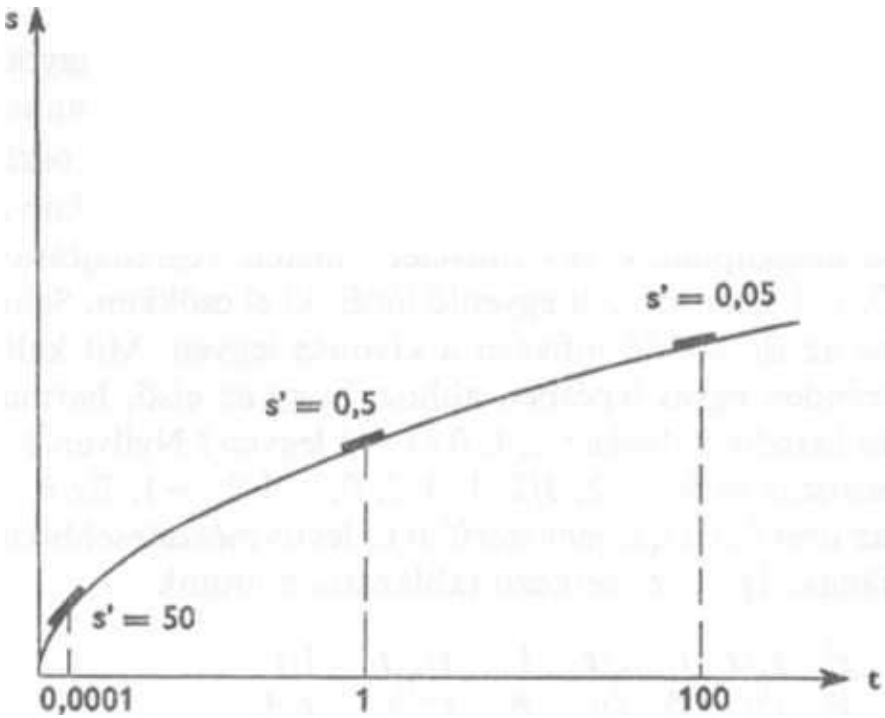
Az alsó sorban egy-egy kihagyással 2, 1, 0, – 1 számok szerepelnek. Milyen számok kerüljenek az üresen hagyott helyekre? A felső sorban szereplő számok mindig ugyanazon művelet eredményeképpen keletkeztek: osztunk $\sqrt{t}$-vel, osztunk $\sqrt{t}$-*vel*, osztunk $\sqrt{t}$-vel. Ez azt sugallja, hogy az alsó sorban álló számok is megkaphatók egy művelet ismételt végrehajtásával. A 2, 1, 0,-1 számsorozat egyenlő lépésekkel csökken. Sejtésünk, hogy ez az ismétlődő művelet a kivonás legyen. Mit kell kivonnunk minden egyes lépésben ahhoz, hogy az első, harmadik, ötödik és hetedik helyeken 2, 1, 0 és – 1 legyen? Nyilván 1/2-et, a teljes sorozat ez lesz: 2, 3/2, 1, 1/2, 0, –1/2, –1. Ez a sejtés látszik az üres helyek legegyszerűbb és legtermészetesebb kitöltési módjának. Így a következő táblázathoz jutunk:

t^2	$t\sqrt{t}$	t	$\sqrt{t}$	1	$1/\sqrt{t}$	$1/t$
t^2	$t^{3/2}$	t^1	$t^{1/2}$	t^0	$t^{-1/2}$	t^{-1}

Most már tudjuk, mit jelentsen a t^n kifejezés, ha *n* helyébe a 3/2, 1/2, – 1/2 értékek valamelyikét írjuk.

Próbáljuk ki a (4) formulát az *n* = 1/2 érték esetében. Helyes eredményt kapunk? A (4) formula szerint ha $s = t^{1/2}$, akkor $s' = (1/2)/^{-1/2}$, vagyis ha $s = \sqrt{t}$, akkor $s' = (1/2)\,(1/\sqrt{t}) = 1/(2/\sqrt{\ })$. Helyes ez az eredmény? *Az* $s = \sqrt{t}$ grafikonja pozitív *t* értékekre a 16. ábrán látható.

A grafikon alapján mit várunk az s' sebességre? A grafikon végig emelkedik; azt várjuk, hogy s' minden pozitív *t* érték esetén pozitív lesz. Ez így is van, ha $s' = 1/(2\sqrt{t})$. A grafikon eleinte gyorsan emelkedik, később lassabban, végül meredeksége nagyon kicsivé válik. Így sejtjük, hogy s' eleinte nagy lesz, később kisebb, végül egészen kicsi. Az $s' = 1/(2\sqrt{t})$ formula összhangban van ezekkel az elképzelésekkel. Ha például a t = 0,0001 értéket vesszük, akkor $\sqrt{t}$ = 0,01 és s' = 50, ha t = 1, akkor s' = 1/2, végül ha t = 100, akkor $\sqrt{t}$ = 10 és s' = 1/20 = 0,05.



16. ábra

Úgy látszik, hogy a (4) formulát alkalmazva akkor is helyes eredményre jutunk, ha *n* tört vagy negatív szám. Ez valóban igaz, és be is lehet bizonyítani. A bizonyítással itt nem próbálkozunk meg. Szigorú, logikus bizonyítás esetén egészen más sorrendben közelítenénk meg a dolgokat, mint ahogyan itt tettük. Nem tapogatódzva haladnánk az x^2 és x^3 hatványoktól az x^{-1} és $x^{1/2}$ felé, hanem megadnánk x^n-nek egy olyan definícióját, amely egyaránt érvényes a 2 vagy –1 vagy 1/2 vagy $\sqrt{2}$ vagy π értékekre. Ebből a definícióból kellene levezetnünk a (4) formulát úgy, hogy egyszerre foglalkozunk az összes lehetséges esettel. Ez a bizonyítás felhasználná az analízis bizonyos fogalmait. Az olvasó valószínűleg nem látná a bizonyítás célját, hacsak nem foglalkozott már korábban is analízissel. Mivel nem kívánunk pontos bizonyítást adni, jobbnak látszik, ha nem mondunk olyan jól hangzó érvelést, amely bizonyításnak látszik, de valójában mégsem az. Jobb, ha nyíltan megmondjuk – felállítottunk néhány sejtést, és megpróbáltuk megmutatni, hogy sejtéseink helyes eredményekhez vezetnek. Sejtéseink valóban helyesek. (A tárgy iránt komolyabban érdeklődők számára le kellene írnom a bizonyítás gondolatmenetét. Az integrálszámítás segítségével definiálható a log x és ebből levezethetők a log x és num log x tulajdonságai. Ekkor x^n definíció szerint num log $(n \log x)$.)

A középiskolai algebra anyagban a $t^{1/2}$, és t^{1} jelölésekkel általában akkor találkoznak a tanulók, amikor az analízisről még semmit sem hallottak. A törtkitevőket és a negatív kitevőket így meglehetősen értelmetlennek és célszerűtlennek találhatják. Az eddigiekből láthatjuk, miért fontosak az ilyen kitevők. A t^2, $1/t$, $\sqrt{}/t$ kifejezések teljesen különböző alakúak. Ha meg akarjuk határozni az ezekhez tartozó sebességeket, azt gondolhatnánk, hogy három, egészen különböző feladatot kell megoldanunk. De ha eleget tudunk a kitevőkről és felismerjük, hogy ezek a kifejezések t^2, t^{-1}, $t^{1/2}$ alakban írhatók, akkor a három, látszólag különböző kérdés egyetlen problémává egyesül – mindegyik speciális esete annak, hogyan határozzuk meg az $s = t^n$ szabályhoz tartozó s' sebességet. A (4) formula mindezekre választ ad: mindhárom probléma megoldását egy csapásra megkapjuk. Így a törtkitevőkkel és a negatív kitevőkkel kapcsolatos vizsgálataink hasznosnak bizonyultak; megmenekültünk attól, hogy erre a három esetre három különböző szabályt kelljen megtanulnunk. Az analízisben sokszor lehet ehhez hasonlóan munkát megtakarítani.

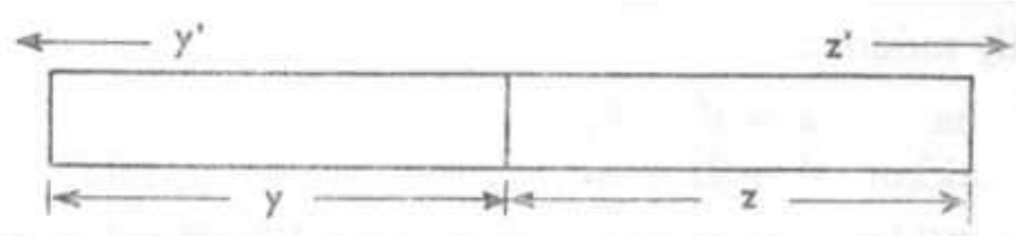
ÖTÖDIK FEJEZET – Eredményeink kiterjesztése

Tekintsünk vissza egy pillanatra, nézzük meg, mit tanultunk eddig. Nem sokat! Vizsgálódásaink jórészt általános kérdésekhez kapcsolódtak – hogy az analízis a sebességgel, a növekedés mértékével foglalkozik; hogy milyen bonyodalmak merülnek fel a változó sebesség tárgyalásakor; hogy a grafikonok segíthetnek problémáink szemléletesebbé tételében. Ha azt kérdezzük, hogy mit tanultunk meg egzaktul kiszámítani, akkor a válasz nagyon rövid – eljutottunk a (4) formulához. Megtanultuk, hogyan kell kiszámítani az $s = t^n$ szabálynak megfelelő s' sebességet. Ez minden.

Ritkán fordul elő azonban, hogy olyan egyszerű szabállyal kell foglalkoznunk, mint az $s = t^n$. A matematikában és fizikában általában jóval bonyolultabbakkal találkozunk. Mégis, az $s = t^n$ olyan építőkocka, amelynek felhasználásával sok bonyolultabb szabályt lehet készíteni. Például, a tömegvonzás hatására szabadon eső test mozgását $s = 5t^2$ formula írja le, ahol az időt másodpercekben, az utat méterekben mérjük. Ha egy követ 12 m/sec sebességgel feldobunk, akkor magasságát t másodperc múlva az $s = 12t - 5t^2$ formula adja meg. (Az $s = 5t^2$ és $s = 12t - 5t^2$ formulák valóságos kövek kísérleti megfigyeléseiből adódtak. A gyakorlatban bizonyos más kísérleteket szoktak végezni, ebből megsejtik a mechanika általános törvényeit, majd matematikai módszerekkel levezetik ezeket a speciális eredményeket.) Ezekben a formulákban nemcsak t hatványai szerepelnek. Csupán a (4) formula segítségével nem tudjuk meghatározni az s' sebességet; tudnunk kell, mit csináljunk a negatív előjellel, az $s = 12t - 5t^2$ formulában szereplő 12 és 5 számokkal, az $s = 5t^2$ formulában szereplő 5 számmal.

Hogyan válaszolhatnánk az olyan kérdésekre, mint „Mi s', ha $s = 5t^3 - 11t^2 - 8t + 9$?" Ilyen egyszerű kifejezések esetében könnyen meg lehet határozni az s' sebességet.

A 28. oldalon említettük, hogy az s' az s *növekedésének mértéke.* Képzeljünk el egy két részből álló rudat. Legyen az egyik rész y centiméter, a másik z centiméter hosszúságú (17. ábra).



17. ábra

Ezek a részek esetleg különböző fémekből készültek; a fémeket melegítjük, és így mindegyik rész kiterjed. Milyen formulával lehetne leírni a hosszúság növekedésének mértékét? Az első rész y centiméter hosszúságú, jelölje növekedésének mértékét y'. A z hosszúságú második rész növekedésének mértéke pedig legyen z'. Tegyük fel, hogy ismerjük az y' és z' értékeket. Hogyan határozhatjuk meg ebből a teljes rúd hossznövekedésének mértékét? Sokan az első pillanatban azt mondják, hogy „Össze kell adni a két rész növekedésének mértékét". Vagyis a teljes hosszúság növekedésének mértéke $y' + z'$. *Az egész növekedésének mértékét meghatározhatjuk úgy, hogy* ***összeadjuk a részek növekedésének*** *mértékét.*

Sokféleképpen szemléltethetjük ezt. Például, ha f-fel jelöljük a Földön élő férfiak számát, n-nel a nők számát, akkor természetes módon f' a férfiak száma növekedésének mértéke, n' a nők száma növekedésének mértéke. Ha az összes ember száma e, akkor $e = f + n$, és e növekedésének mértéke $e' = f' + n'$. Hasonlóan más példákat is készíthetnénk.

Jegyezzük meg tehát:

$$\text{(5) formula} \quad \begin{array}{ll} \text{Ha} & s = y + z, \\ \text{akkor} & s' = y' + z'. \end{array}$$

De az isten szerelmére, nehogy valaki bemagolja ezt a formulát! Ha néhányszor végiggondoljuk ezt az utat, amelyen idáig eljutottunk, akkor minden erőfeszítés nélkül emlékezni fogunk rá.

Alkalmazzuk ezt a gondolatot néhány példára. Mivel egyenlő s', ha $s = t^2 + t^3$? Itt s két részből áll, a t^2 és a t^3 összege. Először meghatározzuk e két rész növekedésének mértékét. Tudjuk, hogy t^2 növekedésének mértéke $2t$, t^3 növekedésének mértéke $3t^2$. Az egész növekedésének mértéke ezek összege. Ily módon:

$$\text{ha } s = t^2 + t^3,$$
$$\text{akkor } s' = 2t + 3t^2.$$

Példák. Határozzuk meg s'-t a következő esetekben.

(1) $s = t^2 + t^4$,
(2) $s = t^3 + t^6$
(3) $s = t^2 + t^5 + t^7$.

[Az utolsó feladatban nem alkalmazhatjuk közvetlenül az (5) formulát, egy lépéssel tovább kell vinnünk ugyanezt a gondolatot.]

Nagyon hasonló gondolatot alkalmazhatunk a mínusz jelet tartalmazó kifejezések esetén. Tegyük fel, hogy valakinek y dollár bankbetétje, és ugyanakkor z dollár adóssága van. Vagyona ekkor $y - z$ dollár. Milyen mértékben növekszik a vagyona, ha bankbetétje növekedésének mértéke y' dollár naponta, adóssága csökkenésének mértéke z' dollár naponta? A legtöbben minden probléma nélkül eljutnak az $y' - z'$ válaszhoz, és elfogadják, hogy

$$(5a)\ \textit{formula}\quad \begin{array}{ll} \text{Ha} & s = y - z, \\ \text{akkor} & s' = y' - z'. \end{array}$$

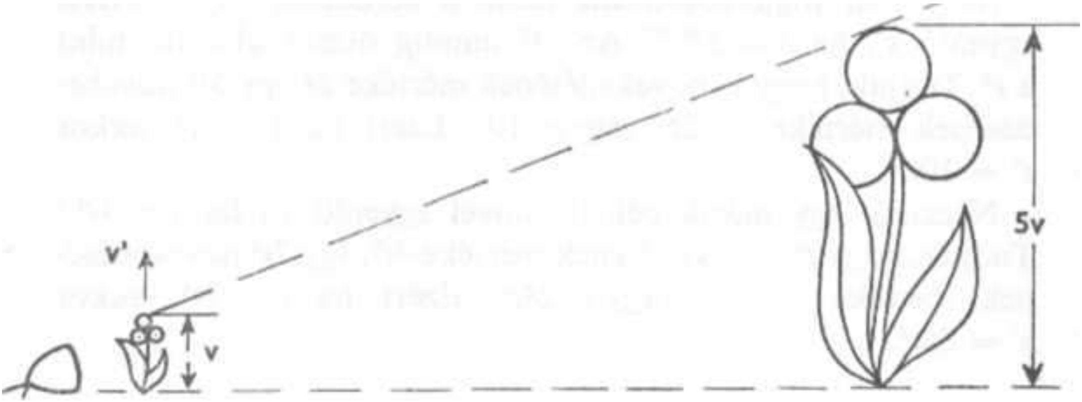
Ehhez hasonlóan foglalkozhatunk plusz és mínusz jelet tartalmazó formulákkal is. Például

$$\text{ha } s = t^2 - t^3 + t^4 + t^5 - t^6$$

$$\text{akkor } s' = 2t - 3t^2 + 4t^3 + 5t^4 - 6t^5.$$

Most már tudjuk, mit tegyünk, ha a $t^2 + t^3 - t^7$ kifejezéssel találkozunk, de $s = 5t^2$ vagy más hasonló kifejezés esetén nem tudjuk meghatározni az s'-t. Foglalkozzunk most ilyenekkel.

Képzeljünk el egy növekvő virágot és helyezzünk mellé egy lámpát úgy, hogy a virág árnyéka mindig a falra essen. Elhelyezhetjük a lámpát oly módon, hogy az árnyék mindig ötszöröse legyen a virágnak (18. ábra). Ha a virág magassága v centiméter, akkor az árnyék $5v$ centiméter magas lesz. A virág növekszik, v növekedésének mértéke v'. Milyen gyorsan növekszik az árnyék? Az árnyék mindig ötször akkora, mint a virág. Ha a virág 1 centimétert nő, árnyékának 5 centimétert kell növekednie. Látjuk tehát, hogy az árnyék pontosan ötször olyan gyorsan növekszik, mint a virág. Növekedésének mértéke tehát csak $5v'$ lehet. Így a következőt kaptuk:



18. ábra – A 'v' növekedése, virágos példa

ha *v* növekedésének mértéke *v*',

akkor 5*v* növekedésének mértéke 5*v*'.

Az 5 számnak nincs semmi különleges jelentősége. Ha a lámpát úgy helyeztük volna el, hogy az árnyék háromszor akkora legyen, mint a virág, akkor arra a következtetésre jutottunk volna, hogy

3 *v* növekedésének mértéke 3*v*',

és a lámpa helyzetét tovább változtatva látjuk, hogy

2*v* növekedésének mértéke 2*v*'

4*v* növekedésének mértéke 4*v*'

7*v* növekedésének mértéke 7*v*'.

Az aritmetikai kijelentéseknek ezt a sorozatát nyilvánvalóan helyettesíthetjük egyetlen algebrai kijelentéssel. Ha a többé-kevésbé találomra választott 5, 3, 2, 4, 7... számok helyett a *c* algebrai jelet használjuk, akkor a fenti kijelentéseket egyszerre le tudjuk írni:

(6) formula – Ha *v* növekedésének mértéke *v*',

akkor *c***v* növekedésének mértéke *c* * *v*'.

Itt c tetszőleges rögzített szám lehet, például 5, 3, 2, 4, 7 stb.

Most már foglalkozhatunk azzal a kérdéssel, hogy „Mivel egyenlő s', ha $s = 5t^2$?" Az $5t^2$ mindig ötször akkora, mint a t^2. Tudjuk, hogy t^2 növekedésének mértéke $2t$, így $5t^2$ növekedésének mértéke $5 \cdot 2t$, vagyis $10t$. Ezért ha $s = 5t^2$, akkor $s' = 10t$.

Nézzünk egy másik példát: mivel egyenlő s', ha $s = 7t^4$? Tudjuk, hogy t^4 növekedésének mértéke $4t^3$. Így $7t^4$ növekedésének mértéke $7 \cdot 4t^3$, vagyis $28t^3$. Ezért ha $s= 7t^4$, akkor $s' = 28t^3$.

Gyakorlatok

Határozzuk meg s'-t, a következő esetekben. (1) $s = 10t^2$, (2) $s = 20t^3$, (3) $s = 4t^4$, (4) $s = 8t^{100}$, (5) $s = 2t^3$, (6) $s = 3t^2$.

(Megoldás: (1) $20t$, (2) $60t^2$, (3) $16t^3$, (4) $800t^{99}$, (5) $6t^2$, (6) $6t$.)

A fentiekhez hasonló példákban s' meghatározása meglehetősen egyszerű mechanikus eljárás, amelyet majdnem mindenki könnyen el tud sajátítani. Nem is gondolunk a (6) formulára. Valójában sok olyan középiskolás akad, aki a fenti feladatokat hibátlanul meg tudja oldani, de sosem ismerné fel a (6) formulát, ha elébe tennénk.

Miért fogalmaztuk meg mégis ezt a formulát? Leginkább azért, hogy hivatkozni tudjunk rá; ha a későbbiek folyamán azt fogom mondani, hogy „a (6) formula szerint", akkor ezen nem azt fogom érteni, hogy írjuk le a (6) formulát és végezzünk mechanikus behelyettesítést, hanem az inkább egy ilyen gondolatmenet rövidítése lesz: „Emlékszünk a virágot és árnyékát ábrázoló rajzra, és arra, hogyan használtuk fel ezt a képet az $5t^2$ növekedése mértékének meghatározására? Nos, alkalmazzuk most is ugyanazt az okoskodást." Hasonlóan az „(5) és (5a) formula szerint" kifejezéssel arra utalunk, hogy az egymáshoz illesztett fémrudakkal kapcsolatos gondolatmenet segíteni fogja a tárgyalt probléma vagy folyamat megértését. Valójában az egész matematikában a formulákat ilyen értelemben kellene használnunk, nem vakon alkalmazandó receptként, hanem emlékeztetőként, hogy egy már tanult és megértett problémával kapcsolatos másik példával van dolgunk.

A gyakorlatban az (5) és (6) formulákat (vagy gondolatmeneteket) rendszerint egyszerre alkalmazzuk. Például, mivel egyenlő *s'*, ha

$$s = 5t^2 + 7t^4?$$

Itt *s* két részre, az $5t^2$ és a $7t^4$ részletre bontható. A (6) formula megadja, hogy milyen gyorsan növekednek ezek a részek; ezeket a növekedési mértékeket a 60. oldalon már kiszámítottuk. Az (5) formula szerint *s* növekedésének mértékét a két rész növekedése mértékének összeadásával kapjuk meg.

Okoskodásunkat a következőképpen írhatjuk fel:

(6) szerint $5t^2$ növekedésének mértéke $10t$.

(6) szerint $7t^4$ növekedésének mértéke $28t^3$.

Ezeket az (5) formula alkalmazásával egybekapcsolhatjuk. Ezért $5t^2 + 7t^4$ növekedésének mértéke $10t + 28t^3$.

A gyakorlatban az ilyen növekedési mértékek meghatározása teljesen mechanikus eljárás, amit sosem írunk le ilyen teljes részletességgel.

Gyakorlatok

Határozzuk meg s'-t a következő esetekben:

(1) $s = 10t^2 + 20t^3$,
(2) $s = 2t^3 + 3t^2$,
(3) $s = 5t^7 - 2t^4$,
(4) $s = 5t^7 - 2t^4$,
(5) $s = 10t^2 + 20t^3 - 5t^4$.

(Megoldás: (1) $20t + 60t^2$, (2) $6t^2 + 6t$, (4) $35t^6 - 8t^3$, (3) $35t^6 + 8t^3$, (5) $20t + 60t^2 - 20t^3$)

Tetszőleges polinom növekedésének mértéke

Az olyan kifejezéseket, mint a $10t^4 + 7t^3 - 3t^2 + 5t + 11$, polinomoknak nevezzük. Az előző gyakorlatban szereplő kifejezések mind polinomok voltak. A (4), (5), (5a) és (6) formulák segítségével bármilyen polinom növekedésének mértékét meg tudjuk határozni.

Érdekes, hogy a legegyszerűbb rész okozza a legtöbb tévedést. A tanulók legtöbbje könnyedén számol a magasabb hatványokkal. Örömmel fognak hozzá:

- $10t^4$ növekedésének mértéke $40t^3$,
- $7t^3$ növekedésének mértéke $21t^2$,
- $3t^2$ növekedésének mértéke $6t$.

Ezután kezdődnek a bajok. Sok tanulót zavarba hoz az a kérdés, hogy milyen gyorsan növekszik az $5t$. És az állandó tag, a 11, mindennél több bajt okoz.

A 2. fejezet „A sebesség meghatározása egyszerűbb esetekben” című részében megvizsgáltuk a különféle egyszerű kifejezések növekedésének mértékét. Az *A* eredmény szerint $10t$ növekedésének mértéke 10. A 31. oldalon az olvasó – legalábbis remélem – önállóan meghatározta, hogy $20t$ növekedésének mértéke 20, $30t$ növekedésének mértéke 30 stb. A 31. oldal 5. feladatában a korábbi feladatok eredményeit ilyen algebrai alakban gyűjtöttük össze: kt növekedésének mértéke k. Így a kérdésünkben szereplő $5t$ növekedésének mértéke 5.

Az állandó tag, a 11, mindennél egyszerűbb. A 11 rögzített szám. Egyáltalán nem növekszik. Ha $s = 11$, akkor $s' = 0$. Ha visszalapozunk a 32. oldalra, látjuk, hogy a végeredményben az állandó tag *egyáltalán nem* számított. Hasonlítsuk össze ezt a két megállapítást:

- *A eredmény:* ha $s = 10t$, akkor $s' = 10$.
- *B eredmény:* ha $s = 10t + 3$, akkor $s' = 10$.

Az $s = 10t + 3$ kifejezésben szereplő + 3 az s' meghatározásakor semmi változást sem jelentett. Ha az egyik kocsi az $s = 10t$ szabály szerint, a másik az $s = 10t + 3$ szabály szerint mozog, akkor a második mindig pontosan három kilométerrel az első előtt lesz. A kettő közötti távolság nem változik. Ez azt jelenti, hogy *ugyanakkora sebességgel* haladnak. Az s-et megadó szabályok az *A* és *B* eredményekben különbözők, az s' szabályai azonosak.

Ennek megfelelően az $s = 10t^4 + 7t^3 - 3t^2 + 5t + 11$ szabályhoz tartozó s' meghatározása részletesen a következőképpen történik:

- $10t^4$ növekedésének mértéke $40t^3$,
- $7t^3$ növekedésének mértéke $21t^2$,
- $3t^2$ növekedésének mértéke $6t$,
- $5t$ növekedésének mértéke 5,
- 11 növekedésének mértéke 0.

Ilyen mértékben növekednek az egyes részek. Ha ezeket az (5) és (5a) formulák alapján egybefoglaljuk, akkor a $10t^4+7t^3 - 3t^2 + 5t + 11$ növekedésének mértéke $40t^3 + 21t^2 - 6t + 5 + 0$. Így $s' = 40t^3 + 21t^2 - 6t + 5$.

Egyszerűbb, ha a különböző részek növekedésének mértékét az s formulájának megfelelő része alá írjuk.

$$s = 10t^4 + 7t^3 - 3t^2 + 5t + 11$$

$$\_\_\_ 40t^3 \ \_ \ 2t^2 \ \_ \ 6t \ \_\_ \ 5 \ \_\_ \ 0.$$

Ebből az *s'* formuláját úgy kapjuk meg, hogy az *s* formulájából egyszerűen lemásoljuk a megfelelő helyekre a plusz és mínusz-jeleket:

$$s = 10t^4 + 7t^3 – 3t^2 + 5t + 11$$

$$s' = 40t^3 + 21t^2 - 6t +5 + 0.$$

Természetesen az utolsó helyen álló nulla a megoldás szempontjából nem számít. A kezdők mégis jól teszik, ha kiírják, egészen addig, amíg megfelelő gyakorlatra nem tesznek szert. A leggyakoribb hiba az, hogy a tanulók a 11-et az alsó sorba lemásolva az

$$s' = 40t^3 + 21t^2 - 6t + 5 + 11$$

helytelen eredményt kapják. Ez teljesen rossz. A 11 növekedésének mértéke nem 11; a 11 szám mindig ugyanannyi marad, nem változik, nem növekszik; növekedésének mértéke ezért nulla.

Kisebb valószínűséggel követjük el ezt a hibát, ha utánagondolunk annak, amit csinálunk. Az *s* formulájában szereplő minden egyes tag alá azt írjuk, hogy ***az milyen mértékben növekszik***. Ezekből kapjuk meg, hogy milyen mértékben növekszik az egész kifejezés. Az állandó szám, mint példánkban a 11, rögzített nagyságú részt jelent. Ennek növekedése nulla:

Idő, *t*	0	1	2	3	4
***A* rész nagysága**	11	11	11	11	11

Az 5t kifejezés viszont növekvő részt jelent:

Idő, *t*	0	1	2	3	4

'A' rész nagysága	0	5	10	15	20

Okosan tesszük, ha eleinte lassan dolgozunk. Ne sajnáljuk az időt, amikor azon elmélkedünk, hogy mi a különbség egy változó kifejezés, mint 5t, és egy állandó kifejezés, mint 11 között. Készítsünk a fentiekhez hasonló táblázatokat, vagy olyan ábrákat, amelyeken egy 11 deciméter hosszúságú rudat összekapcsolunk egy 5t deciméter változó hosszúságú rúddal. Mindig győződjünk meg arról, hogy amit mondunk, annak van értelme. Ahogy előrehaladunk, az olvasó helyes szokásokat fog kialakítani, és anélkül, hogy észrevenné, munkájának sebessége is növekedni fog.

Gyakorlatok

A következő feladatok mindegyikében határozzuk meg s'-t:

1. $s = 12$; $s = 2t$; $s = 2t + 12$.
2. $s = 7$; $s= t^3$; $s = t^3 + 7$.
3. $s = 8$; $s = 3t$; $s = t^2$; $s = t^2 + 3t + 8$.
4. $s = 5t^3 + 4t + 3$.
5. $s = 5t^2 – 4t + 3$.
6. $s = 2t^3 – 3t^2 – 10t + 100$.
7. $s = 4t^{20} + 2t^{15} – 3t^{10} + 5t + 17$.
8. $s = 10t^6 + 12t^5 – 15t^4 + 20t^3 – 30t^2 + 60t + 60$.

Megoldások:

1. 0; 2; 2
2. 0. $3t^2$; $3t^2$
3. 0; 3; 2t; 2t + 3
4. 10t + 4
5. 10t - 4
6. $6t^2 - 6t - 10$

7. $80t^{19} + 30t^{14} - 30t^9 + 5$
8. $60t^5 + 60t^4 - 60t^3 + 60t^2 - 60t + 60$

Aki megértette, hogyan kell megoldani az előző feladatokat, az elsajátította ezt a témakört. Akármilyen s polinomot adunk meg, fel tudja írni az s polinom növekedésének s' mértékét.

s' egy alkalmazása

Az 56. oldalon már említettük, hogy ha egy követ 12 m/sec kezdősebességgel függőleges irányban feldobunk, akkor magasságát – amíg a levegőben van – az $s = 12t - 5t^2$ szabály írja le. A gyakorlatból tudjuk, hogy a kő eleinte emelkedik, egy bizonyos idő eltelte után egy pillanatig nyugalomban van, azután lefelé kezd esni. Ilyen kérdéseket tehetünk fel: (1) Menynyi ideig emelkedik a kő? (2) Mikor és hol éri el pályájának legmagasabb pontját (ahol egy pillanatra nyugalmi helyzetbe kerül, mielőtt esni kezdene)? (3) Mekkora a sebessége 1 másodperc eltelte után? (4) Mekkora a sebessége 2 másodperc eltelte után?

