MŰEGYETEM 1782

TYPOTEX

Fritz Józsefné, Kónya Ilona,
Pataki Gergely és Tasnádi Tamás

MATEMATIKA 1.

2011.

A „Matematika 1.” elektronikus oktatási segédanyag a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Villamosmérnöki és Informatika Karán a mérnök-informatikus szakos hallgatók „Analízis 1” tárgyához készült, de haszonnal forgathatják más szakok, karok vagy műszaki főiskolák, egyetemek hallgatói is, akik hasonló mélységben hasonló anyagot tanulnak matematikából.

Az anyag numerikus sorok, sorozatok elméletét, egyváltozós valós függvények határértékét, folytonosságát, differenciálását és integrálását tárgyalja. A definíciók, tételek, bizonyítások mellett kiemelt szerepet kapnak a példák, és a gyakran előforduló feladattípusok megoldásai.

A mintegy 260 oldalas elméleti anyagot kiegészíti egy több, mint 100 oldalas példatár, amely többségében megoldott, tematizált gyakorlófeladatokat tartalmaz. A két pdf állomány kölcsönösen hivatkozik egymásra. Az eligazodást tartalomjegyzék, valamint az elméleti anyagban található tárgymutató segíti. A megértést színes ábrák könnyítik, az érdeklődő olvasó pedig a *Thomas Calculus* illetve a *Calculusapplets* kapcsolódó weboldalaira is ellátogathat külső hivatkozásokon keresztül. A háttérszínezéssel tagolt elméleti anyag fekete-fehér változata is rendelkezésre áll, amely nyomtatásra javasolt formátum.

Kulcsszavak: sor, sorozat, folytonosság, kalkulus, differenciálás, integrálás.

Támogatás:
Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0028 számú, a „Természettudományos (matematika és fizika) képzés a műszaki és informatikai felsőoktatásban” című projekt keretében.

Készült:
A BME TTK Matematikai Intézet gondozásában.

Szakmai felelős vezető:
Ferenczi Miklós

Lektorálta:
Pröhle Péter

Az elektronikus kiadást előkészítette:
Győri Sándor[1], Fritz Ágnes, Kónya Ilona, Pataki Gergely, Tasnádi Tamás

Címlap grafikai terve:
Csépány Gergely László, Tóth Norbert

ISBN 978-963-279-445-7

[1] Korábbi változatot szerkesztette.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Valós számsorozatok

1.1. Bevezető

T

1.1.1. A valós számok ($\mathbb{R}$) axiómái

Algebrai axiómák

$\mathbb{R}$-ben értelmezett két művelet: $+$ és $\cdot$
Ezek a műveletek nem vezetnek ki az adott halmazból, $\mathbb{R}$-ből, tehát $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$-re: $a + b \in \mathbb{R}$ és $a \cdot b \in \mathbb{R}$.

$+$ művelet tulajdonságai (1–4.)

1. $(a + b) + c = a + (b + c), \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$-re (az összeadás *asszociatív*).
2. Létezik egyetlen szám (ezt 0-val jelöljük), amelyre teljesül, hogy
$$0 + a = a + 0 = a, \quad \text{ha} \quad a \in \mathbb{R}.$$
3. Minden $a \in \mathbb{R}$ számhoz létezik pontosan egy olyan $x \in \mathbb{R}$, amelyre
$$x + a = a + x = 0.$$
Az így értelmezett x-et $(-a)$-val jelöljük. (Neve: additív inverz.)
4. $a + b = b + a, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$-re (az összeadás *kommutatív*)

$\cdot$ művelet tulajdonságai (5–8.)

5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ (a szorzás *asszociatív*)

[1] lásd Thomas 01-es bemutató 1. fejezet (3-10. oldal).

6. Létezik egyetlen szám, amelyet 1-gyel jelölünk ($1 \neq 0$), amelyre teljesül, hogy
$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \quad \text{ha} \quad a \in \mathbb{R}$$
7. Minden $a \neq 0$-hoz létezik egyetlen $x \in \mathbb{R}$, amelyre
$$x \cdot a = a \cdot x = 1$$
Az így értelmezett x-et az $a \neq 0$ szám reciprokának nevezzük, és $\dfrac{1}{a}$-val jelöljük.
8. $a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$ (a szorzás *kommutatív*)

A két műveletre $(+$ és $\cdot)$-ra együttesen érvényes tulajdonság (9.)

9. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ (*disztributívitás*)

Rendezési axiómák (10–13.)

10. Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ számpárra az
$$a < b, \quad b < a, \quad a = b$$
relációk közül pontosan egy teljesül (trichotom tulajdonság).
11. Ha $a < b$ és $b < c$ (röviden $a < b < c$), akkor $a < c$, $(\forall\, a, b, c \in \mathbb{R})$ (tranzitívitás)
12. Ha $a < b$, akkor $a + c < b + c$, $(\forall\, a, b, c \in \mathbb{R})$ (a rendezés *monoton*).
13. Ha $a < b$ és $c > 0$, akkor $a \cdot c < b \cdot c$, $(\forall\, a, b, c \in \mathbb{R})$.