A kérdések némelyikére az analízis felhasználása nélkül is könnyen válaszolhatunk. Táblázat, esetleg grafikon készítésével némi próbálkozás után választ kaphatunk arra, hogy mennyi ideig emelkedik a kő, és mikor éri el a legmagasabb pontot. A (3) és (4) kérdésekre, amelyek a sebességgel kapcsolatosak, csak annak a meglehetősen bonyolult eljárásnak a segítségével tudnánk választ adni, amellyel a korábbiakban próbáltunk a sebességre becslést adni.

Mind a négy kérdésnek van valami köze a sebességhez, így természetes segédeszköznek látszik az analízis. (Vannak olyan tanulók, akik mechanikai formulákra hivatkozva elkerülik az analízist; de mivel e mechanikai formulák bizonyítása legegyszerűbben az analízis segítségével történhet, ez voltaképpen nem nagy különbség.) Az analízissel történő megközelítés egyszerű és igen kevés számolást igényel.

Mindenekelőtt írjuk fel az s' sebességet. Mivel $s = 12t - 5t^2$, ezért $s' = 12 - 10t$. Először a (2) kérdésre válaszolunk; mikor kerül nyugalomba a kő, mielőtt pályáján lefelé indulna? Amikor a kő nyugalomban van, akkor a sebesség nulla, vagyis $s' = 0$. Mikor következik ez be? Mivel $s' = 12 - 10t$, ezért akkor, amikor $12 - 10t$ egyenlő nullával. Így a $12 - 10t = 0$ egyenlethez jutunk. Ezt könnyen meg tudjuk oldani: megoldása a $t = 1{,}2$ érték. Ez azt jelenti, hogy a kő 1,2 másodperc múlva éri el pályájának legmagasabb pontját.

(3) kérdés: Mekkora a sebesség 1 másodperc eltelte után? Az algebra nyelvén fogalmazva: mennyi s' értéke, ha $t=1$? Helyettesítsük be az $s' = 12 - 10t$ kifejezésbe a $t = 1$ értéket. Azt találjuk, hogy ha $t = 1$, akkor $s' = 2$. Ez az s' megadja a kő sebességét 1 másodperc eltelte után. A sebesség ekkor 2 m/sec.

(4) kérdés: Mekkora a sebesség 2 másodperc eltelte után? Az $s' = 12 - 10t$ kifejezésbe a $t = 2$ értéket helyettesítve azt kapjuk, hogy $s' = -8$. Mit jelent itt a mínusz-jel? A 26. oldalon már beszéltünk a negatív sebesség jelentéséről. Pozitív sebesség azt jelenti, hogy a kő emelkedik, negatív sebesség pedig azt, hogy esik. Most mindkettővel találkoztunk; ha $t = 1$, akkor azt tapasztaljuk, hogy $s' = 2$, aminek jelentése: a kő 2 m/sec sebességgel emelkedik, ha $t = 2$, akkor pedig mint láttuk, $s' = -8$, ami azt jelenti, hogy a kő 8m/sec sebességgel esik lefelé.

Ezek az eredmények ésszerűek. Ha a kő pályája legmagasabb pontját $t = 1{,}2$ másodperc alatt éri el, akkor azt várjuk, hogy $t = 1{,}2$ másodperc előtt állandóan emelkedik, $t = 1{,}2$ másodperc után pedig állandóan süllyed. Mivel $t = 1$ a $t = 1{,}2$ előtt. $t = 2$ a $t = 1{,}2$ után van, eredményeink ésszerű és következetes képpé állnak össze.

A többi kérdés vizsgálata közben válaszoltunk az (1) kérdésre is. A kő a t = 0 és t = 1,2 másodperc időpontok között emelkedik. Ez összhangban van algebrai ismereteinkkel. Az $s' = 12 - 10t$ formulát $s' = 10(1,2 - t)$ alakban is felírhatjuk. Amíg t kisebb, mint 1,2 addig s' pozitív, és a kő emelkedik.

Most egyszerű kérdésünk megoldására egyszerű formulát használtunk. A mechanikában és a csillagászatban is alkalmazzák az analízist, de itt már jóval nehezebb problémákkal és jóval bonyolultabb formulákkal kell megbirkóznunk. De egyszerű példánk is jelzi, hogy a természettudományokban milyen alkalmazási lehetőségei vannak az analízisnek.

HATODIK FEJEZET – Analízis és grafikonok

A korábbiakban már láttuk, hogy szoros kapcsolat van a mozgások és a görbék között. A mozgó test befestve tintanyomot hagyott maga után a papíron. Az így kapott görbe pontosan számot ad a test mozgásáról. Ha a görbét egy keskeny nyílás mögött mozgatjuk, újra látjuk a pont emelkedő és süllyedő mozgását. Azt is megtehetjük, hogy egy vezérlő emeltyűt illesztünk a görbéhez. (Lásd a 22. és a 23. oldalakat.)

A görbe a mozgás teljes felvétele. Minden, amit mondhatunk a mozgásról, levezethető a görbe vizsgálatából.

Eddig főleg a mozgás segítségével fejeztük ki magunkat. Úgy tekintettük, hogy s' egy mozgó test sebességének mértéke. De a test bármely pillanathoz tartozó sebessége és a megfelelő görbe között kell hogy legyen valamilyen összefüggés. Ezért joggal gondolhatjuk, hogy s' leírja a görbe bizonyos geometriai tulajdonságait.

Ezt a kérdést kétszer már érintettük (1. a 22. és a 33. oldalakat). Arra a következtetésre jutottunk, hogy a test sebessége kapcsolatban van a görbe meredekségével. Ezért s'-nek mérnie kell a görbe meredekségét. Az alapgondolat itt elég világos. Ha s' nagy, mondjuk $s' = 100$, akkor a görbe nagyon meredek; ha s' kicsi, mondjuk $s' = 1/4$, akkor a görbe nem nagyon meredek, ha $s' = 0$, akkor a görbe nem emelkedik. A „nagyon meredek” és „nem nagyon meredek” kifejezések azonban eléggé határozatlanok. Másrészt viszont az s' értékek teljesen pontosak. Semmi határozatlanság sincs abban, amikor azt mondjuk, hogy $s' = 100$ vagy $s' = 1/4$. Vajon nem lehetne-e egy görbe meredekségét ugyanilyen tökéletes pontossággal mérni? Hogy válaszolhassunk erre a kérdésre, nézzük át még egyszer, mit végeztünk eddig, és próbáljunk meg minden lépést a mozgó testek helyett a grafikonok segítségével megfogalmazni.

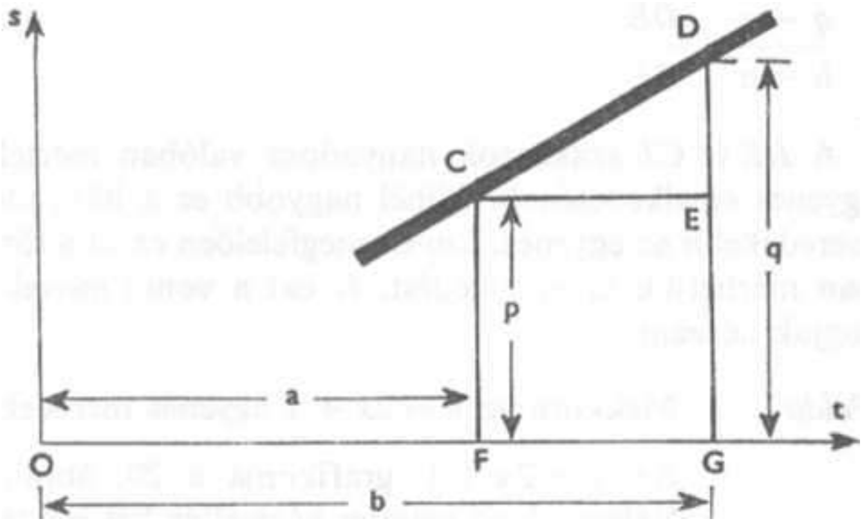
Egyenes meredeksége

A sebességgel kapcsolatos vizsgálatainkat az állandó sebességgel kezdtük. Ha egy test állandó sebességgel mozog, akkor a megfelelő grafikon egyenes vonal lesz. Kövessük most újra végig az (1) formulára a 25. oldalon adott levezetést.

Ezzel a táblázattal kezdtük:

t	*a*	*b*
s	*p*	*q*

A táblázat jelentése a 19. ábra grafikonján látható.



19. ábra – Egyenes meredeksége

A *CD*-vonal a test mozgásának felvétele. A grafikon *C* pontjának *(a; p)* koordinátái azt mutatják, hogy ha $t = a$, akkor $s = p$. Ugyanígy az, hogy a grafikon átmegy a *D* ponton, azt mutatja, hogy ha $t = b$, akkor $s = q$. Az (1) formula felírásakor a sebesség jelölésére a v jelet használtuk. Mivel azóta hozzászoktunk az s' használatához, az (1) formulát most ilyen alakban írjuk fel:

$$s' = \frac{q-p}{b-a}.$$

Ezt az eredményt eredetileg annak alapján kaptuk, hogy „sebesség egyenlő út osztva idővel”. Adhatunk-e fenti egyenletnek geometriai jelentést? Találunk-e olyan $q-p$ és $b-a$ hosszúságú szakaszokat, amelyek hányadosát vizsgálhatnánk?

Ez nem nehéz. Mivel $OF = a$ és $OG = b$, ezért nyilvánvalóan $FG = b-a$. Mivel *FGEC* téglalap, ezért a *CE* és *FG* szakaszok egyenlő hosszúságúak. Így mind az *FG*, mind a *CE* szakasz hosszúsága $b-a$. Ugyanígy a *CF és EG* szakaszok mindegyike *p* hosszúságú. Mivel $DG = q$, ezért $q-p = DG - EG = DE$.

Így

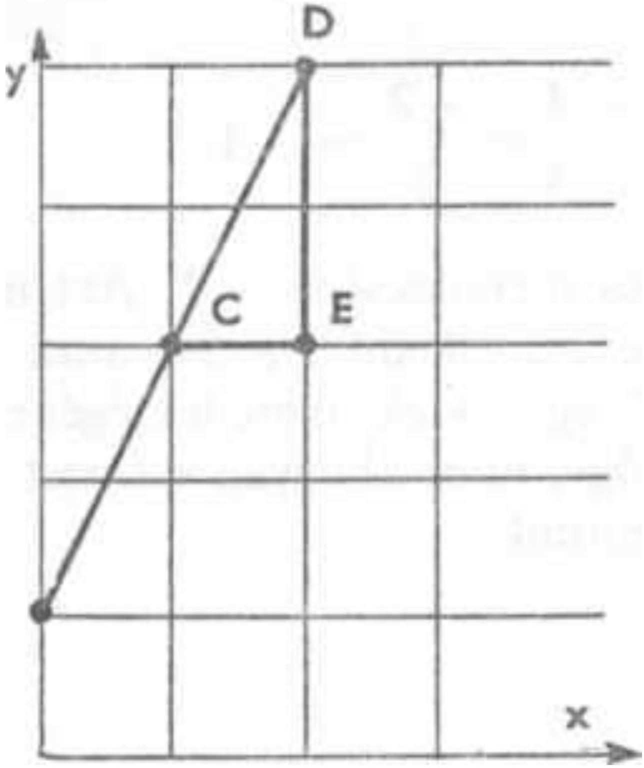
$$\frac{q-p}{b-a} = \frac{DE}{CE}.$$

A *DE* és *CE* szakaszok hányadosa valóban mértéke a *CD* egyenes emelkedésének. Minél nagyobb ez a hányados, annál meredekebb az egyenes. Ennek megfelelően ezzel a törttel valóban mérhetjük az emelkedést, és ezt a vonal *meredekségének* fogjuk nevezni.

Példa

Mekkora az $y = 2x + 1$ egyenes meredeksége?

Az $y = 2x + 1$ grafikonja a 20. ábrán látható. Válasszuk az egyenes bármelyik két pontját C-nek, illetve D-nek. Válasszuk mondjuk az (1; 3) és (2; 5) pontokat. Ekkor $CE = 1$ és $DE = 2$. Ezért $DE/CE = 2/1 = 2$. Bármelyik másik pontpárt kiválasztva ugyanezt kapjuk. Az egyenes meredeksége 2.



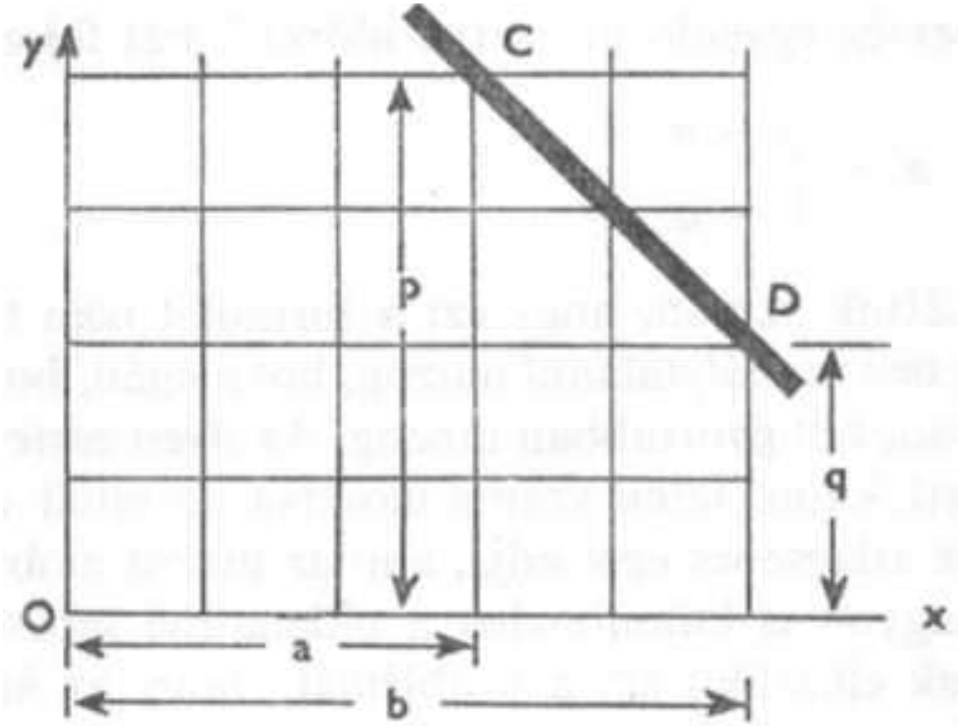
20. ábra – Egyenes meredeksége

Gyakorlatok

Határozzuk meg a következő egyenesek meredekségét: (1) $y = x$, (2) $y = x + 1$, (3) $y = 2x$, és (4) $y = 3x$.

Megoldások:

(1) 1
(2) 1
(3) 2
(4) 3.



21. ábra – Egyenes meredeksége

A fenti példák mindegyikében pozitív szám volt a meredekség értéke. A grafikon azonban olyan is lehet, mint amilyen a 21. ábrán látható. Ebben az esetben $a = 3$, $b = 5$, $p = 4$, $q = 2$ és

$$\frac{q-p}{b-a}=\frac{2-4}{5-3}=\frac{-2}{2}=-1.$$

Így az egyenes meredeksége –1. Azt mondjuk, hogy a 19. ábra egyenese „emelkedő”, a 21. ábra egyenese „süllyedő”. A „süllyedő” egyenesek meredekségének értéke mindig negatív, éppen úgy, mint ahogyan eső test vizsgálatakor negatív sebességet kaptunk.

Gyakorlatok

Határozzuk meg a következő egyenesek meredekségét:

(5) $y = 5 - x$,
(6) $y = 10 - 2x$.

Megoldások:

(6) – 1
(7) –2.

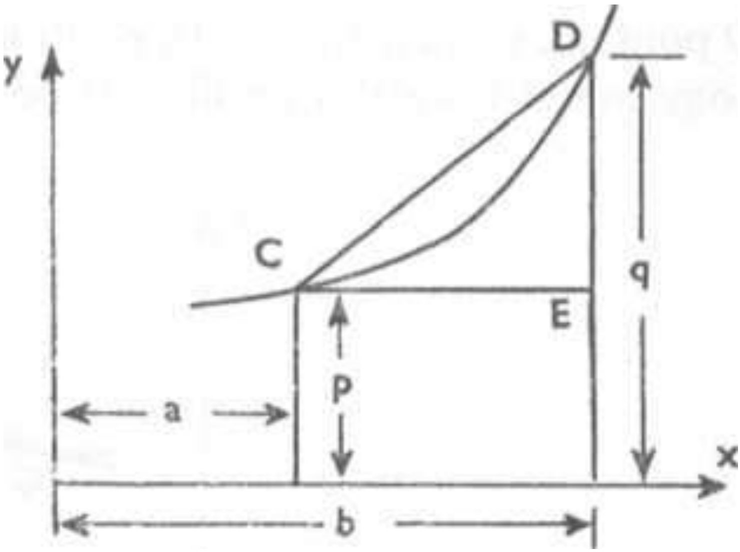
Görbék meredeksége

A sebesség vizsgálatát a számtanórákról ismert egyszerű eljárással kezdtük: megnéztük, hány kilométer utat tett meg a test, megnéztük, mennyi időre volt szüksége ehhez, és a kilométerek számát elosztottuk az órák számával. Röviden: „sebesség egyenlő út osztva idővel.” Ezt fejezi ki az (1) formula:

$$s' = \frac{q-p}{b-a}.$$

Láttuk azután, hogy ezt a formulát nem tudjuk használni, ha a test szabálytalanul mozog, hol megáll, hol elindul, hol lassabban, hol gyorsabban mozog. Az ilyen esetekben az összes megtett kilométerek száma elosztva az eltelt órák számával csak az átlagsebességet adja, ami az utazás akármelyik pillanatában nagyon is különbözhet a pillanatnyi sebességtől. Úgy próbáltuk elkerülni ezt a problémát, hogy az átlagsebességet egyre rövidebb és rövidebb intervallumokban vizsgáltuk. Ha az intervallumokat csökkentettük, akkor az átlagsebesség bizonyos rögzített értékhez közeledett, és ezt az értéket az adott pillanathoz tartozó valódi sebességnek neveztük.

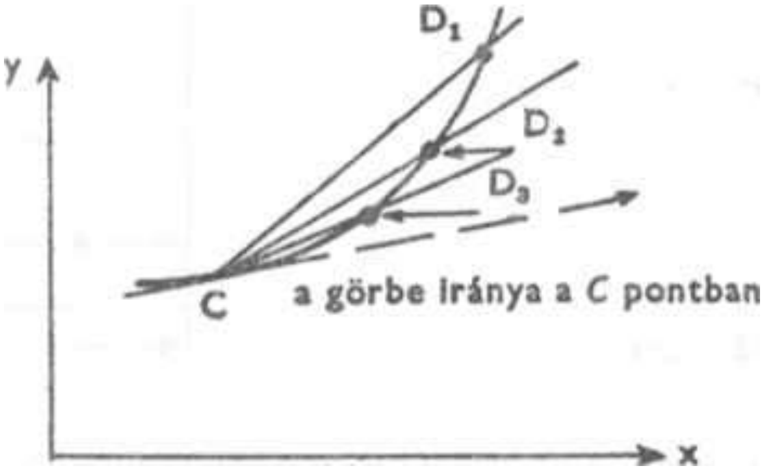
Ugyanígy járhatunk el, ha egy görbe meredekségét akarjuk meghatározni a görbe egy adott pontjában. Természetesebb, ha most az s, t betűk helyett az x, y betűket alkalmazzuk, hiszen a koordináta-rendszerben inkább ezeket szoktuk használni. Tegyük fel, hogy görbénk átmegy az $x = a$, $y = b$, és $x = p$, $y = q$ pontokon (22. ábra).



22. ábra – Görbe meredeksége

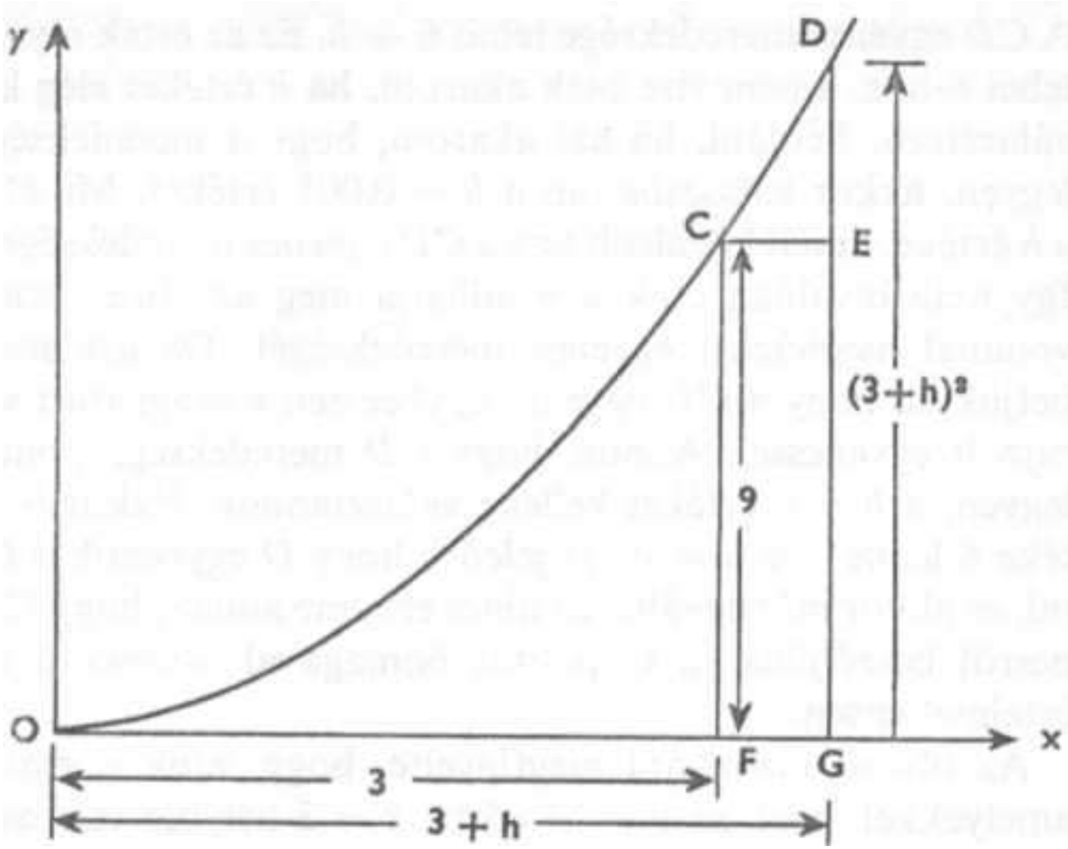
A CD egyenes meredekségét a $(q - p)/(b - a)$ kifejezés méri. Ezt szavakban is megfogalmazhatjuk. Mivel a D pont q magasságban, a C pont p magasságban van, a $q - p$ mennyiség a C és D pontok közötti magasság-emelkedést méri. A $b-a$ mennyiség a *CE* szakasz hossza. Ha a *C* pontból a *D* pont felé haladunk, akkor a *CE* hosszúság azt adja meg, hogy mennyit mentünk a papíron „keresztben”. Ha *C* és *D* két valóságos földrajzi hely volna, akkor $b-a$ azt a távolságot mérné, amit egy térképen látnánk (mivel a térképet úgy készítik, mintha felülről néznénk a tájat). A hely magassága közömbös abból a szempontból, hogy a térképen hova kell rajzolnunk. Így azt mondhatjuk, hogy a $(q-p)/(b-a)$ kifejezés „magasságváltozás osztva a térképen mért távolsággal”. Például, ha valaki 200 kilométert utazik és eközben a szintkülönbség 3 kilométer, akkor a $(q-p)/(b-a)$ kifejezés értéke 3/200. Ez a tört a teljes szintemelkedést és a megtett utat tartalmazza, de semmit sem mond arról, hogy egy-egy pillanatban milyen meredeken haladtunk. Ugyanígy a 22. ábrán a $(q-p)/(b-a)$ tört a CD egyenes meredekségét adja meg, és semmi köze sincs a görbének sem a C, sem a *D* ponthoz tartozó meredekségéhez.

Ha viszont a 22. ábrán látható görbe esetében a D pontot egyre jobban közelítjük a *C* ponthoz, akkor a *CD egyenes* meredeksége egyre jobban és jobban megközelíti a *görbe C* ponthoz tartozó meredekségét (lásd a 23. ábrát). Válasszuk *D* pontnak sorra a D_1, D_2, D_3 pontokat.



23. ábra

Az ábrából észrevehető, hogy minél közelebb kerül a D pont a C ponthoz, annál közelebb kerül a CD egyenes a görbe C pontbeli irányához. Ábránkon azonban nem lehet úgy választani a D pontot, hogy a CD egyenes valóban egybeessék a szaggatott vonallal. Olyan közel kerülhetünk hozzá, amennyire csak akarunk, de sosem érhetjük el.



24. ábra

Például, határozzuk meg az $y = x^2$ parabola meredekségét abban a pontjában, amelyre $x = 3$ (lásd a 24. ábrát). A C pont koordinátái (3; 9) így $OF = 3$ és $FC = 9$. Vegyük fel a D pontot valahol a C közelében, legyen a D pont x koordinátája $x = 3 + h$. Egyelőre nem rögzítjük, hogy h mekkora legyen. Mindenesetre meglehetősen kis értéket fogunk választani, hiszen azt akarjuk, hogy *D* közel legyen a *C* ponthoz. Így $OG = 3 + h$. Mit mondhatunk a *GD* szakaszról? Hogyan is rajzoltuk az $y = x^2$ görbét? Felvettünk valamilyen *x* értéket, négyzetre emeltük, az adta meg az *y* értékét, amit függőlegesen felfelé mértünk fel. A *C* pont esetében már követtük is ezt az eljárást. Az *FC* távolságot 9-nek mértük, mert *OF* egyenlő 3-mal, és 3 négyzete 9. Ugyanígy *OG* egyenlő 3 + *h* -val, és így a *GD* függőleges távolságnak 3 + *h* négyzetével kell egyenlőnek lennie. Így $GD = (3 + h)^2$.

DE/*CE* meghatározásának útja most már nyílegyenes:

$CE = FG = OG - OF = (3 + h) - 3 = h,$

$DE = GD - GE = GD - FC = (3 + h)^2 - 9 = 6h + h^2$

Így

$$\frac{DE}{CE} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h.$$

A *CD*-egyenes meredeksége tehát $6 + h$. *Ez* az érték olyan közel lehet 6-hoz, amennyire csak akarom, ha *h* értékét elég kicsinek választom. Például, ha azt akarom, hogy a meredekség 6,001 legyen, akkor választhatom a $h = 0{,}001$ értéket. Minél kisebb a *h* értéke, annál közelebb lesz a *CD* egyenes meredeksége 6-hoz. Így nyilvánvalóan csak a 6 adhatja meg az ábrán szaggatott vonallal meghúzott egyenes meredekségét. De azt sosem érhetjük el, hogy a *CD* egyenes egybeessen a szaggatott vonallal rajzolt egyenessel. Ahhoz, hogy *CD* meredeksége pontosan 6 legyen, a $h = 0$ értéket kellene választanunk. Ekkor $6 + h$ értéke 6 lenne. De $h = 0$ azt jelenti, hogy *D* egybeesik a C ponttal, és akkor már egyáltalán nincs értelme annak, hogy *CD* egyenesről beszéljünk, a *C* pontot önmagával összekötő egyenes értelmetlenség.

Az olvasó bizonyára megfigyelte, hogy azok a számítások, amelyekkel most az $y = x^2$ görbe $x = 3$ helyhez tartozó meredekségét meghatároztuk, pontosan ugyanazok, mint amelyekkel a 42. oldalon az $s = t^2$ szabályhoz tartozó sebességet határoztuk meg $t = 3$ esetén. Egy test mozgása és egy görbe alakja ugyanannak a matematikai gondolatnak két különböző megjelenési formája. Ha valamilyen analízissel kapcsolatos feladatot kell megoldanunk, alkalmazzuk ezek közül azt, amelyik kényelmesebb.

Felesleges mondanom, hogy a mozgások vizsgálatakor kapott formuláink, amelyekben *s és t* szerepelt, ugyanúgy alkalmazhatók az *x* és *y* változókat tartalmazó grafikonokra. Ezért a (4) formulát, amely szerint

ha $s = t^n$ akkor $s' = nt^{n-1}$, így is írhatjuk:

ha $y = x^n$, akkor $y' = nx^{n-1}$

Azokból a példákból, amelyekben s'-t határoztuk meg, közvetlenül megkaphatjuk az y'-*re* vonatkozó eredményeket.

Milyen információ-többletet ad az analízis?

Ha a szokásos elemi módszerrel készítjük el az $y = x^2$ görbéjét, akkor olyan pontokat keresünk, amelyeken a görbe átmegy. Így például ha $x = 3$, akkor $y = 9$, ami azt jelenti, hogy a görbe átmegy a (3; 9) ponton. Sejtelmünk sincs azonban arról, hogy milyen irányban halad át ezen a ponton. Csak találgatni tudunk annak alapján, hogy más pontokat is felveszünk, és megnézzük, hogyan haladhat át a görbe rajtuk.

Az analízis éppen ebben a kérdésben segít nekünk. Ha $y = x^2$, akkor tudjuk, hogy $y' = 2x$; $x = 3$ esetén $y = 9$ és $y' = 6$. Így a görbe a (3; 9) ponton 6 meredekséggel halad át.

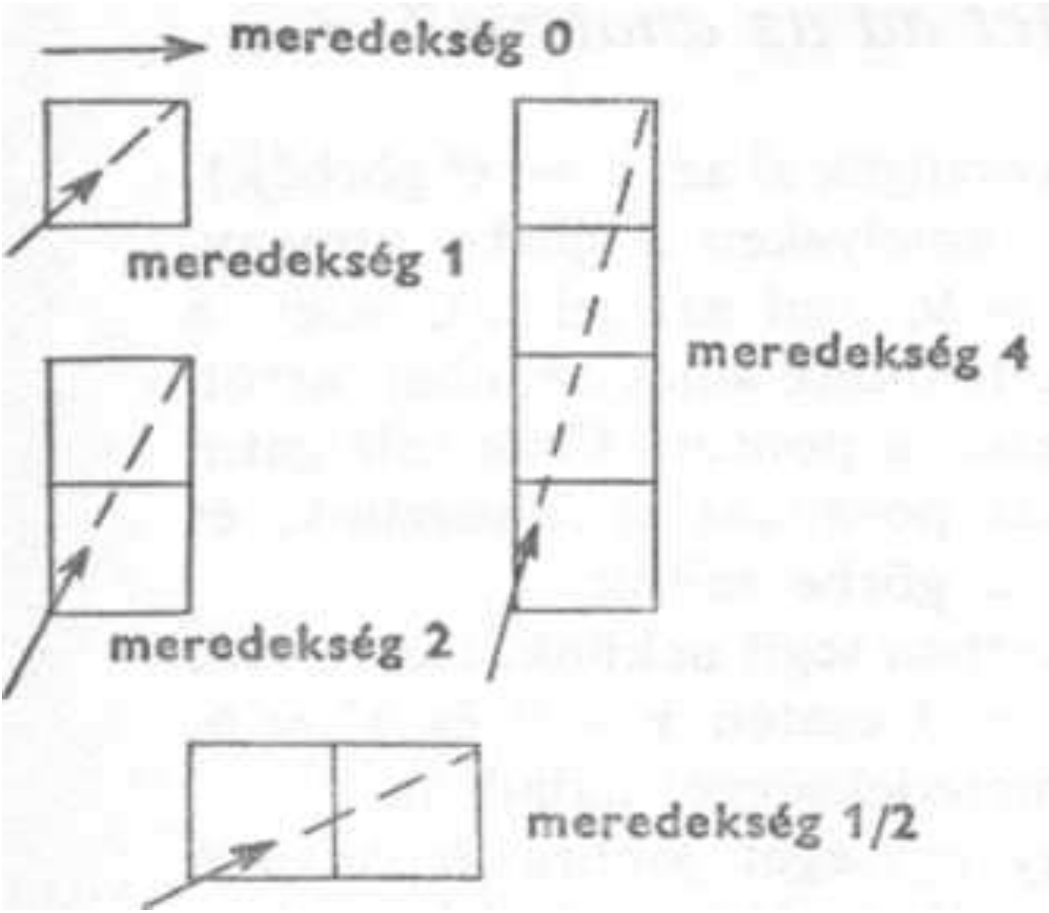
A 6 meredekségű egyenes egy egységet jobbra haladva 6 egységet emelkedik, ahogyan a 25. ábrán láthatjuk. Most nincs szükségünk ilyen hosszú egyenes darabra, ennek egy kis része is megmutatja a helyes irányt.

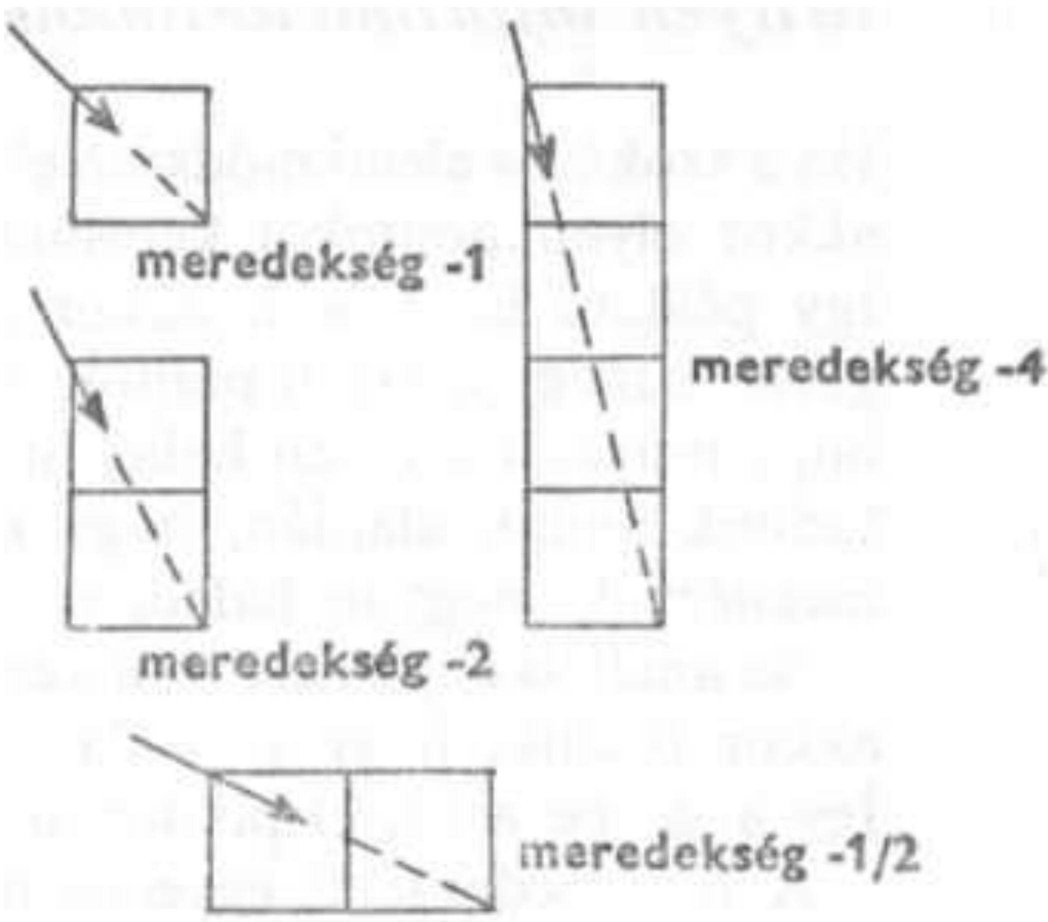
25. ábra

26. ábra

Így ahelyett, hogy a (3; 9) pontot rajzolnánk fel, megtehetjük, hogy a ponttal együtt egy kis nyilat is rajzolunk, ahogyan ezt a 26. ábrán láthatjuk. A görbe a nyíl által meghatározott irányban halad át a (3; 9) ponton.

Grafikonok készítésekor szükségünk lesz más meredekségeket megadó nyilakra is. Ezekből láthatunk néhányat a 27. ábrán:





27. ábra

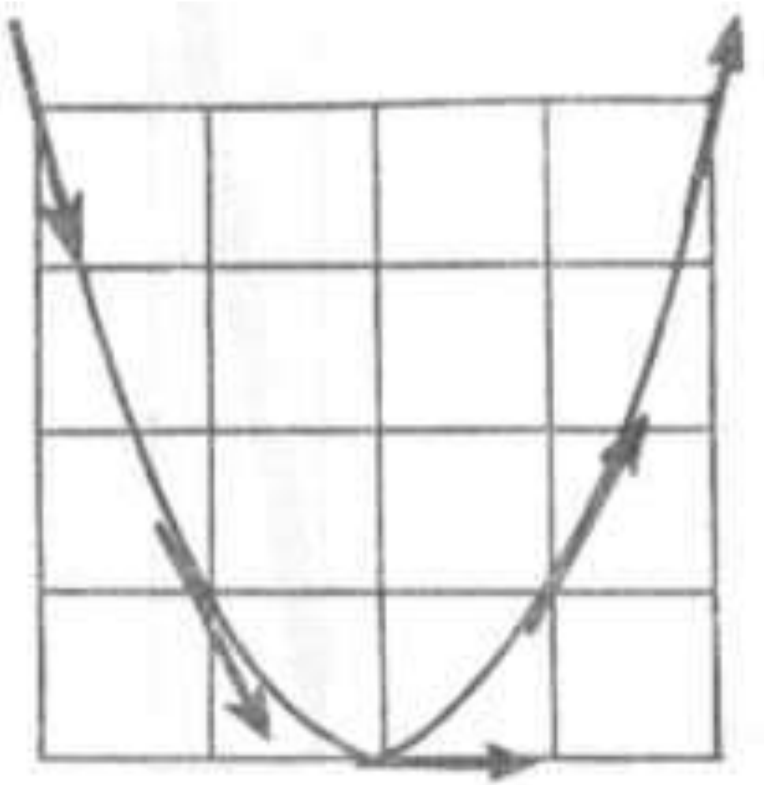
Tegyük fel most, hogy az $y = x^2$ grafikonjának $x = -2$ és $x = +2$ közötti részét szeretnénk megrajzolni. Először kiszámítjuk az alábbi táblázatok adatait:

$y = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	+4	+ 1	0	1	4

y' = 2x

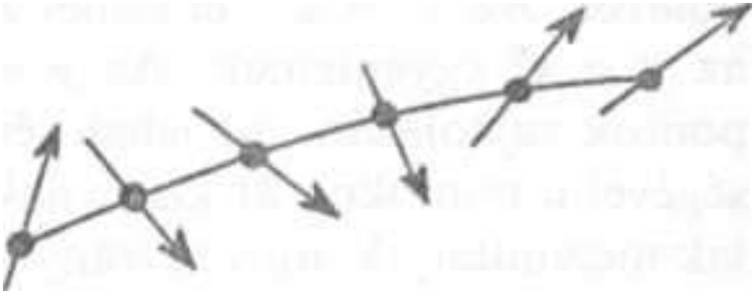
x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	0	2	4



28. ábra

Ezután az *y* táblázatát felhasználva berajzoljuk a pontokat a grafikonba, és az y'-táblázat segítségével minden egyes ponthoz berajzoljuk a megfelelő nyilat (28. ábra). Ezután összekötjük a pontokat egy görbével; ennek a görbének az iránya minden egyes pontban meg kell, hogy egyezzen a ponthoz rajzolt nyíl irányával.

Ha egy ilyen típusú feladatban azt látjuk, hogy a pontok egy görbén helyezkednek el, de a nyilak a 29. ábrán látható módon



29. ábra

átmetszik ezt a görbét, akkor valószínűleg valamilyen hibát követtünk el. Újra át kell nézni a számolást, és azt, hogy jó helyre rajzoltuk-e a pontokat, helyes irányba húztuk-e a nyilakat. *Egyszerű* problémák esetében azt várhatjuk, hogy a pontok a nyilak irányában sima görbévé állnak össze.

Meglehetősen unalmas sok görbét felrajzolni. Az analízisben talán éppen az a legszebb, hogy a görbék legfontosabb tulajdonságait anélkül is megtudhatjuk, hogy felrajzolnánk a görbe néhány pontját. Egy vagy két görbe megrajzolása a fenti módszerrel persze hasznos lehet abból a szempontból, hogy hozzászokjunk y' meredekségmérő szerepéhez.

Gyakorlatok

1. Ha $y = 10x - x^2$, akkor $y' = 10 - 2x$. Rajzoljuk meg az $y = 10x - x^2$ grafikonját $x = 0$ és $x = 10$ között a régi, elemi módszerrel, azaz csak x és y értékeinek felhasználásával. Ezután az *y' értékek felhasználásával* rajzoljuk be a nyilakat. Ellenőrizzük, hogy érintik-e a nyilak a görbét.

2. Az $y = x^2$ 28. ábrán látható grafikonjába rajzoljuk be az $x = -1/2$ és $x = 1/2$ értékeknek megfelelő pontokat és nyilakat. Ellenőrizzük, hogy beleillenek-e ezek az eddigi ábrába.

3. Vázoljuk fel az $y = 4x - x^2$ grafikonját az $x = 0$ és $x = 4$ értékek között az ismertetett módszerrel, vagyis rajzoljuk meg előbb a pontokat és nyilakat, majd kössük össze a pontokat egy sima görbével. (Itt felhívjuk az olvasó figyelmét egy súlyos félreértés lehetőségére. Megtörténhet, hogy valaki módszerünkkel akarja felrajzolni az $y = x^2$ grafikonját. Közben megkapta az $y' = 2x$ eredményt, megrajzolta ennek a grafikonját, az $y = 2x$ egyenest. Ekkor, mivel közben figyelme elterelődött az eredeti feladatról, abba a tévedésbe eshet, hogy a felrajzolt egyenes az eredeti kérdés megoldása: az $y = x^2$ grafikonja. Ez a tévedés két módon is elkerülhető. Egyrészt ne feledkezzünk meg arról, amit már tudunk, hogy az $y = x^2$ képe parabola (tehát nem egyenes), másrészt fontos, hogy mindig tudatosan dolgozzunk: szem előtt tartva, hogy miért, és mit csinálunk.)

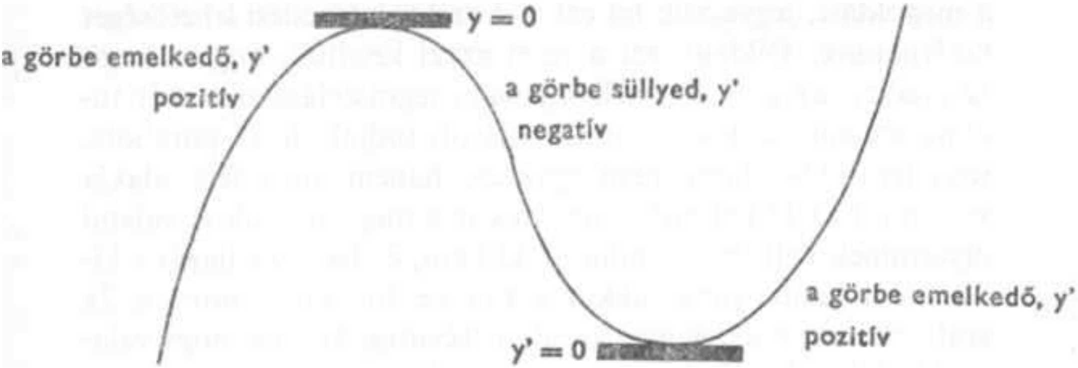
Az $y' = 2x$ egyenlet pontosan azt adja, amit ennek a résznek a címében ígértem: információ-többletet az $y = x^2$ paraboláról. Az $y' = 2x$ egyenlet semmiképpen sem mond ellent az $y = x^2$ egyenletnek. Az $y = x^2$ egyenlet önmagában csak pontok rajzolására ad lehetőséget. Az $y' = 2x$ egyenlet segítségével e pontokon át kis nyilakat rajzolhatunk, és ezek a nyilak megmutatják, milyen irányban halad át a parabola az egyes pontokon. A két egyenlet különböző típusú információkat ad. Az y azt mutatja meg, hogy milyen magasan van egy pont az x-tengely fölött, az y' pedig a görbe irányát határozza meg. Ugyanezt a megkülönböztetést mozgó testek esetében is megtehetjük. Itt is két egyenletünk van, $s = t^2$ és $s' = 2t$. Az s mennyiség arra ad választ, hogy hol van a test, az s' mennyiség pedig arra, hogy milyen gyorsan mozog. (Aggodalmunk talán kissé túlzottnak tűnik. Joggal mondhatjuk, hogy meglehetősen valószínűtlen annak a tévedésnek az elkövetése, amelytől itt megóvni próbáltuk olvasóinkat. De semmi esetre sem felesleges a figyelmeztetés Hiszen a tévedés, amelyet említettünk, olyan típusú, amely igen gyakori és általános. Ezért módszeres kiküszöbölése nagy akadályokat hárít el a világos megértés és rendszeres haladás útjából. A matematikában és azon kívül is gyakran elkövetett hibáról van szó. Valamilyen problémát akarunk megoldani. A munka során felmerül *D* kérdés, melynek megválaszolása segítséget jelent *A* megoldásában. Így először *B* kérdéssel foglalkozva, azt oldjuk meg. és a megoldást – mivel közben figyelmünk elterelődött *A*-ról – eredeti problémánk megoldásának tekintjük.)

Sokan és sokszor elkövetik ezt a hibát. A gondolkodás fejlesztésének egyik fontos része annak megtanulása, hogyan kerülhetjük el ezt. Sokan gyorsan akarnak válaszolni egy kérdésre, vagy gyorsan akarnak megoldani egy problémát. Pedig mielőtt válaszolunk, jól tesszük, ha pontosan rögzítjük, mi is volt a kérdés, lejegyzünk egy-két, a kérdés lényegére világító gondolatot, vagy rajzos vázlatot készítünk. Ha valamennyire látjuk a megoldást, jegyezzük fel ezt is. Ezzel sok tévedési lehetőséget kizárhatunk. Például, ezt a részt azzal kezdtük, hogyan segít az analízis az $y = x^2$ grafikonjának megrajzolásában; már tudunk valamit az $y = x^2$ grafikonjáról; tudjuk, hogy parabola, vagy legalábbis, hogy nem egyenes, hanem olyanféle alakja van, mint az U betűnek. Nos, akkor a megoldásnak is valami olyasminek kell lennie, mint az U betű, és ha a 2x lineáris kifejezéssel találkozunk, akkor eszünkbe fog jutni, hogy a 2x grafikonja egyenes, és nem kerülünk tévútra. Tudjuk, hogy valami U alakút kell keresnünk, nem pedig valamilyen egyenest. A matematikában igen nagy jelentősége van annak, hogy előre elképzeljük, amit keresünk; mindannyian tévedhetünk a számításokban és a gondolkodásban egyaránt, és ez az előzetes halvány elképzelés segít minket abban, hogy felismerjük és kiküszöböljük a hibákat. Ha hibát követünk el, akkor utána egy bizonyos szakaszban sokszor olyan nevetséges eredményeket kapunk, hogy biztosak lehetünk benne: valahol hibáztunk.

Grafikonok pontok felrajzolása nélkül

A pontok bejelölése fáradságos dolog, és még az sem sokkal jobb, ha a pontokat nyilakkal együtt rajzoljuk fel. Mint már korábban említettük, az analízis lehetőséget ad arra is, hogy az egyes pontok berajzolása és négyzetrácsos papír használata nélkül felvázoljuk egy formula grafikonját.

A módszer azon a korábbi megjegyzésünkön alapul, hogy az y' meredekség pozitív, ha a görbe az adott pillanatban emelkedik, nulla, ha éppen vízszintes, és negatív, ha süllyed (30. ábra).



30. ábra

Ezt jól mutatja a 28. ábrán látható $y = x^2$ grafikon. Itt $y' = 2x$, így y' negatív, ha x negatív; nulla, ha x nulla, és pozitív, ha x pozitív. Ez összhangban van görbénk alakjával, hiszen tudjuk, hogy parabolánk süllyedő, ha x negatív, egy pillanatra vízszintes, amikor x nulla, és emelkedő, ha x pozitív. Az $y' = 2x$ egyenlet vizsgálatával egyszerűen le tudjuk írni a grafikon legfontosabb tulajdonságait. Az y' előjelét kell csak megfigyelnünk. Mikor pozitív az y'? Csak akkor, amikor x pozitív.

Így a görbe csak akkor emelkedő, amikor x pozitív. Mikor negatív az y'? Csak akkor, amikor x negatív. Így a görbe csak akkor süllyed, amikor x negatív.

Ez a módszer valójában jóval gyümölcsözőbb, mint ha a görbe ábrázolását pontok berajzolásával végeznénk. A grafikont csak az $x = -2$ és $x = +2$ értékek között vázoltuk fel. Ettől azonban ezen az intervallumon kívül akármi történhet. Lehet, hogy mondjuk az $x = 100$ és $x = 200$ értékek között a görbe nagyon bonyolultan csavarodik, kanyarodik; a –2 és +2 közötti értékek felvázolása semmit sem mond arról, hogy mi történik nagy x értékek esetén. Az analízis azonban választ ad erre is: $y' = 2x$, *és* $2x$ minden pozitív x értékre pozitív. Így egészen biztosak lehetünk abban, hogy a görbe mindvégig emelkedik, akármilyen messzire is megyünk jobbra. Mindig emelkedik, mert y' az egész tartományban pozitív. Ugyanígy biztosak lehetünk abban, hogy a görbe a kezdőponttól balra minden pontban süllyedő, hiszen $y' = 2x$, *és* $2x$ minden negatív x értékre negatív.

A görbékkel kapcsolatban használtuk az „emelkedő” és „süllyedő” kifejezéseket. Ezeket mindig x növekedésének irányában gondoljuk, azaz balról jobbra haladva. Korábbi ábráinkon, amelyeken testek mozgását ábrázoltuk, ugyanezt a megállapodást alkalmaztuk. A korábban történtek bal oldalon, a később történtek pedig jobbra voltak láthatók. Így a 31. ábra egy felfelé mozgó test grafikonja.

31. ábra

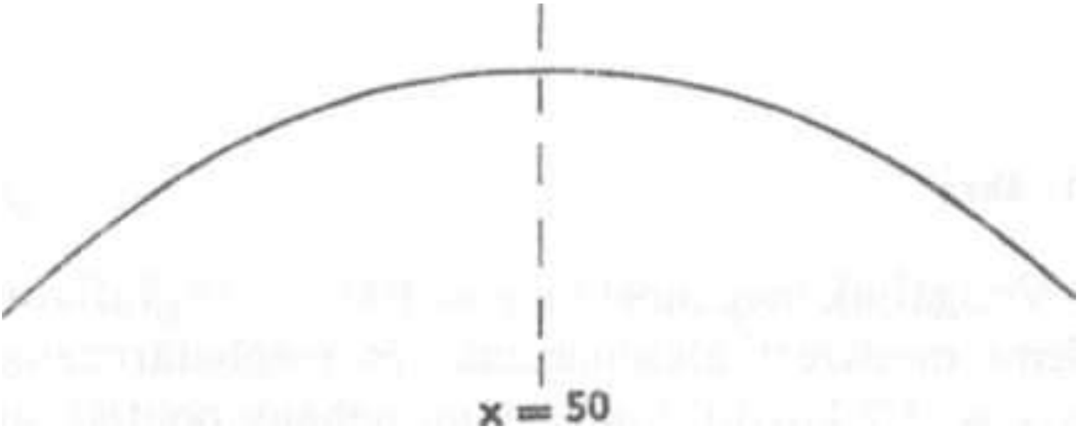
Vizsgáljuk meg most az $y = 100x - x^2$ grafikonját. Ha a régi elemi módszert alkalmazzuk, és meghatározzuk az $x = -2$ és $x = +2$ közötti intervallum néhány pontját, akkor a következő táblázatot kapjuk:

x	-2	-1	0	1	2
y	-204	-101	0	99	196

Az y sorában álló számok állandóan növekednek. Ha ennek alapján vázolnánk fel a görbét, azt hihetnénk, hogy végig emelkedik. Valójában a lényeges dolgok jóval az előbb vizsgált intervallumon kívül történnek. Az analízis választ ad arra, hogy hol történik valami és mi történik ott. Az $y = 100x - x^2$ formulából azt kapjuk, hogy $y' = 100 - 2x$. Azt kérdezhetjük először, hogy vízszintes-e egyáltalán ez a görbe valahol? A görbe azon a helyen vízszintes, ahol y' értéke nulla. Így azt kell megnéznünk, hogy van-e olyan x érték, amelyre y' nulla. Az $x = 50$ érték éppen ilyen. Ez azt sugallja, hogy vizsgáljuk meg, mi történik ettől a helytől balra és jobbra. Ha a nagyobb, mint 50, akkor 2a nagyobb lesz, mint 100, és $100 - 2x$ negatív lesz. Így a görbe az $x = 50$ helytől jobbra lefelé halad. Ugyanígy láthatjuk, hogy y' pozitív, ha x kisebb, mint 50. Így a görbe az $x = 50$ értékig állandóan emelkedik. Most már lehet némi elképzelésünk a görbe alakjáról. Foglaljuk össze ismereteinket:

x értéke	50-nél kisebb	50	50-nél nagyobb
y' értéke jelentése	pozitív a görbe emelkedő	nulla a görbe vízszintes	negatív a görbe süllyedő

Ebből arra a következtetésre jutunk, hogy a görbe a 32. ábrán látható alakú.

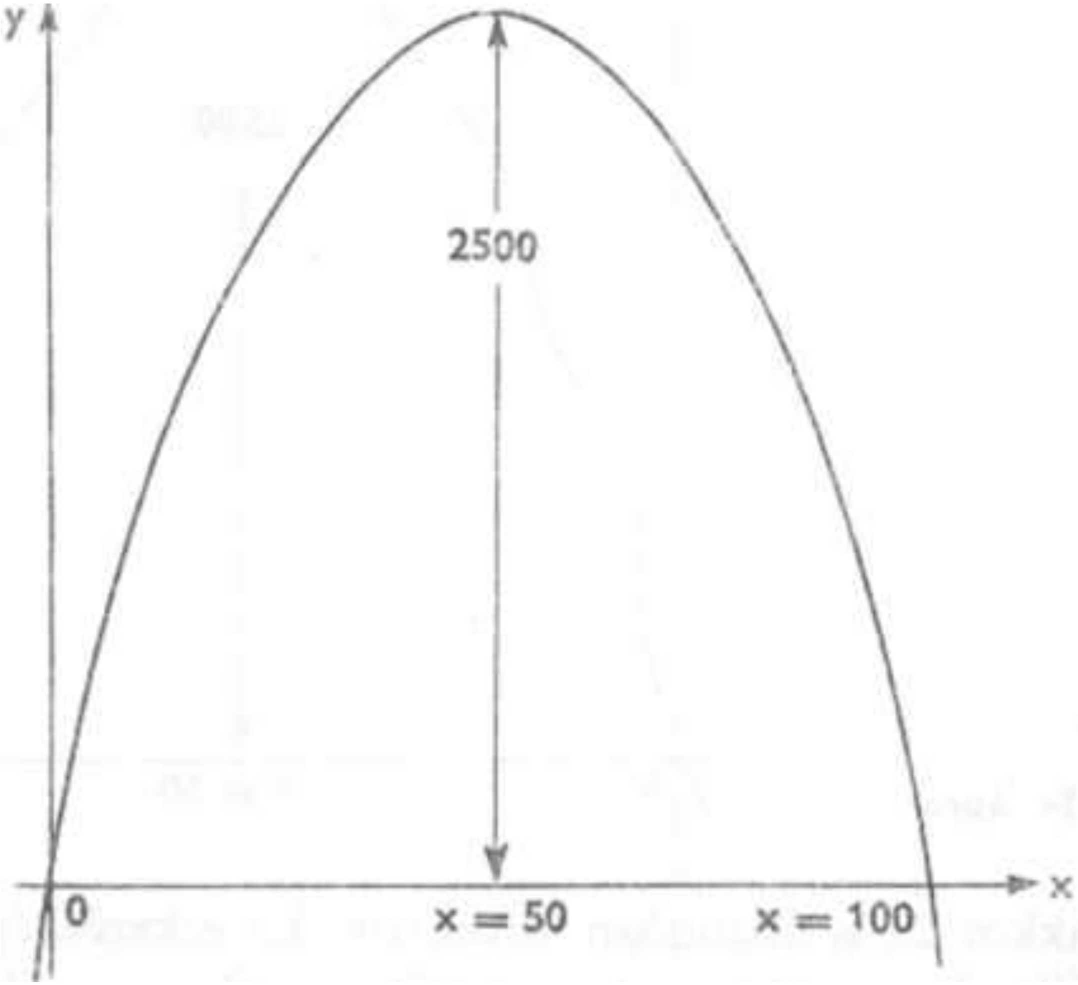


32. ábra

Ez az ábra megmutatja a görbe alakját. De maga a görbe valahol a levegőben lóg. Egyáltalán nem látjuk az *OX* és *OY* tengelyeket. Ha látni akarjuk, hogyan helyezkedik el a görbe a tengelyekhez képest, akkor hacsak röviden is, de vissza kell térnünk az elemi módszerhez, vagyis az eredeti, y-ra vonatkozó egyenletet nézzük, nem pedig az y'-re vonatkozó analitikus eredményt. Felveszünk egy vagy két kulcspontot és átfektetjük rajtuk a görbét. Problémát jelenthet annak eldöntése, hogy mely pontok felvétele adja a legtöbb információt a görbe helyzetéről anélkül, hogy túlságosan sokat kellene számolnunk. Mivel az $y = 100x - x^2$ eredeti egyenlet $y = x(100 - x)$ szorzatalakban is felírható, természetesen adódik, hogy azt a két x értéket vizsgáljuk, amelyre $y = 0$, nevezetesen az $x = 0$ és $x = 100$ értékeket. Az is természetes, hogy az $x = 50$ értéket is vizsgáljuk, hiszen itt van a „hegy” teteje. Ha a 0, 50 és 100 három x értéket vesszük fel, akkor a következő kis táblázatot kapjuk:

x	0	50	100
y	0	2500	0

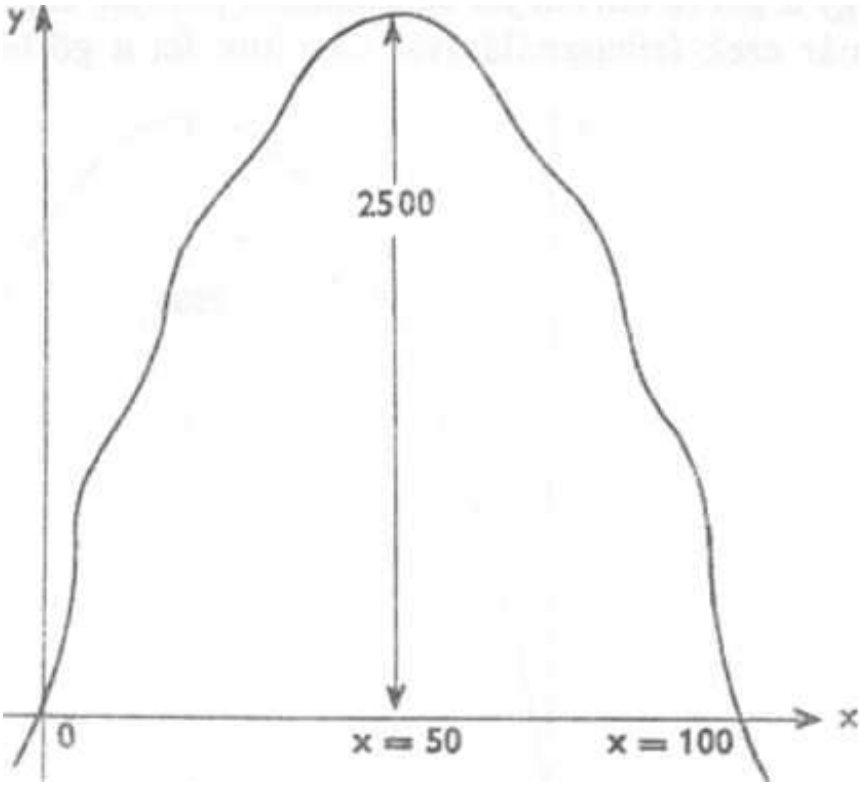
Így a görbe három jól használható pontját kapjuk, A 33. ábrán már ezek felhasználásával vázoltuk fel a görbét.