Archimédesz-féle axióma (14.)

14. Tetszőleges $b > 0$ számhoz található b-nél nagyobb n természetes szám.

Cantor-féle axióma (15.)

15. Ha minden $n \in \mathbb{N}$ számnak megfeleltetünk egy $I_n = \{x : a_n \leq x \leq b_n,\ x \in \mathbb{R}\}$ halmazt (röviden $[a_n, b_n]$ zárt intervallumot) oly módon, hogy
$$a_n \leq a_{n+1}, \quad b_{n+1} \leq b_n, \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$
akkor
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$$
Vagyis: egymásba skatulyázott *zárt* intervallumsorozat elemeinek metszete nem üres. $(\exists\, \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \xi \in \mathbb{R})$

(M) Zártság fontos! ($I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$ esetén $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$)

1.1.2. A rendezési axiómákból levezethető

A rendezésre vonatkozóan könnyű belátni, hogy igazak az alábbi állítások (szokás ezeket az „egyenlőtlenségekkel való számolás szabályai"-nak is nevezni):

1. Minden $a \in \mathbb{R}$ számra az
$$a > 0, \quad a = 0, \quad -a > 0$$
tulajdonságok közül pontosan egy teljesül. ($a > 0 \iff (-a) < 0$)

2. $(a < b) \ \wedge \ (c < d) \quad \Longrightarrow \quad a + c < b + d$
Speciálisan: $(a > 0) \ \wedge \ (b > 0) \quad \Longrightarrow \quad a + b > 0$

3. $(0 \le a < b) \ \wedge \ (0 \le c < d) \quad \Longrightarrow \quad ac < bd$
Speciálisan: $(a > 0) \ \wedge \ (b > 0) \quad \Longrightarrow \quad ab > 0$

4. $(a < b) \ \wedge \ (c < 0) \quad \Longrightarrow \quad ac > bc$
Speciálisan: $a < b \quad \Longrightarrow \quad -a > -b$

5. $0 < a < b \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$
$a < b < 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$
$a < 0 < b \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$
$$a < b \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ll} ab > 0: & \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} \\ ab < 0: & \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} \end{array}$$

6. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ esetén
$$|a + b| \le |a| + |b| \quad \text{és}$$
$$||a| - |b|| \le |a - b| \,.$$

7. Ha n pozitív egész szám, és $0 < a < b$, akkor $a^n < b^n$.

Hasonlóan következnek az abszolútérték tulajdonságai.

1.1.3. Néhány fogalom

$H \subset \mathbb{R}$

(D) H felülről korlátos, ha $\exists\, k_f \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\, x \in H : \ x \le k_f$. ($k_f$: felső korlát)

(D) H alulról korlátos, ha $\exists\, k_a \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\, x \in H: \; k_a \leq x$. ($k_a$: alsó korlát)

(D) H korlátos, ha felülről is és alulról is korlátos, tehát $\exists\, k: \; |x| \leq k$.

(D) A felülről korlátos H halmaz legkisebb felső korlátját szuprémumnak (felső határnak) nevezzük.
Jele: $\sup H$.

(D) Az alulról korlátos H halmaz legnagyobb alsó korlátját infimumnak (alsó határnak) nevezzük.
Jele: $\inf H$.

(Pl.) $H = \{1 - \dfrac{1}{n},\; n \in \mathbb{N}^+\} = \{0\,,\, 1 - \frac{1}{2}\,,\, 1 - \frac{1}{3}\,,\, 1 - \frac{1}{4}\,,\, \dots\}$ esetén:

Megoldás. Felső korlátok például: $1, 3, \pi, \; \dots$
Alsó korlátok például: $0, -2, -56, \; \dots$
$\sup H = 1$ (nincs a halmazban legnagyobb elem), $\inf H = 0$ ($=$ legkisebb elem)

Dedekind folytonossági tétel:

(T) *Felülről korlátos nem üres számhalmaznak mindig van szuprémuma.* ($\neg B$)

Ebből következik:

(K) *Alulról korlátos nem üres számhalmaznak mindig van infimuma.*

(M) A fenti axiómarendszerben a Cantor-féle és az Archimédesz-féle axióma lecserélhető ezzel az állítással.

●●●

1.2. Számsorozatok és határérték

A valós számsorozat a természetes számokon értelmezett valós értékű függvény:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\,,$$

az n helyen felvett értéke $f(n) = a_n$, $n = 1, 2, \dots$.

[2] lásd Thomas 11-es bemutató 1. fejezet (3-20. oldal).