33. ábra

Az is lehet, hogy rajzunk némi bizonytalan sejtést is tartalmaz. Az eddig összegyűjtött ismeretek a 34. ábrán látható görbére is ráillenek. Ez a görbe is emelkedik, ha x kisebb, mint 50, és csökken, ha x nagyobb, mint 50. Ez a görbe is átmegy az előbbi három ponton.

Így tehát a grafikon olyan alakú is lehet, mint a 34. ábra, nemcsak olyan, mint a 33. ábra. Később tárgyalni fogunk egy olyan módszert, amely kizárja annak lehetőségét, hogy görbénk a 34. ábrán láthatóhoz hasonló legyen. Anélkül, hogy megvárnánk ezt a módszert, magunk is meggyőződhetünk arról, hogy görbénk sokkal inkább a 33. ábrán láthatóhoz hasonló, mint a 34. ábrán levőhöz. A 34. ábrán látható görbe „reszketegsége” azt jelenti, hogy a görbe meredeksége állandóan ingadozik, hol növekszik, hol csökken. A korábbiakban viszont a görbe meredekségét az $y' = 100 - 2x$ formulával írtuk le. Ebben a formulában a meredekség nem ingadozik. Ha x növekszik, akkor $2x$ is állandóan növekszik, következésképpen $100 - 2x$ állandóan csökken.



34. ábra

Az y' értéke $x = 0$ és $x = 50$ között 100-tól nulláig *állandóan csökken.* A görbe meredekségét y' méri, így a görbének ezen a szakaszán a meredekség állandóan csökken. Ahogy már korábban is mondtuk, egy kis óvatosság sosem árt; lehetőleg ne keverjük össze y-t az y'-vel. Az $x = 0$ és $x = 50$ értékek között y növekszik, y' viszont csökken. Képzeljünk el egy, grafikonunkhoz hasonló hegyet. Ha valaki a (0 ; 0) pontból el akar jutni az (50 ; 2500) pontig, akkor állandóan felfelé kell másznia. Ez felel meg annak, hogy y növekvő. A mászás azonban egyre könnyebb lesz. A hegy először majdnem függőleges, az y' meredekség 100. A hegy teteje viszont már egészen lapos, az y' meredekség nulla. A 34. ábrán $x = 0$ és $x = 50$ között felváltva követik egymást a könnyen és nehezen megmászható szakaszok. A 34. ábrán látható görbének ezen a szakaszán a meredekség nem lesz állandóan kisebb és kisebb, így ez a grafikon nem felel meg az $y = 100x - x^2$ egyenletnek. Ugyanígy, ha azt vizsgáljuk, hogyan változik a meredekség $x = 50$ és $x = 100$ között, akkor arra a következtetésre jutunk, hogy a 33. ábra jobb képet ad a helyzetről, mint a 34. ábra. A grafikon többi, az ábrán nem látható részeivel kapcsolatban, vagyis negatív és 100-nál nagyobb x értékek esetén ugyanilyen érvelést alkalmazhatnánk.

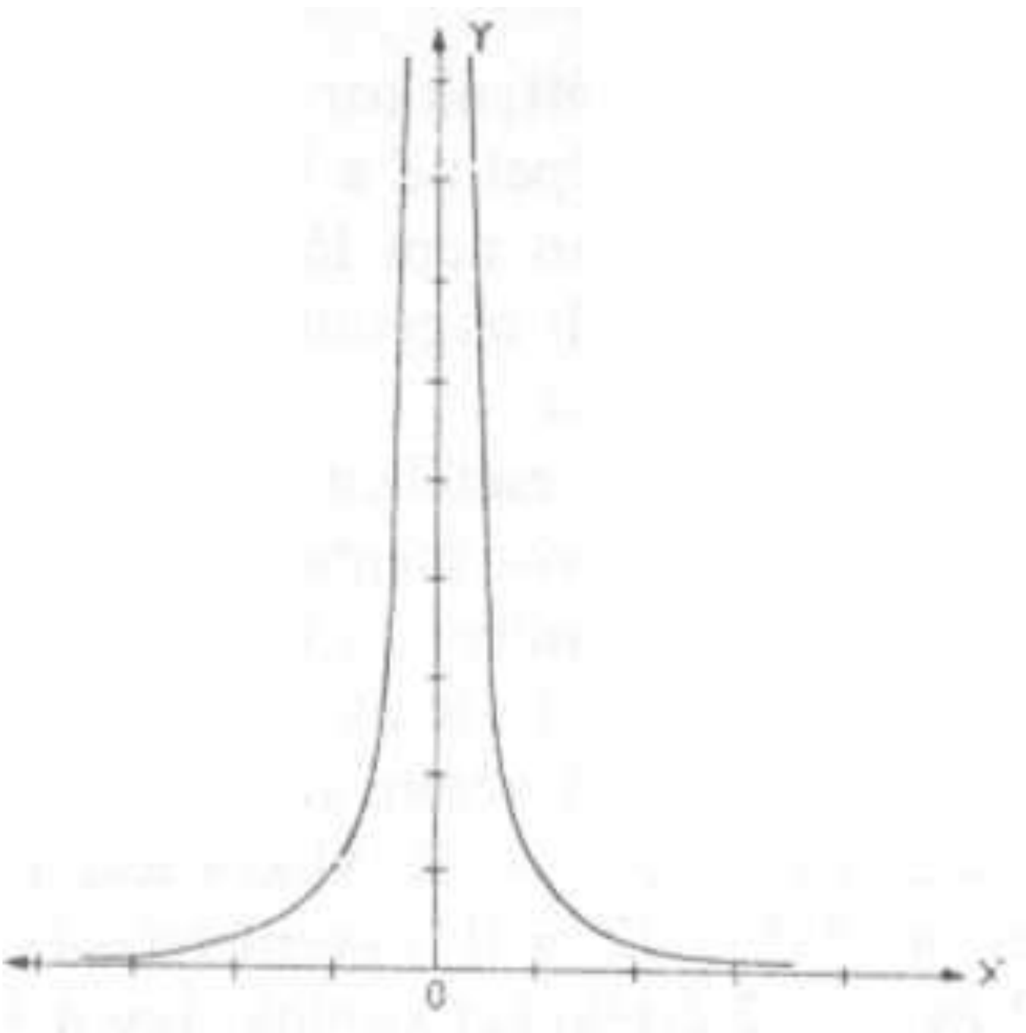
Egyszerű grafikonok esetében általában akkor járunk el a legcélszerűbben, ha először meghatározzuk az y' meredekséget, és megnézzük, hogy ez milyen x értékek mellett lesz nulla. Ezután megnézhetjük, mi történik két-két ilyen x érték között.

Például, szeretnénk felvázolni *az* $y = x^3 - 12x$ grafikonját. Ebben az esetben $y' = 3x^2 - 12$. Mikor lesz y' nullával egyenlő? Írjuk fel a $3x^2 - 12 = 0$ egyenletet, és oldjuk meg. Az $x = -2$ és $x = 2$ értékeket kapjuk. Így a következő információink vannak:

x	......	-2	......	2	......
y'	......	0	......	0	......

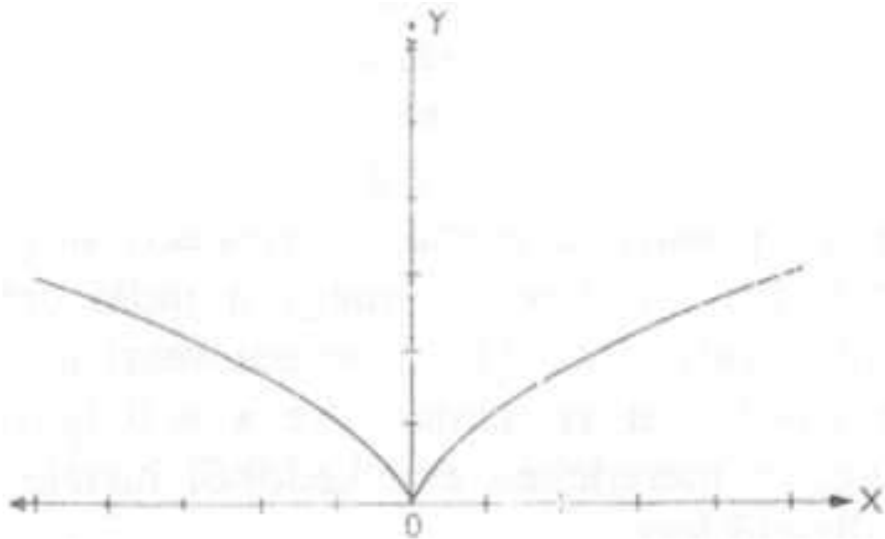
Most három intervallumot kell vizsgálnunk. Milyen lesz *y'*, ha x kisebb, mint –2? Milyen lesz y' az x = –2 és x = 2 értékek között? Milyen lesz *y'*, ha x nagyobb, mint 2?

Természetes, hogy éppen ezeket az intervallumokat vizsgáljuk, hiszen ha *y'* pozitívból negatív lesz, akkor várhatjuk, hogy közben valahol felveszi a nulla értéket. Persze ez nincs mindig így. Ha az $y = 1/x^2$ grafikonját akarjuk elkészíteni, akkor azt tapasztaljuk, hogy a görbe negatív x értékek esetén emelkedő (*y'* pozitív) és pozitív x értékekre süllyedő (y' negatív) (35. ábra). Így, amikor x átmegy a nulla értéken, akkor *y'* pozitívból negatív lesz. De *y'* sosem veszi fel a nulla értéket, a görbe sehol sem vízszintes. Az x = 0 helyen áthaladva a görbe nagyon meredeken emelkedőből hirtelen nagyon meredeken süllyedő lesz.



35. ábra – Az y = 1/x2 grafikonja

Ilyen ugrások ezek szerint még olyan egyszerű kifejezések esetén is előfordulhatnak, mint $1/x^2$. Az $y = \sqrt[3]{x^2}$ kifejezés pedig olyan, hogy grafikonja a meredeken süllyedőből hirtelen meredeken emelkedővé válik anélkül, hogy közben vízszintes lenne. A legegyszerűbb algebrai kifejezések, mint például $y = x^2$ vagy $y = x^3 - 12x$, nem viselkednek ilyen csúnyán. Így, ha az y' meredekségét ilyen egyszerű formula adja meg (vagyis a matematika nyelvén, ha polinomokkal van dolgunk), akkor az értékek fokozatosan változnak. Ha y' pozitívból negatív lesz, akkor közben fel kell vennie a nulla értéket; ugyanez igaz, ha y' negatívból pozitív lesz.



36. ábra – Az y = 3√x2 grafikonja

A kérdésünkben szereplő $y' = 3x^2 - 12$ így viselkedik. Ezt így is felírhatjuk: $y' = 3(x^2 - 4)$. Ha az x a 2-től jobbra, vagy a –2-től balra helyezkedik el, akkor x^2 nagyobb, mint 4, és y' pozitív. Így a szélső részeken y' pozitív. Az $x = -2$ és $x = 2$ értékek között azonban x négyzete kisebb, mint 4. (Győződjünk meg erről.) Így a középső részben y' negatív. Így táblázatunkat az alábbiak szerint egészíthetjük ki:

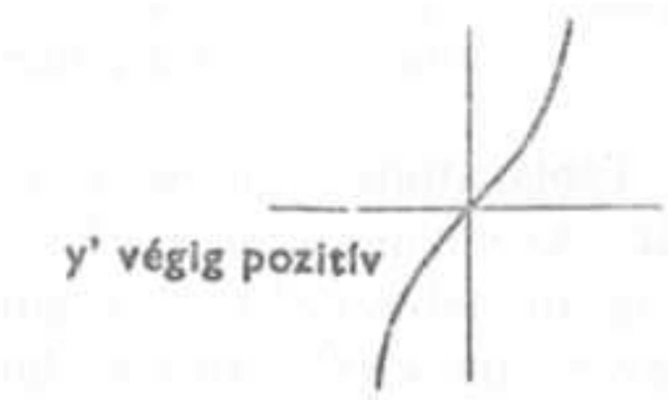
x	......	-2	......	2	....
y'	pozitív	0	negatív	0	pozitív
jelen-tés	a görbe emelkedő	a görbe víz-szintes	a görbe süllyedő	a görbe víz-szintes	a görbe emelkedő

Táblázatunk segítségével jól el tudjuk képzelni a görbe alakját. Azonban, mint korábbi példánkban, most sem tudjuk, hogyan helyezkedik el a görbe a tengelyekhez képest. Ezért helyes, ha kiszámítjuk és felvázoljuk a görbe néhány kulcspontját. Igen hasznos lehet azoknak a helyeknek – a hegytetők legmagasabb és a völgyek legmélyebb pontjainak – ismerete, ahol a görbe vízszintes. Ezért kiszámítjuk az $x = -2$ és $x = 2$ értékekhez tartozó y értékeket. Az $y = x^3 - 12x$ egyenletből könnyen látható, hogy a görbe átmegy a kezdőponton, ugyanis $x = 0$ helyettesítéssel $y = 0$ adódik. Vannak-e más pontok is, amelyekre $y = 0$? Hol vannak ezek a pontok?

Példa. Folytassuk a fenti feladat megoldását, és próbáljuk meg felvázolni az $y = x^3 - 12x$ grafikonját.

Ha egy ilyen jellegű feladat során egymásnak ellentmondó eredményekhez jutunk, ha a pontok a megadott irányokban csak különlegesen bonyolult görbével köthetők össze, akkor okosan tesszük, ha újra ellenőrizzük számításainkat. A különböző forrásokból eredő információknak egyetlen egyszerű görbéhez kell illeszkedniük.

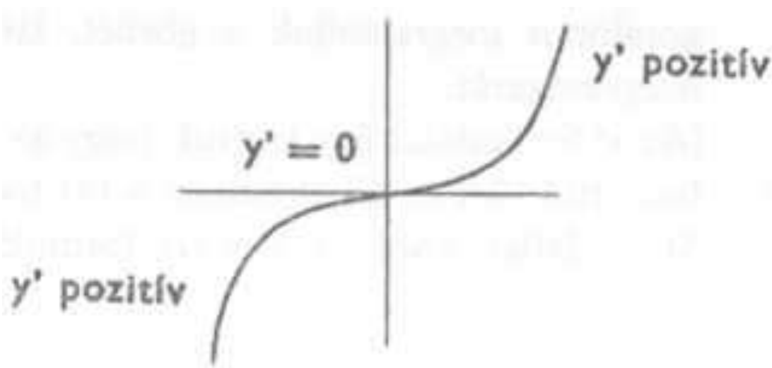
Megtörténhet, hogy hiába keresünk olyan helyeket, ahol $y' = 0$. Tekintsük például az $y = x^3 + x$ grafikonját. Itt $y' = 3x^2 + 1$. Amikor azt keressük, mikor lesz $y' = 0$, akkor a $3x^2 + 1=0$ egyenlet megoldásával kell próbálkoznunk. Ennek az egyenletnek azonban nem találjuk a megoldását. (A komplex számokat ismerő olvasók számára ez csak annyit jelent, hogy nincs valós megoldás. Grafikonunkra nem tudunk képzetes koordinátájú pontokat rajzolni; így a grafikus ábrázolás szempontjából az egyenlet megoldásaként csak valós számok jöhetnek számításba.) A tanulók ilyenkor gyakran tanácstalanul állnak, nem tudják, hogyan haladjanak tovább. Pedig ennek a jelentése igen egyszerű. A görbe sehol sem vízszintes; y' sehol sem nulla és sehol sem vált előjelet. Bármilyen x értéket választunk, y' értéke mindig pozitív. Ez azt jelenti, hogy a görbe végig emelkedő, és valójában a 37. ábrán látható görbéhez hasonló.



37. ábra

Semmi különös sincs abban, hogy az $y'=0$ egyenletnek egyetlen megoldását sem találtuk. Valóban, ha megfigyeljük a görbe alakját, nagyon meglepő volna, ha találnánk olyan x értéket, amely kielégítené ezt az egyenletet. Ilyen x értékeknek a görbén vízszintes helyek felelnének meg, ezen a görbén pedig nincsenek ilyenek.

Az eddig vizsgált példák mindegyikében csak hegyek tetején vagy völgyek mélyén fordultak elő vízszintes helyek, vagyis olyanok, amelyekben $y'=0$. Van azonban egy másik lehetőség is. A 38. ábra grafikonján a görbe eleinte emelkedik, majd egy kis tétovázás után újra emelkedik. Így y' először pozitív, egy pillanatra nulla, majd újra pozitív. A mozgás kifejezéseivel élve, görbénk olyan gyalogos vagy előrehaladó kocsi mozgását ábrázolja, amelyet valami akadály megállásra kényszerített, de amely azután rögtön továbbindul.



38. ábra

Gyakorlatok

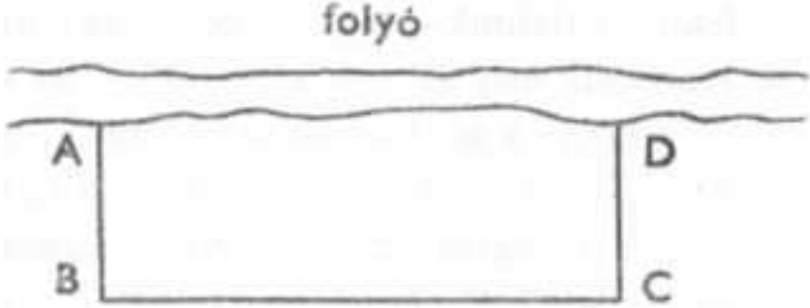
1. Mutassuk meg, hogy az $y = x^3$ grafikonja a 38. ábrán látható görbéhez hasonló.
2. Vázoljuk fel *az* $y = 6x - x^2$ grafikonját.
3. Vázoljuk fel *az* $y = x^2 - 6x$ grafikonját.
4. Vázoljuk fel az $y = x^2 - 2x - 8$ grafikonját.
5. Vázoljuk fel az $y = x^3 - 6x^2$ grafikonját.
6. Van-e olyan valós szám, amely kielégíti a $3x^2 - 6x + 9 = 0$ egyenletet? Találunk-e olyan x értékeket, amelyekre $3x^2 - 6x + 9$ negatív? Keressük meg az $y = x^3 - 3x^2 + 9x$ kifejezésnek megfelelő y'-t. Van-e olyan hely a görbén, ahol y' nulla? Van-e olyan hely, ahol y' negatív? Az $y = x^3 - 3x^2 + 9x$ grafikonja fő tulajdonságait tekintve a 30., 37. és 38. ábrákon látható görbék valamelyikéhez hasonlít. Melyikhez? Eredményünk ellenőrzésére készítsünk táblázatot a –3 és 3 közötti x értékekekhez tartozó y értékekről, és vázoljuk fel a görbét azokkal a módszerekkel, amiket már az analízis tanulása előtt ismertünk.

(Megoldás: $3x^2 – 6x + 9 = 3(x – 1)^2 + 6$, ami sehol sem nulla és sehol sem negatív. Ha $y = x^3 – 3x^2 + 9x$, akkor $y' = 3x^2 – 6x + 9$. Így y' mindig pozitív. A görbe emelkedő; emlékeztet a 37. ábrára.)

7. Mutassuk meg, hogy az $y – x^4 – 2x^2 + 1$ grafikonján a (0; 1) pontban hegycsúcs, a (–1; 0) és (1; 0) pontokban a völgyek legmélyebb pontjai vannak. Vázoljuk fel a görbét.
8. Egy paradoxon – ha $y = 1/x$, akkor $y' = 1/x^2$. Mivel x pozitív és negatív értékei esetén x^2 mindig pozitív, így y' mindig negatív, vagyis a görbe mindig süllyed, sosem emelkedik. Az $y = 1/x$ görbéje átmegy a (– 1; – 1) és a (2; 1/2) pontokon, amint ezt könnyen ellenőrizhetjük. Ha ezeket a pontokat felvázoljuk, azt látjuk, hogy a második pont az elsőtől jobbra és annál magasabban helyezkedik el. De ha a görbe mindig süllyed, ha jobbra haladunk, akkor azt kellene találnunk, hogy pontjai egyre alacsonyabban helyezkednek el. Hogyan lehetséges az, hogy állandóan süllyedő görbe esetén magasabbra jutunk, mint ahonnan indultunk? Ha az $x = – 1$ és $x = 2$ pontok között gondosan megrajzoljuk a görbét, látni fogjuk furcsa eredményünk magyarázatát. [Az y' formuláját úgy kaptuk, hogy az $y = 1/x$ formulát $y = x^{1}$ alakban írtuk fel, és alkalmaztuk a (4) formulát. Hasonlítsuk össze ezt az 51. oldallal, ahol az $s = 1/t$ formulához tartozó s'-t vizsgáltuk.]

A dolgok legjobb elrendezése

Majdnem minden elemi analízis könyvben vannak ilyen feladatok: „Egy farmernek 100 m hosszúságú kerítéshez van anyaga. Farmját keresztül szeli egy folyó. A folyó partján olyan nagy területet szeretne bekeríteni, amekkorát csak lehet anélkül, hogy több kerítést vásárolna. Hogyan kell felállítania a kerítést? A folyó egyenes, a bezárt területnek téglalap alakúnak kell lennie.” (Lásd a 39. ábrát.)



39. ábra

Hogy volt-e olyan farmer, akinek a valóságban ilyen problémát kellett megoldania, azt nem tudom, de bizonyos, hogy ilyen típusú problémák az ipari tervezésben előfordulnak. Keressük valami elintézésének, elrendezésének leghatásosabb útját. A valóságos problémák sokkal bonyolultabbak, és lehetséges, hogy megoldásukhoz műszaki vagy tudományos ismeretekre is szükség van. A farmer kerítésének problémáját bárki könnyen megértheti; és ezt a feladatot úgy tekinthetjük, mint a problémák egy széles és fontos osztályának különösen egyszerű példáját, amellyel bemutathatjuk, milyen jellegű problémákat oldhatunk meg az analízis segítségével.

Farmerünknek valójában csak azt kell eldöntenie, hogy milyen hosszú legyen az *AB* szakasz. Ha például azt szeretné, hogy az *AB* szakasz 10 m hosszúságú legyen, akkor *CD* is csak 10 m hosszúságú lehet és így a *BC* szakaszra 80 m kerítés marad. A bezárt terület ebben az esetben 800 m^2.

A farmer két szélső eset között választja meg tetszése szerint az oldalak hosszúságát. Az egyik szélső esetben az *AB* szakaszt nullának választja. Ekkor *CD* is nulla lesz és a 100 m hosszúságú kerítés teljes egészében a *BC* oldalra jut. Ez adná a leghosszabb partszakaszt, de a bezárt terület nulla volna. A másik szélső esetben *AB* és *CD* mindegyikét 50 m-nek venné, és ekkor *BC*-re nem maradna semmi. A bezárt terület újra nulla volna. A legjobb elrendezésnek nyilván valahol a két eset között kell lennie, nem szabad sem a lehető leghosszabbra, sem a lehető legszélesebbre választani a téglalapot, valamilyen egyensúlyt kell találni a hosszúság és a szélesség között.

Ezt a problémát az analízis felhasználása nélkül, grafikon készítésével vagy egyszerűen táblázat felírásával is megoldhatjuk. Különböző *AB* értékeket vehetnénk fel, kiszámítanánk, mekkora területértékeket adnak ezek, és így próbálgatással megkapnánk a legjobb elrendezést. Ha grafikont készítenénk, megkereshetnénk a grafikon legmagasabb pontját; ez adja meg az elérhető legnagyobb területet.

Az analízis azonban, amint láttuk, gyors módszert ad a grafikonok készítésére, anélkül, hogy táblázat készítésével kellene bajlódnunk. Így az analízis nagyon szép megoldást ad erre a problémára.

Amint láttuk, a farmernek csak az *AB* hosszúságát kell megválasztania. Tegyük fel, hogy az *AB* szakasz x méter hosszúságú. Ekkor *CD* hosszúsága is x méter. Erre a két oldalra $2x$ métert használtunk fel, így a *BC* oldalra $100 – 2x$ méter kerítés marad. A bekerített téglalap ekkor $100 – 2x$ méter hosszúságú, x méter szélességű. Területe ennek megfelelően $x(100 – 2x)$, vagy beszorozva, $10x – 2x^2$ négyzetméter. A területet y-nal jelölve

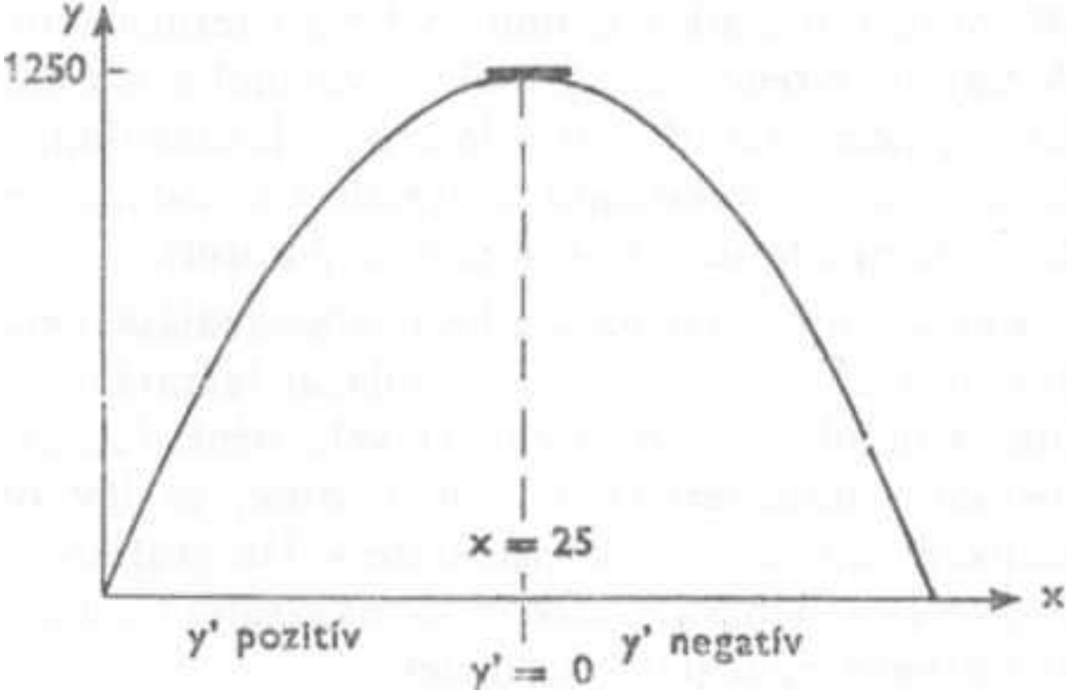
$$y = 100x - 2x^2.$$

Azt szeretnénk, hogy y a lehető legnagyobb legyen, vagyis a grafikon hegycsúcsát szeretnénk megkeresni. Korábban alkalmazott módszerünk alapján

$$y' = 100 – 4x.$$

Így y' az x = 25 érték esetén lesz nulla. Ha x kisebb, mint 25, akkor y' pozitív, ha nagyobb, mint 25, akkor y' negatív (40. ábra).

40. ábra



40. ábra

Így a grafikon az $x = 25$ érték eléréséig emelkedik, az $x = 25$ értéknél vízszintes, és ezután süllyedő. Az $x = 25$ értéknél nyilván hegycsúcs, maximum van. Ekkor *AB* és *CD* mindegyike 25 méter, *BC* pedig 50 méter, és a bezárt terület 1250 négyzetméter. Ez a legnagyobb terület, amit kaphatunk.

Mint korábban már említettük, sok ilyen típusú probléma van. Majdnem minden elemi analízis könyvben szerepel a következő, jól ismert probléma és megoldása: milyen alakú legyen egy adott térfogatú, mondjuk egy literes konzervdoboz, hogy a doboz elkészítéséhez a lehető legkevesebb fémre legyen szükség? A konzervdobozokat azonban szinte sosem készítették ily módon optimális alakúra, még a háború alatt sem, amikor különösen fontos volt, hogy minél kevesebb fémet használjanak fel. Vannak, akik azt állítják, hogy ha egyszerűen csak az anyagtakarékosság szempontjait vesszük figyelembe, akkor nehezebb volna a konzervdobozok csomagolása és szállítása. Hogy valóban így van-e, vagy pedig a konzervgyárosok nem vették komolyan az analízist, azt eddig nem sikerült megtudnom.

HETEDIK FEJEZET – Gyorsulás és görbület

Ha $4x^3 + 5x^2$ típusú kifejezésekkel találkozunk, akkor tudjuk, hogyan határozhatjuk meg növekedésének mértékét. A fenti kifejezés növekedésének mértéke $12x^2+10x$. Ez az új kifejezés ugyanolyan típusú, mint amilyenből kiindultunk. Feltehetjük most azt a kérdést, hogy „Milyen mértékben növekszik a $12x^2 + 10x$ kifejezés?" A válasz nem nehéz: a növekedés mértéke $24x + 10$. A számítás könnyen elvégezhető. De mi az értelme ennek? Mit ad meg a $24x + 10$ kifejezés?

Vizsgálhatjuk ezt a problémát mozgásokkal és görbék alakjával kapcsolatban. Először néhány, mozgással kapcsolatos példát veszünk. Kezdjük azzal, amit a korábbiakban már nagyon részletesen megvizsgáltunk, az $s = t^2$ szabállyal. Ebben az esetben $s' = 2t$, ahol s' az s növekedésének mértéke, vagyis a test v sebessége. Mindegy, hogy ezt $s' = 2t$ vagy $v = 2t$ alakban írjuk fel. Most azt kérdezzük, milyen gyorsan növekszik a $2t$ kifejezés? Vagy másképp fogalmazva: milyen gyorsan növekszik a v sebesség? Természetes jelölési módként adódik v', amivel v növekedésének mértékét jelöljük. Mivel $2t$ növekedésének mértéke 2, ezért $v' = 2$. Mindezt összegyűjtve ezeket kapjuk:

$$s = t^2,$$

$$v = s' = 2t,$$

$$v' = 2.$$

Az utolsó egyenlet, a $v' = 2$, azt adja meg, hogy milyen gyorsan növekszik a sebesség. A sebesség növekedésének mértékét gyorsulásnak szoktuk nevezni. A gyorsulást rendszerint a betűvel jelölik, mi is ezt a jelet használjuk.

Most már három mennyiségre kell gondolnunk, a megtett útra, a sebességre és a gyorsulásra; minden kijelentésünkben gondosan ügyelnünk kell arra, hogy az s, v vagy a mennyiségekről állítunk-e valamit.

Kocsiban ülve hova nézünk, ha meg szeretnénk tudni s értékét? A kilométerszámlálóra vagy az út mentén látható kilométerkövekre. Az s értéke arra ad választ, hogy kiindulási helyünktől milyen messzire jutottunk. Hogyan tudnánk megmondani v értékét? Legegyszerűbben úgy, hogy leolvassuk a sebességmérőről. Ha a sebességmérő nem működik, megfigyelhetjük azt is, hogy milyen gyorsan növekszik a kilométerszámláló állása, vagy az ablakon kinézve megfigyelhetjük, milyen gyorsan suhannak el mellettünk a kilométerkövek. A sebességmérő közvetlenül megadja a sebesség értékét (kivéve, ha nem működik), a többi módszer viszont függ attól, hogyan becsüljük s'-t, a megtett út növekedésének mértékét. Nézzük, mit mondhatunk az a gyorsulásról? Honnan olvashatjuk le a értékét? Legjobb tudomásom szerint egyetlen kocsinak sincs olyan műszere, amelyről közvetlenül leolvasható a gyorsulás értéke. De mivel $a = v'$ a sebesség növekedésének mértéke, adhatunk becslést az a értékére, ha a sebességmérő mutatójára nézünk, és megfigyeljük, hogy ***milyen gyorsan mozog*** a mutató. A gyorsulást *nem* tudjuk egyszerűen leolvasni. Az a kocsi, amelyik 100 km/ó egyenletes sebességgel halad, elég gyorsan megy, gyorsulása mégis nulla, a sebességmérő mutatója a 100 km/ó jelnél nyugalomban van. Másrészt viszont egy egészen lassan mozgó kocsinak is igen nagy lehet a gyorsulása. Ha kocsink nyugalmi helyzetből indul, a sebességmérő mutatója nullán áll, nem sokkal később 5 km/ó-t, majd 10 km/ó-t mutat stb. A sebesség kicsi, de növekszik. Ha egészen lenyomjuk a gázpedált, akkor a sebesség igen rövid idő alatt növekszik 5 km/ó-ról 10 km/ó-ra; ebben az esetben az *a* gyorsulás igen nagy lehet, noha a sebesség még egészen kicsi.

Másképp is adhatunk becslést a gyorsulásra. Ha egy kocsi nagyon hirtelen gyorsul, akkor az utasok úgy érzik, hogy valamilyen erő az ülés háttámlájához szorítja őket. Ha viszont a vezető hirtelen rálép a fékre, az utasok úgy érzik, hogy kirepülnek a szélvédőn keresztül. Ezek szerint a gyorsulás érezhető és zavaró tényező. A fékezés negatív gyorsulást jelent. A nagy gyorsulás nagy erőt jelent. Nem meglepő ezért, hogy a mechanikában a testre ható erőt nem a test *s* helyzetével, nem is annak *v* sebességével, hanem az *a* gyorsulással mérik. Földünk Nap körüli pályáján mintegy 1600 km/perc sebességgel halad, de ezt nem érezzük. Csak akkor éreznénk, ha beleütköznénk egy másik égitestbe, és így sebességünk hirtelen megváltozna.

Hasznos, ha a különböző helyzeteket átgondoljuk, és megnézzük, hogyan írhatók le ezek *s*, *v* és *a* segítségével. Például:

1. *Defekt.* A kocsi az út szélén áll. A kilométerszámláló állása nem változik, vagyis *s* állandó. A sebesség nulla. A gyorsulás is nulla. Egyenletekkel:

$$s = c, \text{ ahol } c \text{ állandó},$$

$$v = 0,$$

$$a = 0.$$

2. *Állandó sebességű mozgás. A* kocsi mondjuk 60 km/ó állandó sebességgel halad egy kis forgalmú, egyenes úton. Az utat az s = 60? szabállyal írhatjuk le. (Más szabály is szerepelhetne, például 60t + 100 vagy 60t – 30, attól függően, hogy mikortól mérjük az időt.) A sebesség 60. Mivel a sebesség állandó, gyorsulás nincs.

$$s = 60t,$$

$$v = 60,$$

$$a = 0.$$

Figyeljük meg, hogy mindegyik kifejezés a fölötte álló növekedésének mértékét adja meg, és itt újból emlékeztetjük az olvasót arra, hogy egy állandó kifejezés növekedésének mértéke nulla.

3. *Gyorsuló mozgás.* Egy kocsi egyre nagyobb sebességgel halad előre. Most nem elemezzük a robbanómotor tulajdonságait, hanem elővesszük a növekvő sebességre vonatkozó állandó példánkat, az $s = t^2$ szabályt. Ekkor

$$s = t^2,$$

$$v = 2t,$$

$$a = 2.$$

Itt a gyorsulás állandó, ami azt jelenti, hogy a kocsit mozgató erő nagysága állandó. Erősen kételkedem abban, hogy egy robbanómotor viselkedhet pontosan ennek megfelelően. Talán jobban tennénk, ha azt feltételeznénk, hogy a kocsi üresbe kapcsolva egy hosszú, egyenletesen lejtő úton lefelé gurul. Ebben a példában jobban boldogulnánk, ha egységnek a métert és a másodpercet választanánk. Nagyon kényelmetlen a gyorsulást „km/ó óránként" egységben mérni.

4. *Fékezés.* A kocsi lelassít, majd megáll. Sokféle szabály írhatná ezt le. Válasszuk az ilyen típusú mozgást leíró szabályok közül a lehető legegyszerűbbet, legyen mondjuk: $s = 10t - t^2$ a $t = 0$ és $t = 5$ közötti időintervallumban. (Az alábbi vizsgálat megmutatja, hogy ez a mozgás valóban lassuló.) A változások mértékét vizsgálva a következőket kapjuk:

$$s = 10t - t^2,$$

$$v = 10 - 2t,$$

$$a = -2.$$

Úgy gondolom, a középső egyenlet adja a legtisztább képet arról, hogy mi történik. Kezdetben $t = 0$ és $v = 10$, vagyis a fékezés kezdetekor a kocsi másodpercenként 10 métert haladt. Öt másodperccel később $t = 5$ és $v = 0$, vagyis a kocsi nyugalmi helyzetbe került. Ha kiszámoljuk a közbülső időpontokhoz tartozó v értékeket, a következő táblázatot kapjuk:

t	0	1	2	3	4	5
v	10	8	6	4	2	0.

Vagyis a kocsi sebessége szép szabályosan csökken, v értéke minden másodpercben 2-vel kisebb lesz. És pontosan ezt mondja a harmadik egyenlet, az $a = -2$. A fékezés közben mennyi a kocsi által megtett út? Erre a kérdésre az első egyenlet ad választ. Ha $t = 0$, akkor $s = 0$. Ha $t = 5$, akkor $s = 25$. Vagyis a kocsi 25 méter utat tesz meg, amíg nyugalmi helyzetbe kerül; ez nagyon óvatos fékezésnek felel meg. Ha a fenti egyenletbe a $t = 6$ értéket helyettesítjük, $v = -2$ adódik, ami azt jelenti, hogy a kocsi visszafelé kezdett mozogni. Természetesen ez helytelen okoskodás volna. A fékezés lassítja a kocsi mozgását, de semmiképpen sem eredményezi azt, hogy a nyugalmi helyzet elérése után az ellenkező irányban kezd el mozogni. Az $s = 10t - t^2$ szabály csak a fékezés ideje alatt, $t = 0$ és $t = 5$ között írja le a kocsi mozgását. Nincs jogunk feltételezni, hogy akár $t = 0$ előtt, akár $t = 5$ után érvényben maradna.

Elképzelhető azonban olyan helyzet is, amelyben ez a szabály ugyanúgy alkalmazható $t = 5$ után, mint $t = 5$ előtt. Tegyük fel, hogy a kocsi egyenletesen emelkedő úton felfelé halad. A vezető – hogy kímélje a féket – úgy dönt, hogy üresbe kapcsol, és megvárja, amíg a kocsi a gravitációs erő hatására magától megáll. Ha azonban elfelejti behúzni a kéziféket abban a pillanatban, amikor a kocsi megáll, akkor a kocsi a lejtőn vissza fog gurulni, és ha a vezető ezt nem akadályozza meg, vissza fog térni arra a helyre, ahol a mozgást vizsgálni kezdtük. Ebben az esetben az $s = 10t - t^2$ szabályt a $t = 0$ és $t = 10$ közötti időintervallumban alkalmazhatjuk a kocsira. A következő táblázatban megtalálhatjuk az ennek megfelelő út-, sebesség- és gyorsulásértékeket:

Idő, *t*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Helyzet, *s*	0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0
Sebesség, *v*	10	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8	-10
Gyorsulás, *a*	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2

A táblázat mindegyik sora másféle információt tartalmaz. Az s sora megmutatja, hogy hol van a kocsi az adott időpontban. Figyeljük meg, hogy ugyanott fejeződik be a mozgás, ahol elkezdődött. A v sora megmutatja, hogy a kocsi milyen gyorsan halad. Kezdetben másodpercenként 10 métert tesz meg; 5 másodperc eltelte után egy pillanatra nyugalmi helyzetbe kerül, a végén pedig visszafelé gurul ugyanolyan gyorsan, mint ahogyan kezdetben felfelé haladt. A harmadik sorban, az a sorában, végig ugyanazt a számot, a -2-t találjuk. Ez azt jelenti, hogy a gravitáció mindig ugyanakkora erővel húzza vissza a kocsit.

A fenti táblázatban az s, v és a betűkkel jelöltük a távolságot, a sebességet és a gyorsulást. A v sebesség megmutatja, milyen gyorsan növekszik s, az a gyorsulás megmutatja, milyen gyorsan növekszik v. Az analízis jelölésével ez, amint már korábban láttuk, így írható: $v = s'$ és $a = v'$. Az $a = v'$ egyenletben felhasználhatjuk azt, hogy $v = s'$. Ha v helyébe s'-t írunk, akkor azt kapjuk, hogy $a = s''$. Ezt az utóbbi egyenletet úgy fogalmazhatjuk meg, hogy *a* megadja *s* növekedése növekedésének mértékét. A továbbiakban a távolság, a sebesség és a gyorsulás jelölésére *s, v* és *a* helyett az *s, s'* és s" jeleket alkalmazzuk. A grafikonoknál pedig az *y, y'* és *y"* jelekkel találkozunk. Az *y'* azt mutatja meg, hogy milyen gyorsan növekszik az *y;* az y" pedig azt mutatja meg, hogy milyen gyorsan növekszik az *y'*. Adott formulák esetében *y'* és y" meghatározása nagyon egyszerű. Például, tegyük fel, hogy $y = x^5$. Mi lesz y' ? A korábbiakból már tudjuk, hogy x^5 növekedésének mértéke $5x^4$. És mi lesz y" ? Az y" megadja az *y'* növekedésének mértékét. De $y' = 5x^4$. Tudjuk, hogy $5x^4$ növekedésének mértéke $20x^3$. Így $y'' = 20x^3$. Semmivel sem nehezebb y'-ből y"-*t* meghatározni, mint y-ból *y'-t* – már ami a számítások elvégzését illeti. A következő feladatunkban értelmezzük ezeket a számításokat. Lássuk, mit jelent az y" a grafikonokban. Azzal kezdjük, hogy összegyűjtjük a mozgásokkal kapcsolatban az előbb vizsgált négy példát. Mindegyik mozgástípust leírjuk *s, s'* és *s"* segítségével; szavakkal is leírjuk ezeket; megadjuk a megfelelő grafikont, és az *s, s', s"* mennyiségekről kapott információinkat megismételjük olyan formában, hogy grafikonokra is alkalmazhatók legyenek, vagyis *y, y', y"* segítségével kifejezve. A következő táblázatot kapjuk:

A mozgás típusa	Út, s Sebesség, s' Gyorsulás, s''	Grafikon	Grafikon az y, y', y'' mennyiségekkel kifejezve
Nyugvó test	$s = c$ $s' = 0$ $s'' = 0$	41. ábra	$y = c$ $y' = 0$ $y'' = 0$

41. ábra

Állandó sebességű mozgás

$$s = 60t \qquad s' = 60 \qquad s'' = 0$$

42. ábra

$$y = 60x \qquad y' = 60 \qquad y'' = 0$$

42. ábra

Gyorsuló mozgás

$$s = t^2 \qquad s' = 2t \qquad s'' = 2$$

43. ábra

$$y = x^2 \qquad y' = 2x \qquad y'' = 2$$

43. ábra

Fékezés

$$s = 10t - t^2 \qquad s' = 10 - 2t \qquad s'' = -2$$

44. ábra

$$y = 10x - x^2 \qquad y' = 10 - 2x \qquad y'' = -2$$

44. ábra

Azt már tudjuk, hogy *y'* mit jelent; az emelkedésről ad információt, arról, hogy milyen meredek a görbe. De mit jelent **y”**? Mindenekelőtt lássuk, mit *nem* jelent. Egyes tanulók néha összekeverik a dolgokat, és azt mondják, hogy „Ha *y''* nulla, akkor a görbe vízszintes”. Ez persze nem igaz. A fenti táblázat első két grafikonja, a 41. és 42. ábra esetében *y''* mindvégig nulla. Igaz, hogy a 41. ábra mindvégig vízszintes vonalat mutat, de a 42. ábrán is nulla az y'' , és ez a görbe nyilvánvalóan emelkedő, nem vízszintes. Mivel y'' mind a 41., mind a 42. ábra esetében nulla, ezért y'' = 0 a 41. és 42. ábrák valamilyen *közös* tulajdonságát kell, hogy jelentse.

VIZSGÁLAT

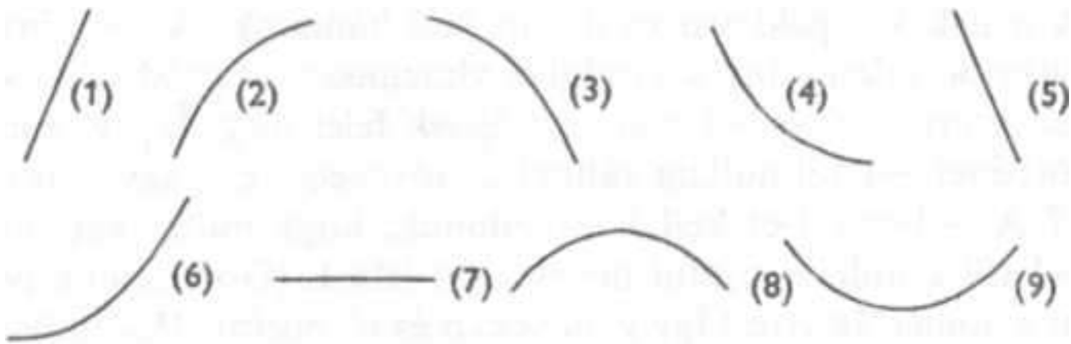
Vázoljunk fel néhány grafikont, például az $y = x$; $y = 2x$; $y = 2x + 3$; $y = 6 - 2x$; $y = -x$; $y = x + 2x^2$; $y = x + x^2$; $y = x - x^2$; $y = x - 2x^2$ grafikonjait. Mindegyik esetben számítsuk ki az y''-*t*.

Gyűjtsük össze grafikonjainkat a következő három csoportba:

- A típus – olyan grafikonok, amelyekre mindvégig $y'' = 0$.
- B típus – olyan grafikonok, amelyekre y'' mindvégig pozitív.
- C típus – olyan grafikonok, amelyekre y'' mindvégig negatív.

Az A típusú grafikonoknak van egy olyan tulajdonsága, amely megkülönbözteti őket a B és C típusúaktól. Mi ez a tulajdonság? Ugyanígy a B típusú grafikonoknak is van egy közös megkülönböztető tulajdonsága; mi ez? És végül, milyen közös tulajdonságuk van a C típusú grafikonoknak? Aki jól válaszolt ezekre a kérdésekre, az ránézésre meg tudja mondani az alábbi ábrán látható grafikonról, hogy A, B vagy C típusúak-e? Ha valakinek a fenti példák nem bizonyultak elegendőnek ahhoz, hogy dönteni tudjon, folytassa a vizsgálódást további elsőfokú és másodfokú kifejezések grafikonjainak felvázolásával, vagyis válasszon $y = mx + k$ vagy $y = ax^2 + bx + c$ alakú kifejezéseket. Magasabb fokú kifejezések esetében olyan grafikonokkal fogunk találkozni, amelyek a fenti típusok egyikébe sem illenek bele.

Osztályozzuk a 45. ábrán látható grafikonokat aszerint, hogy A, B vagy C típusúak-e.



45. ábra

Aki tudja, fejezze be ezt a vizsgálatot, mielőtt tovább olvasná a könyvet.

Az A, B és C típusú grafikonok megfigyelése során bizonyára mindenkiben legalábbis alapos gyanú támadt azzal kapcsolatban, hogy mit jelent az y''. Most ugyanezt a kérdést más úton fogjuk megközelíteni.

A ' jel valamilyen mennyiség növekedésének mértékét jelöli. Ha z valamilyen mennyiséget jelent, akkor z' jelenti a z növekedésének mértékét. Ha z' pozitiv, akkor z **növekvő**, vagyis úgy változik, hogy mindig valami hozzáadódik; a szó hétköznapi értelmében *növekszik*. Ha z' negatív, akkor z negatív értelemben növekszik, vagyis fogy, azaz **csökken**. Az y'' mennyiség az y' növekedésének mértékét méri. Ha y' növekszik, akkor y'' nem lehet negatív, ha y' csökken, akkor y'' nem lehet pozitív.

A 46. ábrán látható görbe először vízszintes, a végén északkeleti irányú. Számokkal kifejezve az elején $y' = 0$, a végén $y' = 1$. Így y' növekszik és y'' pozitív.

46. ábra

47. ábra

48. ábra

49. ábra

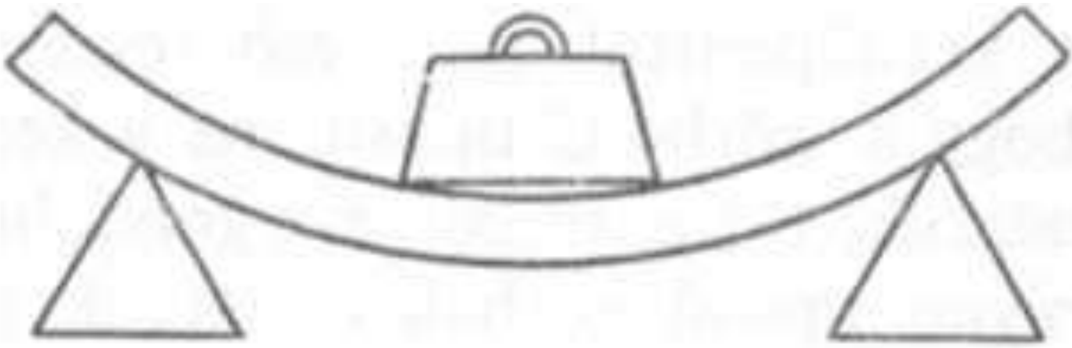
Ennek ellenkezője történik a 47. ábrán. Ez a görbe északkeleti irányban kezdődik és vízszintesen végződik. Itt *y'* értéke először – 1, a végén pedig nulla. Így *y'* csökken, növekedésének mértéke negatív, tehát y'' negatív.

A másik két példával óvatosan kell bánnunk. A 48. ábrán a görbe délkeleti irányban indul és vízszintesen végződik. A délkeleti irány a *y'* = – 1 meredekségnek felel meg. Így *y'* ennél a görbénél -1-től nulláig változik. Növekedés ez vagy csökkenés? A -1-hez 1-et kell hozzáadnunk, hogy nullát kapjunk, a – 1-től a nulláig eljutni növekedést jelent. (Gondoljunk például a hőmérsékletre.) Így *y'* növekvő és y'' *pozitív.* Hasonlítsuk össze ezt a B típusú grafikonokkal, és igazoljuk, hogy emlékeztet rájuk.

Nézzük meg végül a 49. ábrán látható görbét. Ez vízszintesen kezdődik és délkeleti irányban végződik. Vagyis y' ennél a görbénél nullától – 1-ig változik. Így *y'* csökkenő és y'' negatív. Hasonlítsuk össze ezt a görbét C típusú grafikonjainkkal.

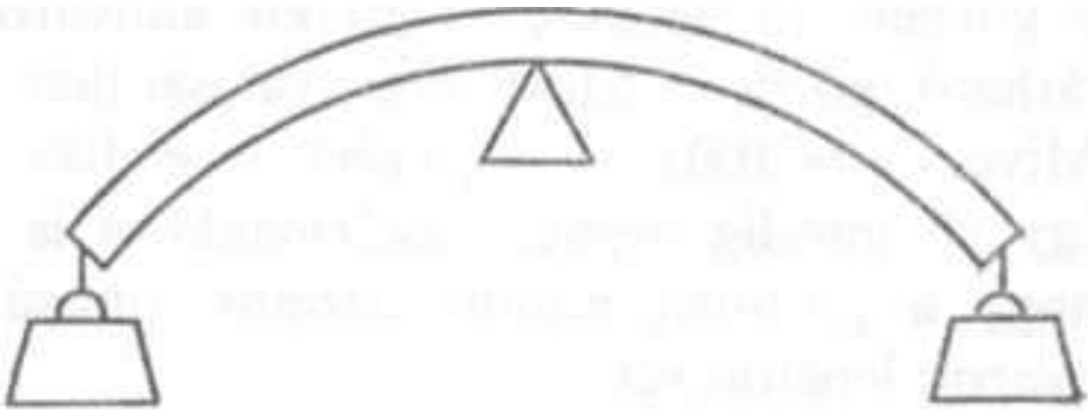
Ha most megvizsgáljuk A, B és C típusú grafikonjainkat, akkor azt hiszem, látni fogjuk, hogy mit értek azon, hogy y'' a grafikon *görbületét* mutatja meg. Ha y'' végig nulla, akkor egyenes vonalat kapunk, ami egyáltalán nem görbül. Ha y'' pozitív, akkor középen megterhelt gerendához hasonló görbét kapunk (50. ábra). Ha y'' negatív, akkora két végén megterhelt gerendához hasonló görbéhez jutunk (51. ábra).

Valójában a vasbeton szerkezetek tervezésénél és egyéb mérnöki területeken y'' éppen ebben a szerepben, a görbület mértékeként jelenik meg.

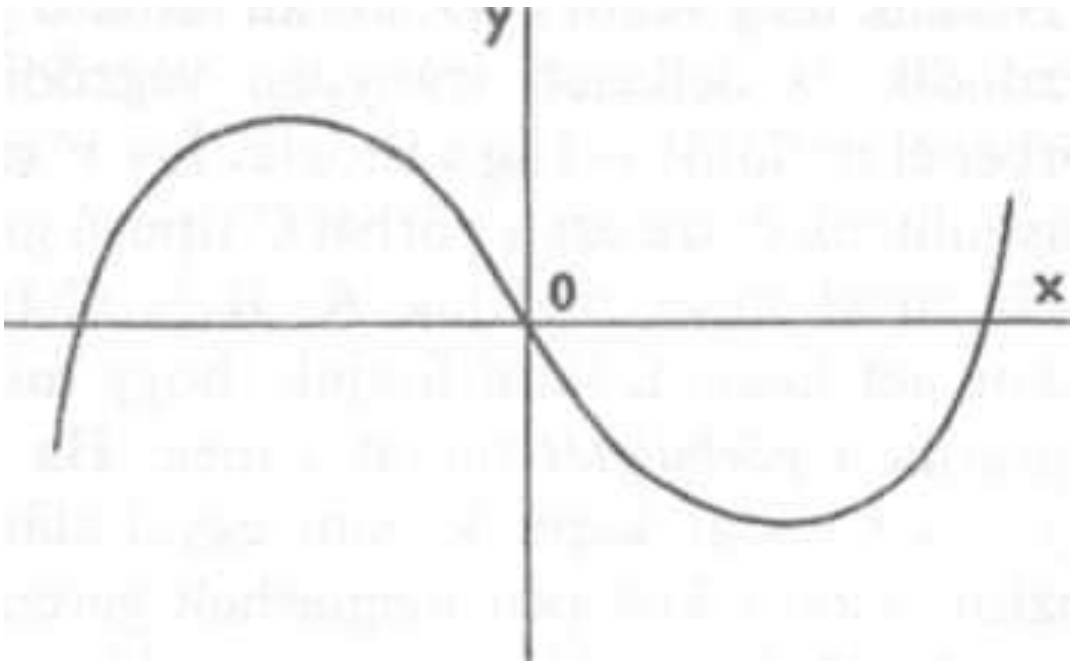


50. ábra

Eddigi egyenleteink, amelyek alapján A, B és C típusú grafikonokat rajzoltunk, elsőfokú vagy másodfokú egyenletek voltak. Ezekben y'' mindig állandó volt. Például $y = x + x^2$ esetén y'' = 2 adódott. Vagyis a görbület iránya végig ugyanaz, az $y = x + x^2$ görbéje minden x értékre úgy hajlik, mint a középen megterhelt gerenda. A harmadfokú görbéknél azonban nem mindig ugyanakkora a görbület.



51. ábra



52. ábra

Már találkoztunk is ilyenekkel a 88. – 89. oldalakon, amikor az $y = x^3 - 12x$ grafikonját vizsgáltuk. A grafikon végső felvázolását példaként az olvasóra bíztuk. Az $y' = 3x^2 - 12$ vizsgálatából láttuk, hogy a grafikon az $x = -2$ értékig emelkedő, -2 és 2 között süllyedő, és az $x = 2$ után újra emelkedő. Ilyen grafikont láthatunk az 52. ábrán. Mit mondhatunk ennek görbületéről? Ha a görbének a kezdőponttól balra eső részére nézünk, azt gondolhatjuk, hogy a görbe C típusú, ha a kezdőponttól jobbra eső részt nézzük, B típusú görbére gondolhatunk. A kezdőponttól balra olyan típusú görbületet látunk (szélein megterhelt gerenda), amelyhez negatív y'' értéket kapcsoltunk, jobbra viszont olyan görbületű ív látszik (középen megterhelt gerenda), amelyre y'' pozitív. Ezt kapjuk a görbe egyenletéből is? Az $y = x^3 - 12x$ egyenletből $y' = 3x^2 - 12$ adódik. Ebből az $y'' = 6x$ egyenletet kapjuk. Márpedig $6x$ akkor negatív, ha x negatív, és akkor pozitív, ha x pozitív;

így y'' a kezdőponttól balra negatív, a kezdőponttól jobbra pozitív. Ez pontosan összhangban van megfigyeléseinkkel.

A 33. ábrán y' viselkedése alapján felvázoltuk az $y = 100x - x^2$ grafikonját. Láttuk, hogy a grafikon az $x = 50$ értékig emelkedik, azután süllyed. Vajon honnan lehet tudni, hogy a görbén nincsenek-e olyan kis kanyarok, mint a 34. ábrán látható görbén. Most már válaszolhatunk erre a kérdésre. Mivel $y = 100x - x^2$, ezért $y' = 100 - 2x$ *és* $y'' = -2$. Így y'' mindig negatív, akármekkora is az x. Ez azt jelenti, hogy a görbület mindig azonos típusú, ami kizárja a kanyarok lehetőségét.

Vizsgálataink során csupán y'' előjelét figyeltük; megnéztük, hogy y'' hol pozitív, hol negatív, hol nulla. Ha y' és y'' valódi értékeit vizsgáljuk, akkor nemcsak azt határozhatjuk meg, hogy hogyan, hanem azt is, hogy milyen gyorsan hajlik a görbe. Azt mondhatjuk, hogy egy adott pontban úgy görbül a grafikon, mint mondjuk a 3 egység sugarú kör; egy másik pontban, ahol hajtűkanyar van, olyan, mint a 0,1 sugarú kör.

A matematikának egyik ága, a differenciálgeometria az analízis módszereit alkalmazza geometriai alakzatok, görbék, felületek vizsgálatára. Az előbb említett kérdés, a görbület meghatározása, a differenciálgeometria egyszerűbb feladatai közé tartozik. A differenciálgeometria felületek görbületével is foglalkozik. A görbe felületek vizsgálata természetes módon vezet el a **tenzor-analízishez**, amelyet viszont a relativitáselmélet használ fel. Az olvasó bizonyára hallott már misztikus utalásokat a *„görbült téridőre”*. Ez jó példa arra, hogyan nyújt betekintést az analízis mindenféle kutatás területére. Abból indultunk ki, hogyan tudunk könnyen felvázolni görbéket, egyik kérdés a másikhoz vezetett, síkbeli, majd háromdimenziós görbék, azután felületek vizsgálatával foglalkoztunk, fokozatosan új számítási módszerek, új jelek, új fogalmak léptek fel, végül pedig, amire sosem gondoltunk volna, olyan elmélethez jutottunk, amely forradalmasítja a térről, időről, gravitációról és energiáról alkotott fogalmainkat.

NYOLCADIK FEJEZET – A fordított probléma

Az elemi aritmetikában vannak bizonyos egyszerű direkt műveletek: az összeadás, a szorzás, a négyzetre emelés. Ezeket a 0, 1, 2, 3, 4, ... természetes számok körében mindig el lehet végezni. Mennyi 3 meg 4? Válasz: 7. Mennyi 3-szor 4? Válasz: 12. Mennyi 3 négyzete? Válasz: 9.

Később megtanuljuk a fenti műveletek megfordítását. Az összeadás megfordítása a kivonás. 3 meg mennyi 7? Válasz: 4. A szorzás megfordítása az osztás. 3 mennyivel szorozva ad 12-t? Válasz: 4. A négyzetre emelést megfordítva a gyökvonáshoz jutunk. Melyik szám négyzete 9? Válasz: 3.

Ezek a fordított műveletek a számfogalom kiterjesztéséhez vezetnek. Ha megpróbálunk válaszolni arra a kérdésre, hogy „8 meg mennyi 7?", akkor először azt mondjuk, hogy nincs megoldás, később rájövünk, hogy bevezethetünk egy új fogalmat, a negatív számok fogalmát, és akkor már tudunk válaszolni: – 1. Ugyanígy az osztás elvezet a törtszámok – valamikor új – fogalmához. Ahelyett, hogy azt mondanánk, hogy a „2-szer mennyi 1 ?" kérdésnek nincs megoldása, eljutunk az 1/2 megoldáshoz. A négyzetgyökvonás megint új fogalmakhoz vezet; az elemi aritmetikából ismert értelemben nem tudunk olyan törtet írni, amelynek négyzete 2. Így jutunk az olyan irracionális számokhoz, mint például √2. Ha olyan számot keresünk, amelynek négyzete –1, akkor a komplex számok, mint például √-1 még izgalmasabb fogalmához jutunk el.