A számsorozat jelölése:

$$(a_n), \quad \text{vagy} \ \ \langle a_n \rangle, \quad \text{vagy} \ \ a_n, \ n = 1, 2, \dots \ .$$

D (a_n) felülről korlátos, ha $\exists\, k_f$: $\forall\, n$-re: $a_n \le k_f$.

D (a_n) alulról korlátos, ha $\exists\, k_a$: $\forall\, n$-re: $k_a \le a_n$.

D (a_n) korlátos, ha alulról is és felülről is korlátos, tehát $\exists\, k$:

$$|a_n| \le k \quad (k = \max\{|k_a|, |k_f|\}).$$

Vagyis a fenti definíciók szerint ilyenkor $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvény értékkészlete korlátos.

1.2.1. Számsorozat konvergenciája

D Azt mondjuk, hogy (a_n) konvergens és határértéke (limesze) $A \in \mathbb{R}$, jelben

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A\,,$$

ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $(\varepsilon \in \mathbb{R})$ $\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy

$$|a_n - A| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

$N(\varepsilon)$ neve: küszöbindex, küszöbszám

M A definícióval ekvivalens:
$\forall\, \varepsilon > 0$-ra az $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ intervallumon kívül a sorozatnak véges sok eleme van.
(Az intervallumon belül pedig végtelen sok eleme van.)

•••

Az alábbi példáknál a definíció segítségével bizonyítsuk be, hogy a megadott A a számsorozat határértéke!

Pl. $A = 0$, ha a) $a_n = \dfrac{1}{n}$ b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

Megoldás. Mindkét esetben:

$$|a_n - A| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad N(\varepsilon) \ge \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$$

Például $\varepsilon = 0,001$ esetén $N = 1000$ választás megfelelő.

Pl. $\boxed{a_n = \dfrac{6\,+\,n}{5,1\,-\,n}\,, \qquad\qquad A = -1}$

Megoldás.

$$|a_n - A| = \left|\frac{6\,+\,n}{5,1\,-\,n} - (-1)\right| = \left|\frac{11,1}{5,1\,-\,n}\right| \underbrace{=}_{n>5} \frac{11,1}{n\,-\,5,1} < \varepsilon \quad\Longrightarrow\quad n > 5,1 + \frac{11,1}{\varepsilon}$$

Ezért $\qquad N(\varepsilon) \geq \left[5,1 + \dfrac{11,1}{\varepsilon}\right]$.

Pl. $\boxed{a_n = \dfrac{n^2\,-\,1}{2n^5\,+\,5n\,+\,8}\,, \qquad\qquad A = 0}$

Megoldás. $|a_n - A| = \left|\dfrac{n^2\,-\,1}{2n^5\,+\,5n\,+\,8}\right| = \dfrac{n^2\,-\,1}{2n^5\,+\,5n\,+\,8} < \varepsilon$

Ezt az egyenlőtlenséget nem tudjuk megoldani n-re. Azonban nem szükséges a lehető legkisebb küszöbindex előállítása. Elegendő megmutatnunk, hogy létezik küszöbindex. Ezért a megoldáshoz felhasználhatjuk az egyenlőtlenségek tranzitív tulajdonságát, például az alábbi módon:

$$|a_n - A| = \frac{n^2\,-\,1}{2n^5\,+\,5n\,+\,8} < \frac{n^2\,-\,0}{2n^5\,+\,0\,+\,0} = \frac{1}{2\,n^3} < \varepsilon \quad\Longrightarrow\quad n > \sqrt[3]{\frac{1}{2\,\varepsilon}}.$$

Ezért $\qquad N(\varepsilon) \geq \left[\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\,\varepsilon}}\right]$.

Pl. $\boxed{a_n = \dfrac{8n^4\,+\,3n\,+\,20}{2n^4\,-\,n^2\,+\,5}\,, \qquad\qquad A = 4}$

Megoldás.

$$|a_n - A| = \left|\frac{8n^4\,+\,3n\,+\,20}{2n^4\,-\,n^2\,+\,5} - 4\right| = \left|\frac{4n^2\,+\,3n}{2n^4\,-\,n^2\,+\,5}\right| =$$

$$= \frac{4n^2\,+\,3n}{2n^4\,-\,n^2\,+\,5} < \frac{4n^2\,+\,3n^2}{2n^4\,-\,n^4\,+\,0} = \frac{7}{n^2} < \varepsilon \quad\Longrightarrow\quad \frac{7}{\varepsilon} < n^2$$

Innen $\qquad N(\varepsilon) \geq \left[\sqrt{\dfrac{7}{\varepsilon}}\right]$.

1.2.2. Számsorozat divergenciája

A nem konvergens számsorozatokat divergens számsorozatnak nevezzük.

Például: $\boxed{a_n = (-1)^n \ \text{ divergens}}$.