Az analízisben ugyanilyen növekedést figyelhetünk meg. Ezzel a direkt kérdéssel kezdtük: „Megadom egy test helyzetét minden pillanatban leíró szabályt. Határozzuk meg a test sebességét.” Könnyen megfordíthatjuk ezt a kérdést; megadom a sebességre vonatkozó szabályt, határozzuk meg ehhez a test helyzetét leíró szabályt. Jelekkel kifejezve: adott az s' szabálya, határozzuk meg az s szabályát. Néha könnyen tudunk válaszolni erre a kérdésre. Például, ha megadom az $s' = 2t$ szabályt, könnyen válaszolhatunk rá: $s = t^2$ vagy $s = t^2 + 5$ vagy $s = t^2 - 3$ vagy akármilyen $s = t^2 + C$ típusú formula, ahol C állandó érték. De az ilyen kérdések új típusú formulákhoz is vezethetnek. Keressük például az $s' = 1/t$ szabályhoz tartozó s szabályt. Hogy válaszolhassunk erre a kérdésre, ki kell dolgoznunk a logaritmus elméletét. Az $s' = 1/(1 - t^2)$ szabályhoz tartozó s meghatározásához a trigonometrikus függvények, a sinus és cosinus elméletének felépítésére van szükség. A középiskolában a trigonometriát rendszerint a háromszögek geometriáján keresztül közelítik meg. Az analitikus megközelítés egészen más, ugyanis az $s' = 1/(1 - t^2)$ szabályhoz tartozó s-et határozzuk meg. Az analízis tehát algebrai módszerrel vezeti be a trigonometriát; ezen azt értem, hogy nem ábrákat rajzolunk, hanem egyenleteket írunk. Az analízisen keresztül történő megközelítés segít abban, hogy különböző matematikai ismereteink egységes képpé álljanak össze. A trigonometria nem különálló témakör, hanem egészen természetes módon emelkedett ki az analízis fejlődése során. Az analízis olyan ismereteket is ad a trigonometriáról, amelyekhez analízis nélkül csak nagyon nehezen lehetne eljutni. A tanulókban gyakran felmerül az a kérdés, hogy hogyan számítják ki a trigonometrikus táblázatok adatait. Erre is az analízisben találhatjuk meg a választ.

A trigonometria csak egyike az ily módon keletkező témaköröknek. Ha tovább folytatnánk annak a kérdésnek a vizsgálatát, hogy adott s'-höz s-et keresünk, akkor olyan típusú görbékhez jutnánk, amelyek a középiskolai matematika anyagban elő sem fordulnak.

Másképp is juthatunk új típusú szabályokhoz. Az algebrában felírhatunk egyenleteket. Vizsgálatainkat nem korlátozzuk olyan egyszerű műveletekre, mint a négyzetgyökvonás. Kereshetjük például azt a számot, amelynek a négyzete 20-szal nagyobb, mint maga a szám. Jelekkel felírva, meg kell oldanunk az

$$x^2 = x + 20$$

egyenletet. Ezt persze nagyon könnyen meg is tudjuk csinálni. Más egyenletek megoldása nem ilyen egyszerű. Például évszázadok teltek el, amíg a matematikusok meg tudták oldani az

$$x^5 = x + 20$$

típusú egyenleteket.

Az analízisben is felírhatunk egyenleteket. Kérdezhetjük például, hogy van-e olyan *s* szabály, amelyre

$$s' = 2s / t$$

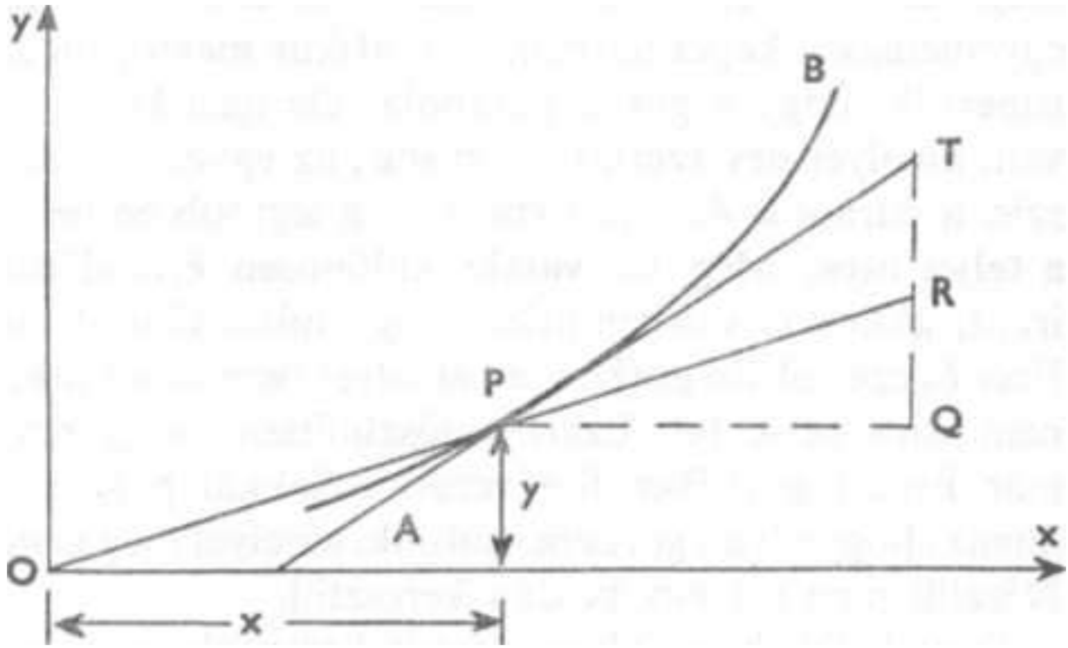
Erre a kérdésre könnyen válaszolhatunk. Megoldás például az $s = t^2$ szabály. Ugyanis ha $s = t^2$, akkor $s' = 2t$. Ekkor $2s/t = 2t^2/t = 2t = s'$. Így az $s = t^2$ szabály rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Sok más megoldása is van ennek az egyenletnek, így $s = 5t^2$, $s = 7t^2$ és minden $s = kt^2$ alakú szabály, ahol *k* állandó érték, megfelel.

A fenti egyenletet szavakkal is megfogalmazhatjuk: s' tetszőleges időpontban megadja a sebességet, s/t, a teljes út osztva a megtételéhez szükséges teljes idővel, az átlagsebesség. Ezek szerint egyenletünk szavakban a következőképpen fogalmazható meg: „Keressünk olyan mozgást, amelynek sebessége bármely pillanatban pontosan kétszer annyi, mint az addig megtett út átlagsebessége!” A már jól ismert állandó gyorsulású mozgás az $s = kt^2$, kielégíti ezeket a feltételeket.

Vajon miért éppen ezt a problémát választottam? A válasz egyszerű. Nem kívántam hosszú és nehézkes számításokba bonyolódni, így olyan problémát kerestem, amelyre könnyű válaszolni. Az igazság az, hogy az $s = t^2$ megoldásból indultam ki, és visszafelé haladtam, olyan egyenletet kerestem, aminek ez a megoldása.

Problémánkat geometriailag is megfogalmazhatjuk. Az x és y segítségével felírt megfelelő egyenlet a következő:

$$y' = 2y / x$$



53. ábra – Görbe-grafikon

Tekintsük az 53. ábrát. Tegyük fel, hogy a $P(x; y)$ pont rajta van az AB görbén. PT a görbe P pontbeli érintője. Az OPR egyenes a kezdőpontot a P ponttal köti össze. PQ vízszintes, QRT függőleges egyenes. Most már értelmezhetjük egyenletünket geometriailag: y' természetesen a PT érintő meredekségét adja meg, y/x az OP egyenes meredeksége.

Az egyenlet éppen azt kívánja, hogy y' pontosan kétszer annyi legyen, mint y/x, vagyis a *PT* érintő meredeksége pontosan kétszer annyi legyen, mint az *OP* szelő meredeksége. Ez azt jelenti, hogy a *QT* szakasznak pontosan kétszer akkorának kell lennie, mint a *QR* szakasznak.

Ezzel a tulajdonsággal a görbe minden pontjának rendelkeznie kell. Feladatunk tehát az, hogy olyan *AB* görbét keressünk, amelynek minden pontjában a *PT* érintő meredeksége pontosan kétszer akkora, mint az *OP* egyenes meredeksége. A megoldás: minden $y = kx^2$ alakú parabola rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Analízis nélkül kényelmetlen volna a megoldást megtalálni. E probléma persze nem jelentős; csupán azért választottuk ezt, mert könnyű a megoldása. Ehhez hasonló problémák azonban gyakran előfordulnak a műszaki és tudományos alkalmazásokban éppúgy, mint a tiszta matematikában.

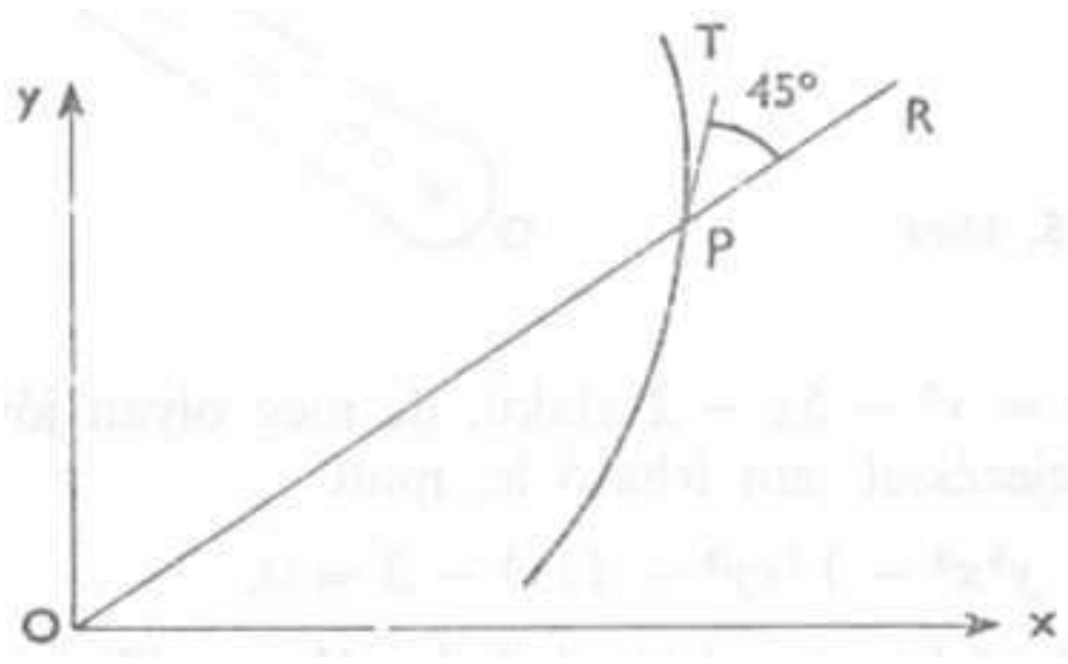
A fenti probléma megoldását egyszerű, jól ismert szabály adta meg. Semmi új gondolat nem merült fel az $s = kt^2$ vagy $y = kx^2$ egyenletekkel kapcsolatban. A grafikus megfogalmazásban felismertük, hogy a görbe parabola. De igen kevés olyan görbe van, amelyet név szerint ismerünk; az egyenes, a kör, az ellipszis, a parabola és a hiperbola – a legtöbb ember számára ez a teljes lista. Még ha valaki különösen érdeklődik a görbék iránt, akkor is valószínűtlen, hogy húsznál több nevet ismer. Ezer és ezer olyan görbe van, amelyet nem ismerünk, és amelyet nem ismernénk fel. Ezért valószínűtlen, hogy egy probléma már ismert görbéhez fog vezetni. Sokkal nagyobb az esélye annak, hogy olyan görbéhez jutunk, amelyet még nem ismerünk. Nézzük meg ezt egy példán keresztül.

Tegyük fel, hogy olyan görbét keresünk, amelynek minden *P* pontjában a *PT* érintő 45°-os szöget zár be az O*PR* egyenessel, ahogyan az 54. ábrán látható. Nem terhelem az olvasót a számítások részleteivel, de ez a tulajdonság a következő egyenlettel fejezhető ki;

$$y' = (x + y) / (x - y)$$

Ezt az egyenletet azonban nem is fogjuk használni, az eredeti, geometriailag megfogalmazott tulajdonság segítségével fogjuk kifejezni magunkat. Könnyű felismerni, hogy milyen típusú az a görbe, amelyik rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Képzeljünk el egy, az *O* pontba helyezett fényforrást. A *P* pontban állunk, árnyékunk a *PR* egyenesre esik. Tegyük fel, hogy arccal *PT* irányban állunk. Most induljunk el, közben azonban állandóan ügyeljünk arra, hogy haladási irányunk mindig 45°-os szöget zárjon be árnyékunk irányával. Ily módon sétánk közben a kívánt tulajdonságú görbén haladunk. Gondolom, az olvasó látja, hogy így valamilyen spirálist írunk le, körbejárjuk a fényforrást, de mindig távolodunk tőle.

54. ábra



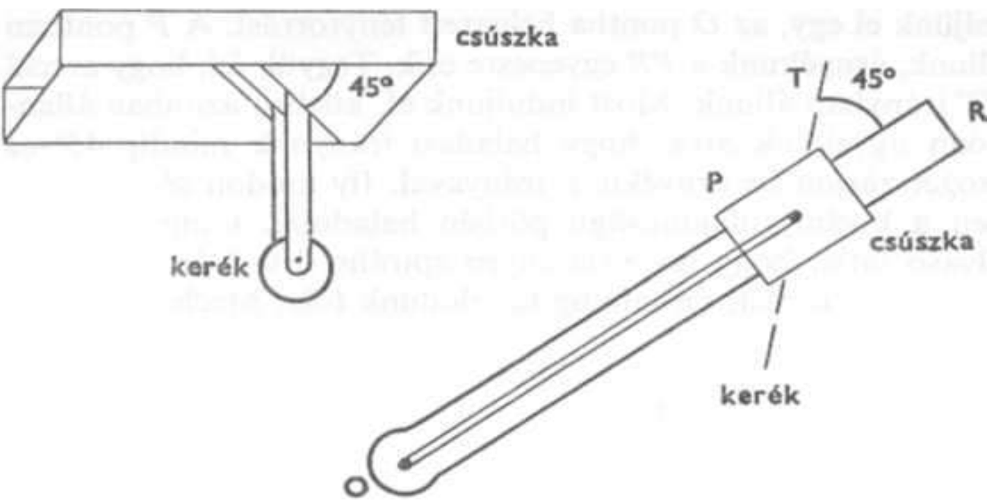
Mechanikai eszközzel is előállíthatjuk ezt a görbét. Itt *OR* valamilyen rúd. Az *O* pontot egy szöggel a papírhoz rögzítjük, de az *OR* rúd foroghat az O pont körül. A P pontnál egy kis vezetőcsúszka található, amely a rúdon szabadon csúszhat. A csúszka alatt egy éles kis kerék van, amely úgy van rögzítve, hogy az OR rúddal mindig 45°-os szöget zárjon be. A kerék éle belevág a papírba, és így a P pontot csak a PT irányban engedi mozogni. Ha az OR rudat forgatjuk, P automatikusan a kívánt módon fog mozogni, és ugyanúgy leírja a görbét, mint előző sétautunk.

Amint láthattuk, maga a probléma megmutatta, hogyan szerkesszük meg a görbét. A kérdés voltaképpen az, hogy hogyan találhatunk más módot a görbe keresésére. Megtalálhatjuk grafikonjának egyenletét; ez jóval kényelmesebb módja a görbe meghatározásának. Az előbbi feladatot megvizsgálták ebből a szempontból is, de ez a görbe elemi aritmetikai műveletek segítségével nem írható le. A görbe egyenlete nem lehet, mondjuk

$y = x^3 + 5x - 2$ alakú, de még olyan jóval bonyolultabb kifejezéssel sem írható le, mint

$$y^5x^3 - 17xy^2 + 11x^4 - 3 = 0.$$

55. ábra



E görbe egyenletének felírásához szükség van a logaritmus és a trigonometria bizonyos fogalmaira.

Megfigyelhetjük, hogy ez a probléma pontosan ugyanazokhoz a tárgykörökhöz vezetett, mint amelyeket a 109. oldalon már említettünk, a logaritmushoz és a trigonometriához. Valójában az elemi analízis egy fontos fejezetének célja megmagyarázni, hogy mi a logaritmus és mik a trigonometrikus függvények, valamint megmutatni, hogy milyen problémák oldhatók meg ezek segítségével.

Bízom benne, hogy ennek a fejezetnek, amelynek címe „A fordított probléma", a célja mindenki előtt világos. Célunk nem valamilyen részeredmény megtanítása volt. Sokkal inkább az, hogy az olvasó némi fogalmat alkothasson magának a matematika fejlődéséről. A mozgó test sebességének vizsgálatával kezdtük; a megismert néhány formula és az s', s'' jelölések lehetőséget adnak arra, hogy új problémákat fogalmazhassunk meg. A problémák némelyike a matematika ismert területeihez vezet, a trigonometriához és a logaritmushoz. Más problémák viszont olyan területekre vezetnének, amelyeknek valószínűleg még a nevét sem hallotta az olvasó. Amint már korábban is említettem, az elemi analízis fogalmai adják azt a kulcsot, amely az 1600 és 1900 között keletkezett matematikai és természettudományos ismeretek kapuját nyitja. Hogy hogyan, azt csak akkor érthetjük meg, ha valóban áttanulmányozzuk ezeknek a századoknak a matematikáját. Itt csupán nagyon halványan és általánosan próbáltam jelezni, hogyan vezet az egyik fogalom a másikhoz.

KILENCEDIK FEJEZET – Körök és gömbök, négyzetek és kockák

Könyvünkben mindig az s, t és x, y betűket alkalmaztuk. Az algebrában természetesen az egyik betű éppen olyan jó, mint a másik. Ahogyan az $s = t^2$ egyenletből $s' = 2t$ és az $y = x^2$ egyenletből $y' = 2x$ következett, ugyanúgy a $p = q^2$ egyenletből $p' = 2q$ vagy a $J = w^2$ egyenletből $J' = 2w$ következik.

Már az általános iskolában találkoztunk a kör területére vonatkozó $T = \pi r^2$ és a kör kerületére vonatkozó $K = 2\pi r$ képletekkel, valamint a gömb térfogatát meghatározó $V = (4/3)\ \pi r^3$ *és* a gömb felszínét meghatározó $F = 4\pi r^2$ képletekkel. Miután már foglalkoztunk analízissel, felvetődhet valami érdekes kérdés ezekkel a formulákkal kapcsolatban. Vegyük például a $T = \pi r^2$ formulát. Megkérdezhetjük, mi lesz T'? Az r^2 növekedésének mértéke $2r$. De mit csináljunk a π együtthatóval? A π természetesen rögzített érték. Ha a $T = 3r^2$ egyenletből indulunk ki, nyilván a $T' = 6r$ egyenlethez jutunk [lásd a (6) formulát és a 18. ábrán a növekvő virágot]. A π értéke éppen csak egy kicsivel nagyobb 3-nál, és ezt is ugyanúgy fogjuk kezelni. A $T = \pi r^2$ egyenletből a $T' = 2\pi r$ egyenlethez jutunk. Felismerhetjük, hogy $2\pi r$ éppen a kör kerülete. Így $T' = K$.

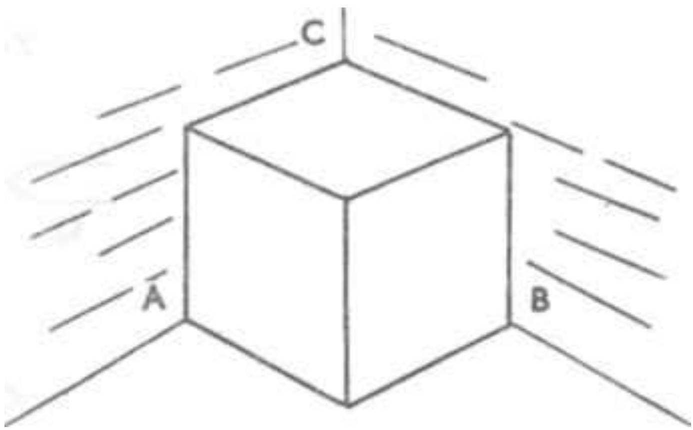
Egészen hasonló eredményhez jutunk a gömb esetén. *A* $V = (4/3)\ \pi r^3$ egyenletből $F = 4\pi r^2$ adódik. Ez aligha lehet véletlen. Valójában könnyen látható, hogy miért van ez így. Tegyük fel, hogy van egy gömbünk és egy kicsit meg akarjuk nagyobbítani. Egyenletes műanyag bevonatot fújunk rá, ami valamivel megvastagítja. Egyáltalán nem meglepő, hogy az e művelet során bekövetkező térfogat növekedésének szoros kapcsolata van azzal a felülettel, amelyet műanyag réteggel vontunk be.

Jegyezzük meg, hogy gondolatmenetünknek van egy veszélyes pontja. Nagyon fontos, hogy a bevonat egyenletes legyen, a bevonó rétegnek mindenütt egyforma vastagnak kell lennie. (A térfogat növekedését valójában úgy becsüljük, hogy a felszínt megszorozzuk a réteg vastagságával. Ez a becslés „ésszerű”, ha a réteg elég vékony Alaposan átgondolva meg lehet mutatni, hogy gondolatmenetünk valóban logikus, és pontos eredményhez vezet.)

Területek és térfogatok

Az a gondolat, hogy a testek bevonat készítésével növekednek, körök és gömbök nélkül is bemutatható. Az analízisben elért első eredményeink közül kettőt négyzetek és kockák segítségével is bemutathatunk.

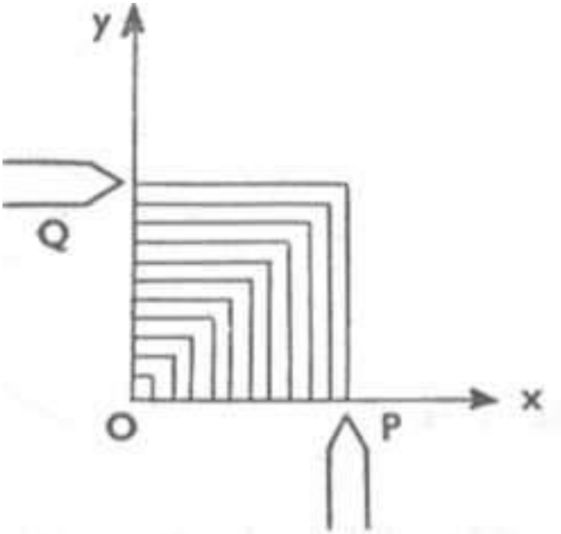
56. ábra



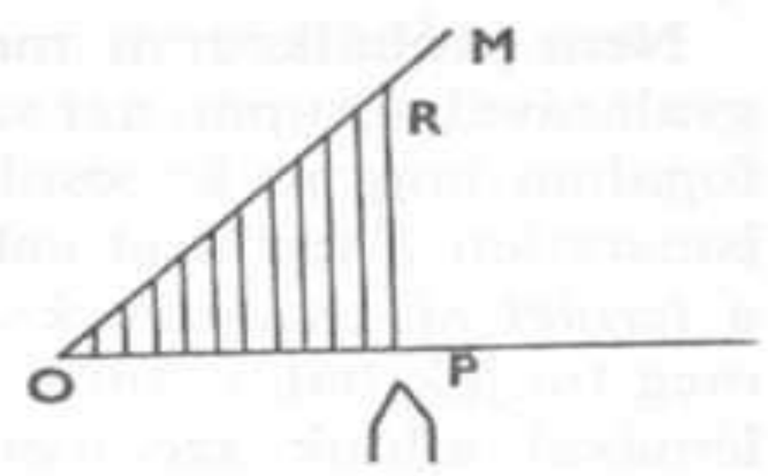
Képzeljünk el egy, a szoba sarkában elhelyezett kockát (lásd az 56. ábrát), amely állandóan növekszik, mert folyamatosan műanyag bevonatot fújunk a kocka látható lapjaira. Ezt úgy csináljuk, hogy az *A*, *B*, *C* pontok másodpercenként 1 centimétert haladjanak előre. Ha a $t = 0$ időpontban egyáltalán nem volt kocka, és ha az *A*, *B*, *C* pontok a fenti módon haladnak, akkor t másodperc múlva a kocka éle t centiméter hosszú, térfogata pedig $V = t^3$ köbcentiméter lesz. Ez utóbbiról tudjuk, hogy növekedésének mértéke $V' = 3t^2$. Az ábra mutatja, hogy miért éppen $3t^2$ adódik. A kocka látható felülete három négyzetlapból áll, mindegyik területe t^2. Mindegyik lap egyenlő mértékben mozog, így a látható lapok $3t^2$ területe a kocka műanyagbevonásából eredő növekedésének mértékét adja meg.

A kocka háromdimenziós alakzat. Hasonló a helyzet két dimenzióban is. Az 57. ábrán két mutatót látunk, amelyek az *OX*, illetve az *OY* egyenesek mentén mozognak egyenlő egyenletes sebességgel. Képzelje el az olvasó, hogy ceruzával kezében úgy kell bevonalkáznia a papírt, hogy a rajz mindig négyzet legyen, és együtt haladjon a mutatókkal; a négyzetnek mindig el kell érnie a mutatók által meghatározott *P* és *Q* pontot.

57. ábra – Ábrázolás kétdimenzióban



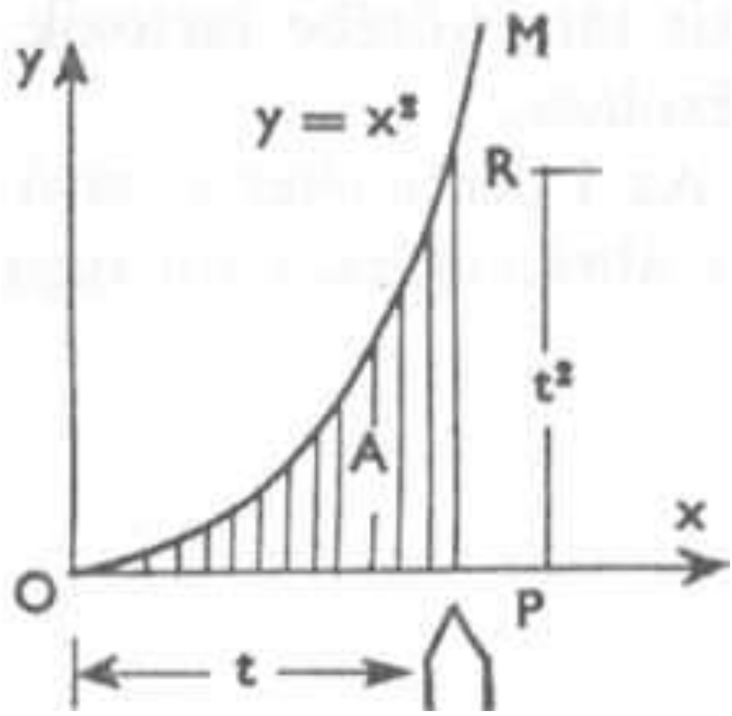
Kezdetben igen könnyű ezt csinálni, de ahogy a négyzet oldalai növekszenek, egyre hosszabb és hosszabb vonalakat kell rajzolni. A *t* időpontban a négyzet oldalai *t* centiméter hosszúságúak lesznek. A terület $T = t^2$, és így $T' = 2t$. Ceruzánk két oldal mentén fut végig. Ezek hossza *2t*, ami éppen megegyezik *T* értékével.



58. ábra

Tegyük fel, hogy előző ábránkat kettévágtuk az *OM* vonal, az *YOX* szög szögfelezője mentén. Az 58. ábrán látható ennek az alsó fele. A vonalkázott terület most $(1/2)t^2$. *P* előrehaladtával a terület növekedésének mértéke *t*. A háromszög területének vonalkázásakor minden pillanatban egy *t* hosszúságú *PR* szakaszt kell rajzolnunk. Ha a vonalkázott háromszög területét T-vel jelöljük, akkor $T = (1/2)/^2$ és $T' = t$. T' megegyezik a *PR* szakasz hosszával.

Fontos, hogy az *OM* vonal egyenes legyen? Nem lehet ez a vonal olyan, mint az 59. ábrán látható? Itt *OM* az $y = x^2$ parabola. Még egyszer, *P* egyenletes sebességgel mozog, és az árnyékolt terület a *PR* egyenes mentén történő rajzolással növekszik. A *t* időpontban az *OP* távolság *t*. Az *R* pont abszcisszája így *t*. Mivel *R* rajta van az $y = x^2$ grafikonján, azért az *R* pont ordinátája $y = t^2$. Így a *PR* szakasz hosszúsága t^2.



59. ábra

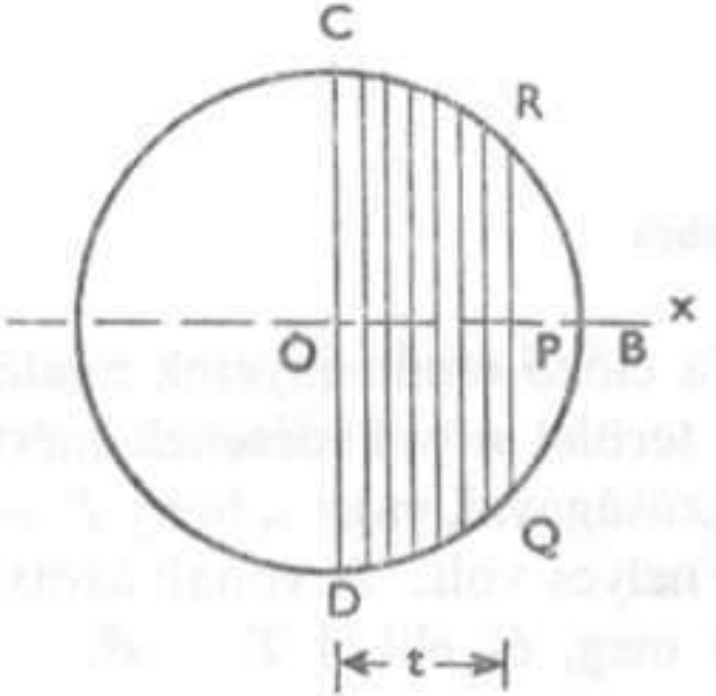
Ha előző eredményeink analógiája alapján azt sejtjük, hogy a *T* terület növekedésének mértéke megegyezik a *PR* szakasz hosszúságával, vagyis, hogy $T' = t^2$ lesz, akkor a sejtésünk valóban helyes volt. A vonalkázott területet a $T = (1/3)t^3$ szabály adja meg, és ebből $T' = t^2$.

Nem próbálkozom meg a terület elméletének részletes tárgyalásával. Csupán azt szeretném megmutatni, hogy a sebesség fogalma hogyan kapcsolódik a területhez. Sok esetben, amikor ismeretlen *T* területet kell meghatároznunk, azt találjuk, hogy a *terület növekedésének sebességét* ki tudjuk számolni, vagyis meg tudjuk határozni a T'-t. Ekkor a fordított típusú problémával állunk szemben: adott a T'-t meghatározó szabály, milyen szabályok adhatják meg a *T* területet?

Megfigyelhetjük, hogy az $y = x^2$ parabola alatti terület meghatározása lényegesen különbözik a háromszögekkel, paralelogrammákkal, téglalapokkal kapcsolatos elemi problémáktól. Jóval nehezebbnek látszik azoknál. Az ilyen területek meghatározására az analízis ad lehetőséget. A konkrét számítás egészen egyszerű is lehet. A részletek akármilyen elemi analízis tankönyvben megtalálhatók.

A térfogatszámítás nagyon hasonlít a területszámításhoz. Nyilván mindenki ismeri az *r* sugarú gömb térfogatára vonatkozó $V = (4/3)\pi r^3$ formulát. És noha a formulát mindenki ismeri, nem valószínű, hogy sokan tudják, hogyan lehet megkapni. A gömb térfogatának meghatározása valójában az analízis tárgykörébe tartozik. Érdekes lehet a módszer rövid felvázolása.

Az 1 centiméter sugarú gömb térfogatát fogjuk vizsgálni. A 60. ábrán látható kör sugara egységnyi, középpontja az *O* pont.



60. ábra

Rajzunkon gömböt ábrázolni tulajdonképpen nem tudunk. Képzeljük el, hogy a kört az OX-tengely körül forgatjuk. A kör forgása során a térben gömböt ír le. Ezt a gömböt vizsgáljuk. Képzeljük ezt egy üres fémgömbnek. Mindjárt ki fogjuk tölteni. A *DOC* egyenes, amint az OX-tengely körül forog, egy körlemezt ír le. Képzeljük azt, hogy ez a körlemez egy papírlap, amely a gömb belsejét két részre osztja. Most kezdjük el kitölteni a gömböt. Vegyünk egy papírból készült körlemez sorozatot és rendre ragasszuk őket egymáshoz. A körlemezek sugarai természetesen nem mind egyformák. Ha az ábrán vonalkázott részt kitöltöttük, akkor a következő körlemez sugarának *PR* hosszúságúnak kell lennie. Ez a körlemez a térnek azt a tartományát foglalja el, amelyet a *QPR* szakasz ír le, miközben az OX-tengely körül forgatjuk. A körlemezek helyett rétegesen felvitt műanyagot is elképzelhetünk.

Akárhogyan is, a vonalkázott rész jobbra növekszik úgy, hogy az *OP* távolság egyenletesen növekszik. Így *t* másodperc múlva az *OP* távolság *t* centiméter lesz. Az eljárás bármelyik szakaszán a kitöltött tartomány a gömbnek két párhuzamos sík által határolt része.

Mindegyik új réteg egyenletes, minden pontban egyforma a vastagsága. Továbbá, a felület egyenletesen mozog előre. Így, mint korábbi példáinkban, a térfogat növekedésének mértékét az a terület adja meg, amelyet ez a felület bevon. Mennyi ennek a felületnek a területe? A felület most egy *PR* sugarú kör. Ki kell számítanunk a *PR* távolságot. Ez nem lesz nehéz. Az *OPR* háromszög derékszögű. Mivel egységsugarú körből indultunk ki, ezért $OR = 1$. Amint az előző bekezdésben már mondtuk, $OP = t$. A Pitagorász-tételből azt kapjuk, hogy $PR^2 = 1 - t^2$. Szerencsére ez nem maga *PR*, hanem *PR* négyzete, éppen az, amire szükségünk van. A *PR* sugarú kör területe $\pi \cdot PR^2$, ami most éppen $\pi(1 - t^2)$. Ha V-vel jelöljük azt a térfogatot, amelyet *t* idő elteltével kitöltöttünk, akkor

$$V = \pi(1 - t^2).$$

Itt újra a fordított problémával találkozunk. Tudjuk, milyen gyorsan növekszik *V*, azt is tudjuk, hogy amikor $t = 0$, akkor $V = 0$. Ennyi információ elegendő ahhoz, hogy megadhassuk a választ:

$$V = \pi\left(t - \frac{1}{3}t^3\right).$$

Megállapíthatjuk, hogy nehezebb problémát oldottunk meg, mint amit kitűztünk magunk elé. Ez a formula nem az egész gömb térfogatát adja meg, hanem a két sík közé eső térfogatrészt. A $t = 1$ időpontban azonban a *P* pont eléri a *B* pontot, tehát kitöltöttük a gömb felét. A fenti formulába a $t = 1$ értéket helyettesítve azt kapjuk, hogy a gömb felének térfogata $\pi(1 - 1/3)$, vagyis $(2/3)\pi$. Az egész gömb térfogata ennek kétszerese, és így eljutunk az egységsugarú gömb térfogatára várt $(4/3)\pi$ formulához.

Az r sugarú gömb térfogatát hasonló módszerrel kaphatjuk meg.

TIZEDIK FEJEZET – Intuíció és logika

Az eddigiek során foglalkoztunk az elemi analízis néhány problémájával, és néhol jeleztük, milyen kérdések vezettek ezekhez a problémákhoz. Ezek ismeretében az olvasó sok analíziskönyvet minden nehézség nélkül megérthet. Lesznek viszont olyan analíziskönyvek is, amelyeket csak félig, vagy már egyáltalán nem tud követni.

Ahhoz, hogy mégértsük, miért van ez így, tudnunk kell valamit a matematika történetéről. Az 1600–1800-as évek között az analízis nagyon sokféle problémával foglalkozott és nagyon sokszor alkalmazta azt a fajta okoskodást, amelyet könyvünkben láttunk. Később válságos idők következtek. Amint a matematikusok mind mélyebbre és mélyebbre jutottak az analízisben, és egyre bonyolultabb helyzeteket vizsgáltak, egyszer csak kezdtek olyan eredményeket kapni, amelyek nyilvánvalóan hibásak voltak. Gondolkodásmódjuk, amely egyszerű helyzetek megoldásakor teljesen kielégítő volt, most megbízhatatlannak bizonyult; szükségessé vált a módszer nagyon alapos felülvizsgálása.

Az ilyen válság egyáltalán nem szokatlan a tudományban, és semmi restellnivaló nincs miatta, valójában gyakran éppen az egészség jele. A fejlődésben levő gyermek egyszerre csak azt látja, hogy régi ruháit nem tudja felvenni – túl nagy lett a ruhákhoz képest, újakra van szüksége. Egy fejlődő tudománynak ugyanígy időről időre új gondolkodásmódra van szüksége, kinövi a régieket.

Ez természetesen problémát jelent a tanároknak. Öltöztessük-e az analízisben még járatlan tanulót olyan ruhába, amely az 1700-as évek matematikusaihoz illett? Ekkor ugyanis az a veszély fenyeget, hogy hozzászokik ehhez az öltözékhez, és később tiltakozni fog az ellen, hogy felnőtthöz illő köntösre cserélje fel. Másrészt viszont, ha napjaink divatját akarnánk követni, túl hosszúnak találhatná a ruha ujját és a nadrág szárát, úgy érezhetné, hogy teljesen megakadályozza a mozgását.

Véleményem szerint a tanulók többsége számára nem okos a legújabb és legdivatosabb modellel kezdeni. Jobb, ha szerényebb, de jobban illő öltözetet választunk. De jó, ha felismerjük, hogy nem kell egész életünkben ezt a ruhát viselnünk.

Mik is ezek a különböző gondolkodásmódok? Ha visszalapozunk könyvünkben, látjuk, hogy sok fogalmat a mindennapi életből vettünk – mozgó testek, sebesség, gyorsulás, meredekség, terület, térfogat. Nem próbáltuk pontosan meghatározni ezeket a fogalmakat; feltételeztük, hogy többé-kevésbé mindenki érti ezeket a szavakat; és érveléseinket erre alapoztuk.

A matematikusok ezt *intuitív* közelítésnek nevezik. A mindennapi életben gondolkodásunk majdnem mindig intuitív. Kevesen tudnák például pontosan meghatározni, mit jelent a *kutya* szó. De az utcán megismerjük a kutyákat. Előfordulhatnak bizonyos határesetek is – mikor kutya egy állat és mikor farkas? – de nem érdemes túl sokat bajlódnunk ezzel. Az intuitív gondolkodásmóddal egészen jól elboldogulunk a mindennapi életben: kell, hogy ennek valamilyen egészséges alapja legyen.

A XVII. és XVIII. században, amint már korábban említettük, a matematikusok nagyon sokat foglalkoztak természettudományos kérdésekkel. Meg akarták határozni a Nap körül keringő Föld pályáját, és azt, hogy közben hogyan változik sebessége. Nem bocsátkoztak azonban filozófiai fejtegetésekbe a *sebességgel* kapcsolatban. Biztosak voltak abban, hogy a Földnek van sebessége, és meg akarták határozni az erre vonatkozó formulát.

Amint látjuk, az intuitív gondolkodás során keveredik a matematika és a fizika. Ebben a könyvben gyakran szerepeltek ilyen példák. Okoskodásaink ilyenek voltak:

(A) A 35. oldalon, a 13. ábrán látható kocsi az $s = t^2$ szabálynak megfelelően mozog.
(B) Ennek a kocsinak minden időpontban van sebessége.
(C) Szeretnénk kiszámítani ezt a sebességet.

Ezután meg is találtuk a sebességre vonatkozó $s' = 2t$ formulát.

Nézzük csak meg a (B) kijelentést, amelyből arra következtethetünk, hogy ha egy test mozog, akkor kell, hogy legyen sebessége; valamilyen sebességgel kell mozognia.

Nagyon természetes ez a feltevés. A legtöbb ember, ha azt mondják neki, hogy valami mozog, akkor azt kérdezi, hogy gyorsan vagy lassan mozog-e. Nagyon meglepődne, ha azt a választ kapná, hogy a test mozog ugyan, de nincs sebessége.

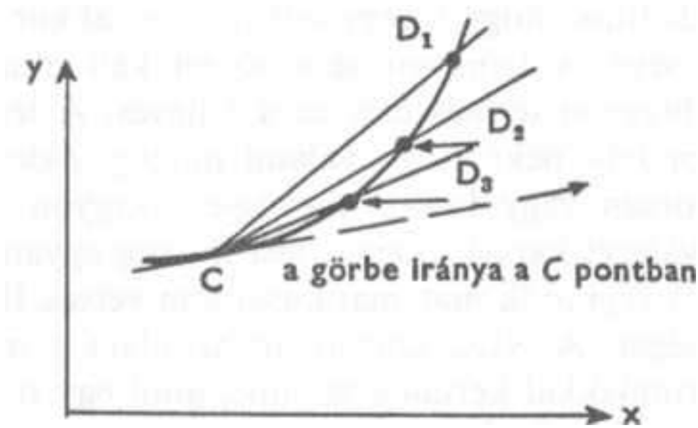
A régi idők matematikusai sem vették figyelembe ezt a lehetőséget. A XIX. században azonban a matematikusok olyan formulákkal kerültek szembe, ahol egy pont mozgott, de nem volt sebessége!

Ezt a látszólagos paradoxont másképp is megfogalmazhatjuk. Könyvünkben sok olyan ábrát alkalmaztunk, amely valamilyen test mozgását írta le. Ezeken az ábrákon a test sebessége a görbe meredekségének felel meg. Így a görbe iránya a test sebességének felel meg. Ha egy tárgynak nincs sebessége, az azt jelenti, hogy a görbének ***nincs iránya***!

Ha az olvasó esetleg ezt nehezen tudja elképzelni, akkor sem kell kétségbeesnie, hiszen az emberiség legjobb matematikusai is csak több mint két évszázad eltelte után ismerték fel, hogy ilyesmi létezhet. Továbbá, ha bemutatok ilyen példát, lehet, hogy az olvasó mégis úgy fogja érezni, hogy tisztességes görbe nem viselkedhet így. Ez várható is; nyilvánvaló, hogy az a görbe, amelyik átmegy egy ponton, de ott semmilyen iránya sincs, valami más, mint amit az elemi algebrában megszoktunk.

Hogyan mutathatnánk be egy olyan görbét, amelynek egy adott pontjában semmilyen iránya sincs? Ha volna egy ilyen görbénk, és meg akarnánk határozni a meredekségét ebben a pontban, semmilyen értéket sem kapnánk. Ezen nem azt értem, hogy nem tudnánk kiszámítani a meredekséget, hanem azt, hogy nem volna meredekség, amit kiszámíthatnánk. Hogyan jöhet létre ilyen helyzet? Hogy válaszolni tudjunk erre, gondoljuk végig, hogyan jártunk el a 73.-76. oldalakon a görbe meredekségét mérő y' meghatározásakor. Emlékezzünk vissza a 61. ábrán látható rajzra. A görbén felvettük a D_1, D_2, D_3, ... pontokat, és meghatároztuk a CD_1, CD_2, CD_3, ... egyenesek

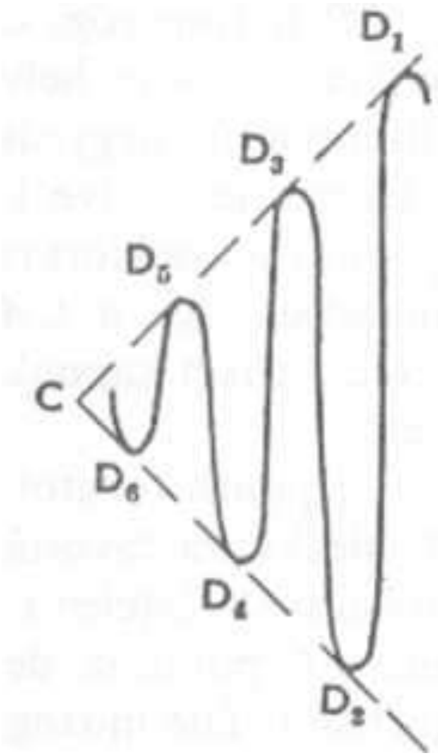
61. ábra – Görbeirányok



meredekségét. A vizsgált példákban azt tapasztaltuk, hogy ezek a meredekségek valamilyen rögzített számot közelítettek meg, és ezt a számot neveztük a görbe C pontbeli meredekségének. Nem bizonyítottuk, hogy ezeknek a számoknak egy rögzített számot kell megközelíteniük; néhány esetet vizsgáltunk, és azokban ez történt. Tegyük fel azonban, hogy ezek a meredekségek nem állapodnak meg valamilyen értéknél, hanem vég nélkül vándorolnak. Megtörténhet ez? Ha igen, milyen görbe esetében?

Képzeljünk el egy, a 62. ábrán láthatóhoz hasonló görbét. A szaggatott vonalak a vízszintessel 45°-os szöget zárnak be. A D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, ... pontokat egyre közelebb és közelebb választjuk a *C* ponthoz. Mégis, a CD_1, CD_3, CD_5, ... egyenesek meredeksége +1, a CD_2, CD_4, CD_6, ... egyenesek meredeksége –1. Így ha a *D* pont közeledik a *C* ponthoz, akkor a meredekség értéke +1 és – 1 között változik. Tegyük fel, hogy ez vég nélkül folytatható. Ez természetesen azt jelenti, hogy a görbe a C pont közelében nagyon bonyolult: *C* szomszédságában végtelen sok hegy és völgy van. És amint *D* közeledik a *C* ponthoz, a *CD* egyenes folytonosan váltakozik a két szaggatott vonal között, meredeksége sosem állapodik meg egyetlen értéknél. A görbe megközelíti a *C* pontot, de nem tudjuk megmondani, hogy milyen irányból közelíti meg. Semmilyen jelentést sem tudunk adni a „görbe meredeksége a *C* pontban” kifejezésnek.

62. ábra

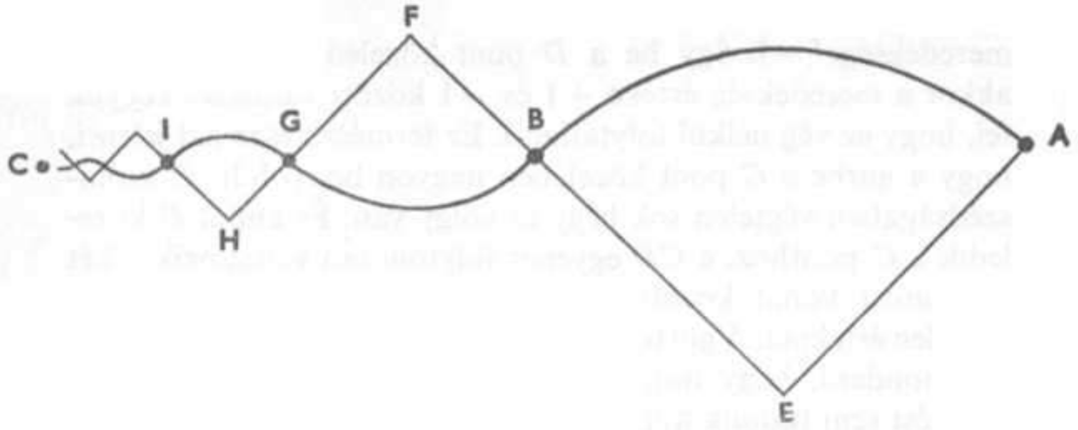


Aki járatos a trigonometriában, könnyen beláthatja, hogy az $y = x \sin (1/x)$ grafikonja az $x = 0$ pont környezetében a fenti görbéhez hasonlóan viselkedik. Szóval nem légből kapott feltevés, hogy egy pont közelében egy görbe állhat végtelen sok hullámból.

A trigonometria felhasználása nélkül is előállíthatunk ilyen görbét. A szerkesztés módja a 63. ábra és a következő leírás alapján nyilvánvaló lesz. Legyen *CA* tetszőleges hosszúságú szakasz. Legyen *B* éppen a *C és A* között félúton. Az *ABE* derékszögű háromszögnek *A* és *B* csúcsaiban a szögek 45°-osak. Így az *A* és *B* pontokat egy *E* középpontú negyedkörré köthetjük össze. A *G* pont *C* és *B* között félúton van. A *GFB* háromszög olyan, mint az *AEB* háromszög, de oldalai feleakkorák és az *AC* szakasz ellenkező oldalán helyezkedik el. A *B* és *G* pontokat egy

F középpontú negyedkörrel kötjük össze. A *GFB* háromszöget felére kicsinyítve kapjuk az *IHG* háromszöget. Itt egy H középpontú negyedkört rajzolunk. Eljárásunkat végtelen sokáig folytathatjuk, így a *CA* szakasz mentén felváltva felül és alul negyedköröket kapunk, amelyek mindegyike feleakkora, mint az előző.

63. ábra



Ha az *A, B, G, I,* ... pontsorozatot tekintjük, azt látjuk, hogy mindegyik pont feleakkora távolságra van a *C* ponttól, mint az előző. Így eljárásunkat végtelen sokáig tudjuk folytatni; mindig közelebb jutunk a *C* ponthoz, de sosem érjük el.

Ha egy *D* pont a görbén C felé mozog, akkor a *CD* egyenes nagyon gyorsan oszcillál, ahogy ezt a 62. ábrán láttuk. A *CD* egyenes meredeksége felváltva hol pozitív, hol negatív, ahogyan a *D* pont közeledik a *C* ponthoz. Belátható, hogy ezek az értékek + 1/7 és – 1/7 között váltakoznak. Így amikor *D* közeledik a *C* ponthoz, a meredekség nem tart semmilyen értékhez.

Remélem, hogy az olvasónak ezzel a példával kapcsolatban lesznek bizonyos ellenérvei. (1) Egyik ellenérve lehet, hogy ez a görbe valójában nincs is megszerkesztve, mert végtelen sok kört kell rajzolni, és egy örökkévalóság kellene ahhoz, hogy elérjük a *C* pontot, amit vizsgálni akarunk. (2) A másik ellenérv az volna, hogy ez semmi esetre sem *egy görbe,* hanem egy csomó különböző görbedarab egymás mellé helyezve.

Ezekkel az ellenérvekkel az olvasó nem áll egyedül. A második ellenérvet egy vagy két évszázaddal ezelőtt néhány igen nagy matematikus vetette fel. Az első ellenérv pedig a matematikusok között még ma is rossz érzéseket okoz és heves vitákat vált ki.

A második ellenérvre még visszatérünk. Most vessünk egy pillantást az elsőre. Természetes, hogy logikai nehézségeket látunk egy olyan szerkesztésben, amelynek kivitelezéséhez egy örökkévalóságra van szükség. De végiggondoltuk-e már, mi történne, ha csak olyan dolgokról beszélnénk, amelyek véges számú lépésben megkonstruálhatók? Gondolom, az olvasó találkozott már néhányszor a π számmal. De meg tudná-e mondani pontosan, melyik szám a π? Van aki azt mondja, hogy 3 1/7. Pontosan 3 1/7? Nem, sokkal inkább 3,1416, ami jóval kisebb, mint 3 1/7. Akkor pontosan 3,1416? Nem; több ezer tizedesjegyre kiszámították, de még így sem adható meg pontosan. De hát akkor mi ez a szám?

Látni fogjuk, hogy akárhogyan is próbáljuk megadni π értékét, mindenképpen valamilyen végtelen eljárásra van szükségünk. Általában úgy szoktuk meghatározni π értékét, mint az egység sugarú kör kerületének és átmérőjének arányát. De mi a kör kerülete? Arkhimédész a körbe és a kör köré írt 96 oldalú szabályos sokszöggel közelítette meg. Érezte, hogy a kör kerülete kisebb, mint a köréírt sokszög kerülete, és nagyobb, mint a beírt sokszög kerülete. Ily módon ki tudta számítani, hogy az egységátmérőjű kör kerülete

$$3\frac{10}{71} \quad \text{és} \quad 3\frac{1}{7}$$

közé esik. De miért kellene megállnunk a 96 oldalú sokszögnél? Nagyobb oldalszámú sokszöggel pontosabb becslést kapunk. Ez az eljárás azonban végtelen. Egyetlen ponton sem mondhatjuk befejezettnek; mindig csak azt mondhatjuk, hogy π két megadott szám közé esik. A π szám pontos értékét csak úgy definiálhatjuk, hogy vesszük mindezeket a közelítéseket; mindegyik becslés egy, a π számot tartalmazó intervallumot ad meg; π az egyetlen olyan szám, amely mindegyik intervallumban benne van; ez az egyetlen olyan szám, amely nagyobb minden körbe írt szabályos sokszög kerületénél és kisebb minden kör köré írt szabályos sokszög kerületénél.

Másképp is ki lehet számítani π értékét. Az itt következő eljárás tisztán aritmetikai jellegű. Sok vonatkozásban egyszerűbb, mint az előbbi geometriai módszer. Egyetlen hibája, hogy itt nem tudom elmagyarázni, hogyan lehet bebizonyítani. Azonban már az analízis tanulásának első évében meg lehet érteni, hogy min alapul ez a módszer. Lássuk ezek után magát a módszert. Tekintsük az

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$$

sort. Legyen S_n a sor első n tagjának összege. Így

$$S_1 = 1,\ S_2 = 1-\frac{1}{3},\ S_3 = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5},$$

és így tovább. Be lehet bizonyítani, hogy páratlan n értékekre S_n nagyobb, mint $\pi/4$, és páros n értékekre S_n kisebb, mint $\pi/4$. Továbbá, állításunk rögzíti $\pi/4$ értékét. Nincs más olyan szám, amely az S_2, S_4, S_6 ... számok mindegyikénél kisebb és az S_1, S_3, S_5 .. . számok mindegyikénél nagyobb. De mindezen számok kiszámításához egy örökkévalóságra volna szükség. Úgyhogy e módszer alapján sem tudjuk $\pi/4$ értékét pontosan megadni anélkül, hogy ne kellene egy végtelen eljárás befejezését feltételeznünk hozzá. Viszont lehetőségünk van arra, hogy $\pi/4$ értékét *olyan pontosan megközelítsük, amennyire csak akarjuk*. A sor első egymillió tagja összegének kiszámításával $\pi/4$ értékét körülbelül öt tizedesjegy pontossággal kapnánk meg; ezt az eredményt 4-gyel szorozva π egy közelítéséhez jutnánk. De egyetlen ilyen véges eljárás sem adja meg pontosan π értékét.

Valójában ez a sor nem nagyon alkalmas arra, hogy π értékét közelítően kiszámítsuk. De ez most nem is fontos, csak azt akartuk megmutatni, hogy még senki sem határozta meg pontosan π értékét valamilyen végtelen eljárás alkalmazása nélkül.

Ezek szerint, ha valaki tiltakozni akar a 128. oldalon szereplő görbe szerkesztése miatt, mivel végtelen sok lépést tartalmaz, akkor egy sereg más dolog ellen is ugyanígy tiltakozhatna. Tiltakoznia kellene, ha valaki a π számról, vagy egy kör kerületéről, területéről beszél. Ezek mind csak végtelen eljárások segítségével definiálhatók. Valójában az analízis lényeges kapcsolatban van a végtelen eljárásokkal. Az s' valódi sebesség valami olyan, amit a kis h hosszúságú intervallumokon vett átlagsebességek egyre jobban megközelítenek, de sosem érnek el. A görbe y' meredeksége valami olyan, amit a CD egyenes meredeksége egyre jobban megközelít, de sosem ér el. Ha a meredekségek és sebességek meghatározásakor végtelen eljárásokat is megengedünk, miért zárnánk ki ezeket a görbék és szabályok megalkotásakor?

Még az aritmetikában is előfordulnak végtelen eljárások. Ha az 1/9 törtet tizedestörttel akarjuk kifejezni, akkor a 0,1111111 ... számot kapjuk, amely egyesek végtelen sorozatából áll. Az aritmetikában rendszerint egész vidáman felírjuk, hogy 1/9 = 0,1111111 ..., de valójában némi magyarázatra szorul az, amikor azt mondjuk, hogy egy végtelen kifejezés egyenlő az 1/9 számmal. Mit értsünk egy ilyen kijelentésen? Hogyan tudjuk megvizsgálni? Jelentését a következőképpen magyarázhatjuk meg. Legyen

$$S_1 = 0{,}1,$$

$$S_2 = 0{,}11$$

$$S_3 = 0{,}111,$$

és így tovább. S_n azt a tizedestörtet fogja jelenteni, amelyben a tizedesvessző után n darab egyes áll. Az S_1 S_2, S_3, ... sorozatban minden szám közelebb van az 1/9-hez, mint az előző, és elég messzire menve a sorozatban az eltérést olyan kicsivé tehetjük, amilyenre csak akarjuk. Ugyanis voltaképpen

$$9S_1 = 0{,}9 = 1 - 0{,}1,$$

$$9S_2 = 0{,}99 = 1 - 0{,}01,$$

$$9S_3 = 0{,}999 = 1 - 0{,}001.$$

Elég nagy n értéket választva $9S_n$ értéke olyan közel kerül az 1-hez, amennyire csak akarjuk. Így, ha n növekszik, $9S_n$ egyre jobban megközelíti az 1-et, és ez azt jelenti, hogy S_n egyre jobban megközelíti az 1/9-et. Ennek megfelelően, amikor felírjuk az S_1, S_2, S_3, ... számokat, akkor az összes lehetséges más érték közül kiválasztjuk az 1/9-et. Ez a sorozat az 1/9 értékhez tart.

Az olvasó megfigyelheti, hogy ugyanazt a gondolatmenetet alkalmaztam a 0,1111111 ... végtelen kifejezés megmagyarázásakor, amit korábban az

$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots$$

végtelen kifejezéssel kapcsolatban. Ha ezek után valamilyen végtelen kifejezést használok, tudni fogjuk, mit értsünk azon. Bizonyos ponton megszakítjuk a kifejezést és kiszámítjuk az értékét; azután megnézzük, hogy ez az érték közeledik-e egy rögzített értékhez, ha egyre több és több tagot veszünk figyelembe.

A 0,1111111 ... végtelen tizedestörtet

$$\left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \ldots$$

alakban is felírhatjuk. A 1/10 tört ugyanolyan, mint a többi tört. Érdekes eredményeket kapunk, ha ilyen sorokat vizsgálunk:

$$\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \ldots$$

Sok más ilyen típusú kifejezést is képezhetünk és vizsgálhatunk. Ahelyett, hogy minden ilyen kifejezést külön megnéznénk, az algebra segítségével egyszerre megvizsgálhatjuk az összes

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

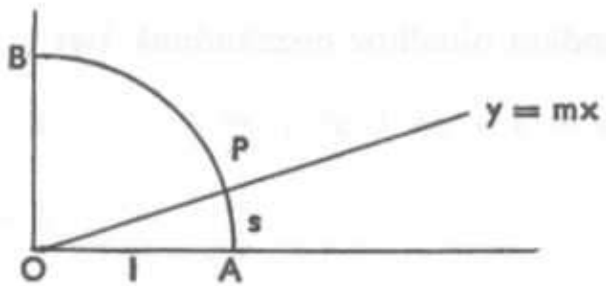
alakú végtelen kifejezést, Ez egyébként szerepel a középiskolai matematika anyagban is, ahol bebizonyítják, hogy ha x valódi tört, akkor a fenti kifejezés az x/(l - x) értékhez közeledik. Megfigyelhetjük, hogy ha x helyébe 1/10-et helyettesítünk, akkor ez a formula eredményünkkel összhangban az 1/9 értéket adja.

Az $x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$ végtelen kifejezés, ahol x valódi tört, ezek szerint az $x/(1 - x)$ közönséges algebrai kifejezéssel helyettesíthető, tehát voltaképp nem kaptunk semmiféle újat. Sok esetben azonban a végtelen kifejezések valami olyat adnak, amit más úton nem kaphatnánk meg. Például az

$$m - \frac{m^3}{3} + \frac{m^5}{5} - \frac{m^7}{7} + \frac{m^9}{9} - \cdots$$

kifejezés, ahol *m* tetszőleges valódi tört, nem helyettesíthető semmilyen közönséges algebrai kifejezéssel. Ez adja meg a 64. ábrán látható *s* ív hosszúságát. Ezen az ábrán az *A PB* egységsugarú, *O* középpontú negyedkor. Az $y = mx$ egyenes, amelynek meredeksége *m*, a kört a *P* pontban metszi. Az *AP* ív hosszúsága *s*.

64. ábra – 's' ív hosszúsága



Valójában nagyon sok olyan érdekes szabály van, amely csak végtelen sorok segítségével fejezhető ki. Ezek vizsgálatára nagyon jó módszert ad az analízis. Mind a tiszta, mind az alkalmazott matematikában az így kapott eredmények teljesen megbízhatónak és kielégítőnek bizonyultak. A matematika szegényebb lenne, a természettudományokat pedig megbénítaná a végtelen eljárások kirekesztése. Éppen ezért a matematikusok munkájuk során felhasználják a végtelen eljárásokat is. De úgy bánunk a végtelennel, mint a dinamittal; óvatosnak kell lennünk.

Az eddig elmondottaknak az volt a célja, hogy eloszlassa a kétséget, amit a 128. oldalon levő végtelen eljárással kapcsolatban érezhettünk. Ez volt az ottani első ellenvetésünk. Ugyanott egy másik ellenvetés is felmerült, mégpedig az, hogy a 63. ábrán levő grafikon nem egyetlen görbe, hanem különböző körök darabjainak egymás mellé helyezése.

Tekintsük a következő egyenletet:

$$y = \frac{1}{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots},$$

ahol feltesszük, hogy x pozitív. Gondolom, egyetértünk abban, hogy ez *egy* egyenlet, és grafikonját ennek megfelelően egy formula adja meg. Mi a grafikonja ennek az egyenletnek?

Tekintsük mindenekelőtt a grafikon x = 0 és x = 1 értékek közötti részét. Mivel x valódi tört, a 133. oldalon felírt összefüggés szerint

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{x}{1 - x}.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadunk 1-et

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = 1 + \frac{x}{1 - x} &= \\ = \frac{1 - x}{1 - x} + \frac{x}{1 - x} &= \\ = \frac{1}{1 - x}. \end{aligned}$$

Ezt az értéket behelyettesítve egyenletünk nevezőjébe kapjuk, hogy $y = 1 - x$, ha x valódi tört.

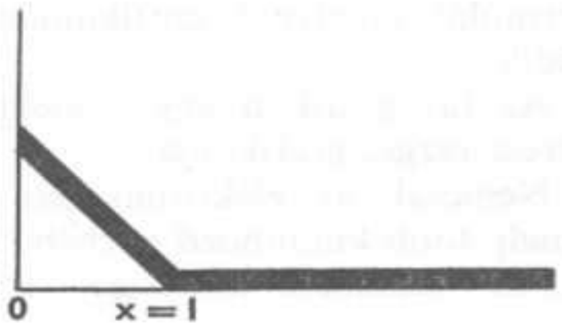
Nézzük most, mi történik, ha x nagyobb, mint 1. Ha például az $x = 2$ értéket vesszük, akkor

$$y = \frac{1}{1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots}.$$

y értékét megkapjuk, ha a nevezőben álló sorból n tagot veszünk, és megnézzük, hogy a tört értéke mihez tart, ha n egyre nagyobb és nagyobb lesz. Például, ha a nevezőben öt tagot veszünk, akkor a tört értéke 1/31 lesz; ha tíz tagot veszünk figyelembe, akkor a tört értéke 1/1023; ha húsz tagot veszünk, akkor 1 / 1 048 575. Minél több tagot veszünk figyelembe, annál kisebb lesz a tört értéke; valójában, a tört értéke a nullához közeledik, és ez az $x = 2$ értékhez tartozó y érték. Ha más 1-nél nagyobb számot veszünk, ugyanezt kapjuk. Minden 1-nél nagyobb x érték esetén y értéke nulla.

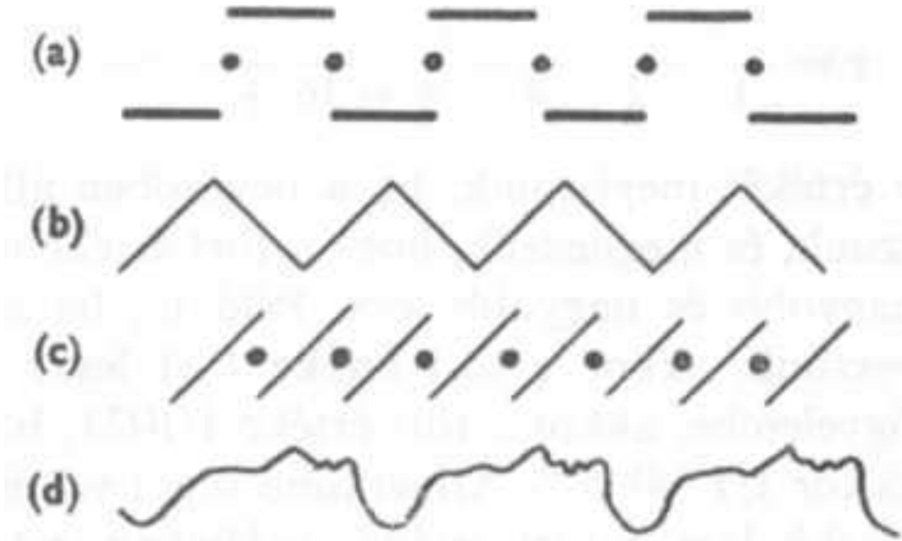
Így ez az egyszerű formula is két grafikondarabot eredményez. A 0 és 1 közötti x értékekre a grafikon egybeesik az $y = 1 - x$ egyenessel. Ha x értéke 1-nél nagyobb, akkor a grafikon az $y = 0$ egyenessel egyezik meg. Így az egyenlet grafikonja a 65. ábrán látható görbe.

65. ábra



Az elemi algebrából ismert egyszerű kifejezések nem írnak le ilyen görbét. De ha végtelen sorokkal is számolunk, akkor a több különálló geometriai alakzatból álló grafikonok mindennaposak lesznek.

Az elektronikában és más tudományágakban gyakran szerepel egy bizonyos típusú végtelen kifejezés, amelyet Fourier-sornak nevezünk. Fourier-sorral könnyen kaphatunk a 66. ábrán láthatókhoz hasonló grafikonokat.



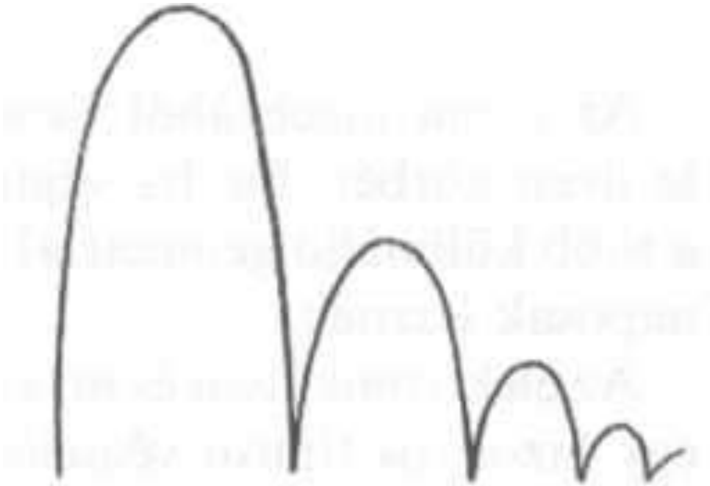
66. ábra

Az ábrán látható (c) grafikon különösen jelentős mind a televízió, mind a radar adó-vevő szempontjából. Olyan típusú mozgást reprezentál, amelyben egy fénypont állandó sebességgel mozog a képernyőn keresztül, majd hirtelen visszatér a kiindulópontra, és ez állandóan ismétlődik.

A (d) görbe egy kis tréfa, amelyet egy zeneelmélet könyvben találtam. Valaki lefényképezte a barátját és a profilt egy harmonikus analizátor nevű gépbe táplálta. A gép kiszámított egy formulát, amelynek grafikonján ez az arc újra és újra ismétlődik.

Az (a) grafikon egy négyszög-rezgés, a (b) grafikon egy fűrész-rezgés grafikonja.

Nemcsak az elektronikában találhatunk olyan grafikont, amely több különböző görbéből áll. A 67. ábra egy felpattanó labda viselkedését mutatja.

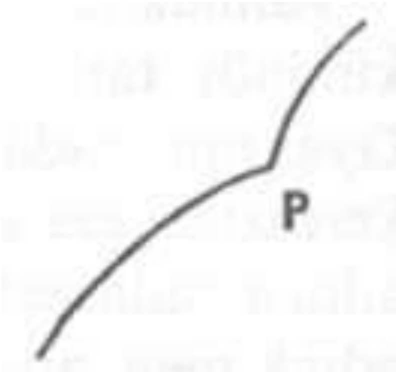


67. ábra

Érdekes, hogy – legalábbis elméletben – a labda véges idő alatt végtelen sokat pattan. Például, minden egyes felpattanás után az előző magasság negyedére ugrik fel, és mindegyik pattanás ideje fele az előzőnek.

Görbe, amelynek sehol sincs iránya

A 62. ábrán olyan görbét láttunk, amely átmegy a *C* ponton, de ebben a pontban nincs iránya. Természetesen ugyanezt elmondhatjuk arról a jóval egyszerűbb görbéről, amit a 68. ábrán látunk. Ennek a görbének a P pontban törése van, és ebben a pontban nem tudunk érintőt rajzolni hozzá. Nincs ebben semmi meglepő. Ez a görbe egyszerűen valamilyen irányban bemegy a P pontba, és egy másik irányban jön ki onnan.



68. ábra

Mindkét példánkban egyetlen olyan pont volt, ahol a görbe „rosszul” viselkedett. A 62. ábrán a görbe a C pontban tétovázik, a 68. ábrán pedig a P pontban töréspont van. A többi pontban viszont szokásosan viselkednek ezek a görbék. Hosszú évszázadokig azt gondolták, hogy az ilyen pontok kivételesek, a görbék csak izolált pontokban lehetnek ilyenek. 1875-ben azonban megjelent egy cikk, amelyből kiderült, hogy van olyan görbe, amely csupa ilyen tétova pontból áll. Bármelyik pontot is választjuk ki a görbén, a görbe átmegy rajta, de nem lehet megmondani, hogy milyen irányban! Ez nagy meglepetést okozott a matematikusoknak. Világossá vált, hogy az analízisben nem az az első kérdés, hogy „Mi a görbe meredeksége a P pontban?”, hanem az, hogy „Van-e a görbének meredeksége a P pontban?”

Az olyan egyszerű formulával kapcsolatban, mint $y = 2x^3 - 3x^2$, az iskolában azt várják a tanulótól, hogy határozza meg y'-t; nem hangsúlyozzák azt a kérdést, hogy létezik-e egyáltalán az y'. Ezen a szinten az analízisben csak olyan egyszerű formulákkal dolgoznak, amelyekre y'

biztosan létezik. Lehetnek természetesen olyan pontok, mint az $y = \sqrt{x}$ esetén a koordináta-rendszer kezdőpontja, ahol az érintő függőleges, így *y'-nek* nincs véges értéke. A görbének azonban ebben a pontban is van meghatározott iránya. A középiskolai tananyagban azonban túlnyomó többségben sima görbékkel találkozhatunk.

Mi is megtehetnénk, hogy nem foglalkozunk olyan görbékkel, amelynek nincs iránya. Mégis, komoly okunk van arra, hogy ne tegyük ezt. Mindenekelőtt gyávaság volna. Olyan régiókba értünk, ahol a dolgok másként viselkednek, mint ahogy megszoktuk; most forduljunk viszsza?

Vannak azonban más, jóval határozottabb okok is. Ez az új, különös tartomány a mi területünk határán helyezkedik el. Gyakran vadászunk olyan matematikai zsákmányra, amely keresztezi ezt a határvonalat. Ezen a ponton sem akarjuk feladni a vadászatot. Ezeket a különleges görbéket olyan formulák adják meg, amelyek pontosan olyanok, mint amilyeneket valóban alkalmazunk, nemcsak a tiszta matematikában, hanem a műszaki gyakorlatban és a természettudományokban is. Ilyeneket határoznak meg a Fourier-sorok, amelyek különösen fontosak a természettudományokban, és valójában az elméleti fizikából erednek. Az életben nehezen lehetne határvonalat húzni azok közé a jelenségek közé, amiket vizsgálni akarunk, és azok közé, amiket nem akarunk vizsgálni; minden amellett szól, hogy átlépjük ezt a mesterséges sorompót.

Tegyük fel tehát, hogy mégis foglalkozunk irány nélküli görbékkel. Nem csupán azt mondjuk, hogy ilyen görbék léteznek, hanem tudunk olyan valóságos formulát felírni, amely irány nélküli görbét ad meg. (J. L. B. Cooper egy cikkében („Mathematical Monsters," Mathematical Gazette, December, 1954) a következő példát adja: $f(x) = \sin x + 1/4 \sin 2x + 1/9 \sin 6x + 1/16 \sin 24x + \ldots$ Az általános tag $1/n^2 \sin n!\, x$.) Mi történne, ha megpróbálnánk felrajzolni egy ilyen, irány nélküli görbét? Valami ilyesmi: Tegyük fel, hogy először az $x = 0, 1, 2, 3$ értékeknek megfelelő y értékeket számítjuk ki.

A 69. ábrán látható elhelyezkedésű

69. ábra

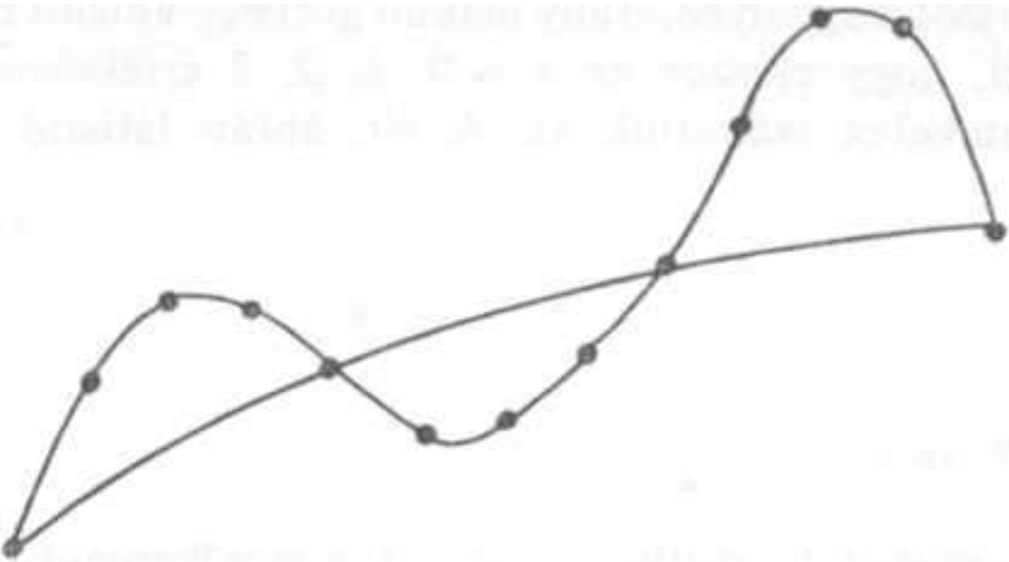
pontokat kaphatnánk, és azt gondolhatnánk, hogy a görbe valami ilyesmi:

70. ábra

A biztonság kedvéért még néhány pontot bejelölünk. Kiszámítjuk az 1/4-enkénti x értékeknek, mondjuk az $x = 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1\ 1/4, \ldots$ értékeknek megfelelő y értékeket. Azt látjuk, hogy ezek a 71. ábrán látható módon helyezkednek el.

71. ábra

Így aztán revideáljuk a görbe alakjáról alkotott eddigi elképzelésünket. Most úgy látjuk, hogy ilyen görbét kapunk:

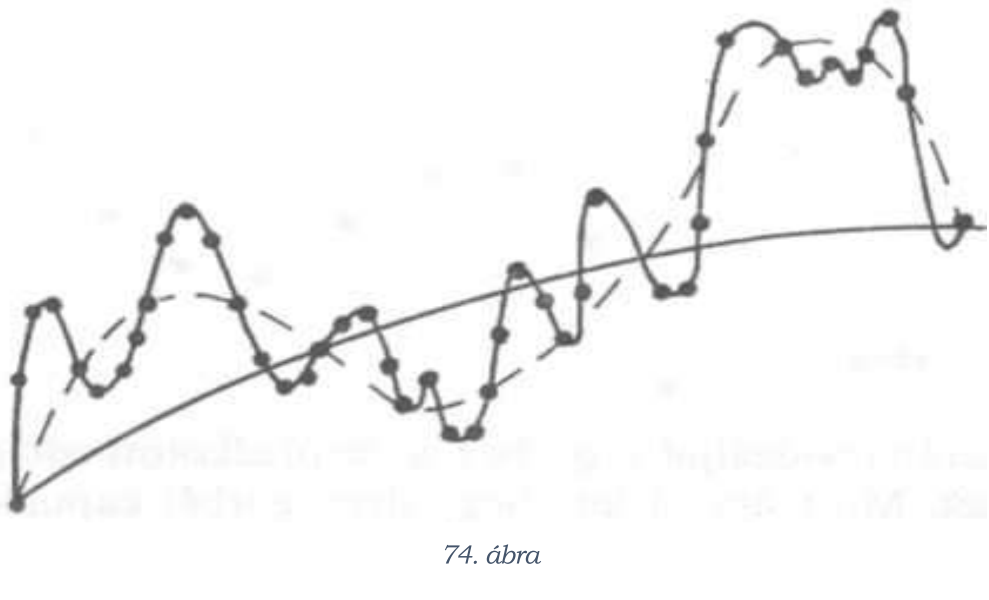


72. ábra

Újra berajzolunk még néhány további pontot, és azt tapasztaljuk, hogy ezek még több hullámhoz vezetnek. Az új pontok

73. ábra

(1/16-onként) a 73. ábrán láthatók.



74. ábra

Így a 74. ábrán látható görbét kapjuk. És így tovább. Mindegyik lépésben rövidebb és rövidebb hullámokat kapunk. A görbe végtelenül ráncos! És mégis, teljesen jól meghatározott görbe. Olyan sok pontját tudjuk megadni, ahányat csak akarunk, ugyanúgy, mint ha elemi grafikont rajzolnánk. Minél több pontot rajzolunk, annál világosabbá válik, hogy milyen a görbe alakja. De nem tudjuk egyetlen vonallal felvázolni úgy, ahogyan az egyszerűbb grafikonokat. (A 62. ábrán láttuk, hogyan érhető el az, hogy a *C* pontban a görbének nem lehet meghatározott irányt tulajdonítani: a C pont környezetében minden határon túl sűrűsödő és nem csökkenő meredekségű hullámok beiktatásával. Az itt (70–74. ábra) vázolt eljárás arra mutat rá, hogy hasonló módszerrel olyan szerkesztés is lehetséges, amely a görbe minden pontjában kizárja, hogy a görbének irányt tulajdoníthassunk.)

Szakkifejezések szótára

Könyvemben az analízis elemeit, amennyire csak lehetett, köznapi nyelven igyekeztem elmondani. Ha az olvasó majd más analíziskönyveket olvas, szüksége lesz a matematikusok által alkalmazott jelek és speciális kifejezések ismeretére.

Derivált

Azt mondjuk, hogy ***s***' az *s deriváltja*. A derivált más jelölései *ds/dt*, Ds, D_ts, Ezek pontosan ugyanazt jelentik, mint

s'.

Differenciálás

A **derivált keresésének** problémáját differenciálásnak nevezzük. Így a 3. fejezetben megtanultuk, hogyan kell a t^2-et differenciálni, a 4. fejezetben a t", az 5. fejezetben tetszőleges polinom differenciálásával ismerkedtünk meg.

Integrálás

A terület- és térfogatszámítások *integrálási* problémák. Az integrálás **a differenciálás megfordításának** tekinthető. A $\int$ jel az integrálás jele. A 9. fejezet végén meghatároztuk egy félgömb térfogatát. Eredményünket a matematikusok így írták volna fel:

$$\frac{2}{3}\pi = \int_0^1 \pi(1 - t^2)\mathrm{d}t.$$

Határérték

Ebben a könyvben sokszor megfigyeltük, hogy valami egy bizonyos értékhez „közeledik”, vagy egy bizonyos értéknél „állapodik meg”. A 2. fejezetben azt láttuk, hogy az 5, 5,9, 5,99, 5,999, ... számok a 6 értékhez közelednek. A 74. oldalon a 23. ábrán azt láttuk, hogy a *CD* egyenes meredeksége egyre közelebb és közelebb kerül a görbe *C* pontbeli meredekségéhez. Elég sok egyest írva a 0,11111 ... 111 szám olyan közel kerül az 1/9 törthöz, amennyire csak akarjuk. Mindegyik esetben valami *tart egy határértékhez.* Bár ezt a szót nem hangsúlyoztuk, a határérték fogalma átitatott mindent, amiről ebben a könyvben szó volt.

Függvény

A függvény szó jelentése fejlődött és változott az utolsó három évszázad folyamán. Az „*y* az x függvénye” kifejezés először valami olyasmit jelentett, hogy *x* és *y* között valamilyen, formulával megadható kapcsolat van. Ilyen például az $y = 2x + 1$ vagy az $y = x^2$ vagy az $y = \sqrt{(x^3 + 1)}$. Ezek mindegyikében a XVIII. század matematikusai egy formulát láttak, amely x segítségével megadja *y-t.* Tegyük fel, hogy találtak valamilyen eljárást, amely mindezekre és még sok más formulára alkalmazható. Ezt mondták: „Legyen *y* az x tetszőleges függvénye”, és ezt így rövidítették: $y = f(x)$.

Később ez a módszer már nem bizonyult elégségesnek. A 65. ábrán két vonaldarabból álló grafikont láttunk. Az $x = 0$ és $x = 1$ közötti értékekre *y* értéke $1 - x$. Ha x nagyobb, mint 1, akkor *y* értéke nulla. Így két formulánk van, $y = 1 - x$ és $y = 0$. Két függvényünk van, tehát vagy egy függvény egy részét hozzáillesztjük egy másik függvény egy részéhez, vagy ...? E kérdés viharos vitát váltott ki a matematikusok között. Az idő múlásával egyre több és több szokatlan grafikon látott napvilágot, és végül kiderült, hogy legjobb az egyszerű algebrai formulákról tanultakat elfelejteni. Megállapodtak abban, hogy y = f(x) jelenthessen bármilyen eljárást, amelynél x értékének megadása rögzíti y értékét. Így a 65. ábra grafikonja függvényt ad meg; ha tetszőleges pozitív x értéket választok, a grafikonról leolvasható a megfelelő y érték. Ha azt mondom, hogy x = 2, akkor látjuk, hogy y = 0. Ha x = 3/4, akkor y = 1/4. Nem fordulhat elő, hogy nem tudunk választ adni a kérdésre. Ha megmondom x értékét, akkor ezzel rögzítettem y értékét. Minden olyan eljárás, amely minden x értékhez hozzárendel egy y értéket, függvényt ad meg.

A 65. ábra grafikonját csak pozitív x értékekre rajzoltuk meg. A függvény tehát nincs minden x értékre értelmezve, csak pozitív x értékekre. De emiatt nem érdemes nyugtalankodni. Az algebratanulás első évében az $y = \sqrt{x}$ függvényt csak pozitív x értékekre definiálják. Nem tudunk semmit sem a negatív számok négyzetgyökéről. Azt mondjuk, hogy a $\sqrt{x}$ ***értelmezési tartománya*** (az algebra kezdetén) a pozitív x értékek halmaza. Ha az y = f(x) függvényt csak bizonyos x értékekre értelmezzük, akkor azt mondjuk, hogy ezek az értékek alkotják a *függvény értelmezési tartományát.*

Például, ha x egész szám, akkor y lehet az x legnagyobb prímtényezője, de ennek a definíciónak nincs értelme, ha x törtszám. Olyan függvényt definiáltunk, amelynek értelmezési tartománya az egész számok halmaza.

A hagyományos algebrában x és y számokat jelentenek. De függvényekről akkor is beszélhetünk, ha szó sincs számokról. Például, tegyük fel, hogy az 1789 év óta eltelt összes időpontot tekintjük. Ezek alkotják a függvény értelmezési tartományát. Ezekben az években minden időpontban volt az Egyesült Államok elnökének valamilyen színű szeme. A történelmet ismerve meg tudjuk mondani, hogy melyik időpontban milyen színű szemről van szó. Olyan eljárásunk van tehát, amellyel az 1789 óta eltelt időponthoz egy meghatározott színt rendel hozzá. Eljárásunk függvényt ad meg. Hosszú út vezetett az algebrai formuláktól idáig! A „függvény” szót napjainkban ebben a nagyon tág értelemben használjuk.

Még valamit. A közönséges algebrához visszatérve tekintsük át a következő két eljárást:

I. eljárás:

- ❖ Vegyünk tetszőleges x számot.
- ❖ Adjunk hozzá 1-et.
- ❖ Az eredményt emeljük négyzetre.
- ❖ Ez megadja y értékét.

II. eljárás:

- ❖ Vegyünk tetszőleges x számot.
- ❖ Emeljük négyzetre.
- ❖ Adjuk hozzá a szám kétszeresét.
- ❖ Adjunk hozzá 1-et.
- ❖ Ez megadja y értékét.

Mindegyik eljárás egy függvényt definiál. Az eljárások különbözők. Mondhatjuk-e, hogy a kapott függvények is különbözők?

Vegyük például az $x = 5$ értéket. Az első eljárás szerint $y = (5 + 1)^2 = 36$, a II. eljárás szerint $y = 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = 36$. Így mindkét eljárás esetében az $x = 5$ értékhez az $y = 36$ érték tartozik. Bármilyen számot is veszünk, mindig ezt tapasztaljuk. Az I. eljárás az $y = (x + 1)^2$ formulának, a II. eljárás az ezzel ekvivalens $y = x^2 + 2x + 1$ formulának felel meg.

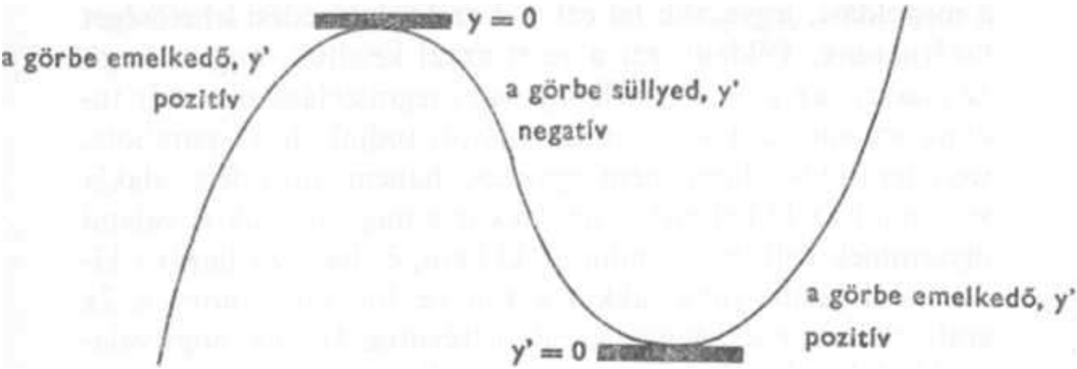
A matematikusok egyetértenek abban, hogy mindkét eljárás ***ugyanazt*** *a függvényt* adja meg. Bennünket csak a végeredmény érdekel. Ha bármilyen eljárásnál az $x = 5$ esetén az $y = 36$, $x = 1$ esetén az y =

4, és általában $x=n$ esetén az $y=(n+1)^2$ értéket kapjuk, akkor ez ugyanazt a függvényt adja meg, mint a fenti I. eljárás.

Találkozhat az olvasó a függvény így kezdődő definíciójával: „A függvény **olyan rendezett párok** halmaza, ...". Ez nagyon sűrített és absztrakt összefoglalása mindannak, amit a fentiekben körvonalaztam. Nem szeretem az olyan definíciót, amelyik így kezdődik: „A függvény ...”, éppúgy, mint ahogy az olyan definíciók sem tesznek boldoggá, mint például „Az elektromosság ...” vagy „A mágnesesség...” vagy „Az arany ...”. Közelebb áll hozzám, ha olyan vizsgálatsort adhatok, amelynek alapján azt mondhatja az olvasó, hogy „Ez valószínűleg egy elektromosan töltött test” vagy „Ez valószínűleg egy mágnes”, vagy „Ez valószínűleg egy darab arany”. Ugyanígy, a fenti vizsgálatok alapján az olvasó meg tudja mondani, hogy (I) egy adott eljárás mikor ad meg függvényt, és (II) két látszólag különböző eljárás mikor adja meg ugyanazt a függvényt.

Fontos, hogy különbséget tegyünk a *függvény* és a *függvény értéke* között. Ha f a fenti I. eljárással megadott függvényt jelenti, akkor azt írhatjuk, hogy $36 = f(5)$. Ez azt jelenti, hogy az I. eljárás az $x = 5$ érték esetében az $y = 36$ értékhez vezet. Ha $x = 5$, akkor a *függvény értéke* 36. Helytelen volna azt mondani, hogy az f függvény a 36. Közelebb állunk az igazsághoz, ha azt mondjuk, hogy maga az f betű a következő operációt jelzi: „adjunk hozzá 1-et és emeljük négyzetre”. Az $f(5)$ azt az eredményt jelenti, amit akkor kapunk, ha ezt az eljárást az **5 számra** alkalmazzuk.

Ábrajegyzék


y = 0
a görbe emelkedő, y'
pozitív
a görbe süllyed, y'
negatív
a görbe emelkedő, y'
pozitív
y' = 0

Könyvadatok

GONDOLAT • BUDAPEST 1974

Az eredeti mű címe: What is Calculus about?

Random House and The L. W. Singer Company

Fordította Sztrókay Kálmán

A fordítást ellenőrizte Pásztor István

A fordítás a negyedik kiadás alapján készült

ISBN XXXX

Útmutató a további olvasáshoz

Több anyagot tartalmaz és a differenciál- és integrálszámításba hasonlóan szemléletes és könnyen érthető bevezetést nyújt:

Mansfield–Bruckheimer: Matematika új felfogásban, IV. kötet

Banach: Differenciál- és integrálszámítás

Beke Manó: Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba

Szász Pál: Differenciál- és integrálszámítás