Ugyanis a sorozat elemei: $(-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$
Határértékként csak a -1 vagy az 1 jöhetne szóba. De például $\varepsilon = 1$ választással kiderül, hogy egyik sem lehet a határérték, mert bár pl. a -1 pont 1 sugarú környezete végtelen sok elemet tartalmaz (az a_{2n-1} elemeket), de rajta kívül is végtelen sok van (az a_{2n} elemek). Így nem található hozzá $N(\varepsilon)$, tehát -1 nem lehet a határérték. Ugyanígy belátható, hogy 1 sem jöhet szóba határértékként. Tehát a sorozat nem konvergens, így divergens.

A divergens sorozatoknak két fontos speciális esete a $+\infty$-hez és a $-\infty$-hez divergáló számsorozat.

A megfelelő definíciók:

D

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\,,$$

ha $\forall\, P > 0$-hoz $(P \in \mathbb{R})$ $\exists\, N(P) \in \mathbb{N}\,,$ hogy

$$a_n > P, \quad \text{ha } n > N(P)$$

D

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\,,$$

ha $\forall\, M < 0$-hoz $(M \in \mathbb{R})$ $\exists\, N(M) \in \mathbb{N}\,,$ hogy

$$a_n < M, \quad \text{ha } n > N(M)$$

Ez a definíció megfogalmazható $M > 0$ feltétellel is:

$$\forall\, M > 0\text{-hoz } \exists\, N(M) \in \mathbb{N} : \quad a_n < -M, \text{ ha } n > N(M)$$

Pl. $\boxed{a_n = 2n^3 + 3n + 5 \qquad \text{Bizonyítsa be, hogy } \lim_{n\to\infty} a_n = \infty\,!}$

Megoldás.

$$a_n = 2n^3 + 3n + 5 > 2n^3 > P \quad \Longrightarrow \quad n > \sqrt[3]{\frac{P}{2}} \quad \Longrightarrow \quad N(P) \geq \left[\sqrt[3]{\frac{P}{2}}\right]$$

Pl. $a_n = \dfrac{6 - n^2}{2 + n}$ Bizonyítsa be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty\,!$

Megoldás. Teljesítendő, hogy $a_n = \dfrac{6 - n^2}{2 + n} < M \ (< 0)$, ha $n > N(M)$.
Ez egyenértékű a következő feltétellel:
$(-a_n =)\ \dfrac{n^2 - 6}{2 + n} > -M \ (> 0)$, ha $n > N(M)$. A feladatot egyszerűsítjük, hiszen most sem a legkisebb küszöbindexet keressük:

$$\frac{n^2 - 6}{2 + n} \underbrace{>}_{n\geq 4 \text{ esetén } \frac{n^2}{2}>6} \frac{n^2 - \frac{n^2}{2}}{2n + n} = \frac{n}{6} > -M \quad\Longrightarrow\quad n > -6M$$

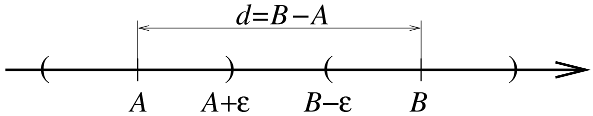
Ezért $N(M) \geq \max\{4, [-6M]\}$.

1.3. További tételek a határértékről (1)

1.3.1. A határérték egyértelműsége

T *Ha* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *és* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = B$, *akkor* $A = B$.

B Indirekt módon bizonyítunk[3]. Tehát feltesszük, hogy $A \neq B$, például $A < B$.
Legyen $d = B - A > 0$ és $\varepsilon = \dfrac{d}{3} > 0\,!$



A számsorozat konvergenciája miatt létezik $N_1(\varepsilon)$ és $N_2(\varepsilon)$, hogy

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon, \quad \text{ha } n > N_1(\varepsilon),$$
$$B - \varepsilon < a_n < B + \varepsilon, \quad \text{ha } n > N_2(\varepsilon).$$

De ekkor $\forall\, n > \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ esetén:

$$a_n < A + \varepsilon < B - \varepsilon < a_n$$

Ez pedig ellentmodás, tehát nem igaz, hogy $A \neq B$, vagyis $A = B$. ■

1.3.2. A konvergencia szükséges feltétele

P $\Longrightarrow$ Q, a P állításból következik a Q állítás. Ezt kétféleképpen is megfogalmazhatjuk:

1. P elégséges feltétele Q-nak,

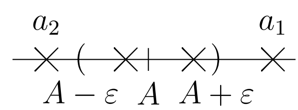
2. Q szükséges feltétele P-nek. (Hiszen, ha Q nem teljesül, akkor már P nem teljesülhet, mert P teljesüléséből már következne Q teljesülése.)

T *(a_n) konvergens $\Longrightarrow$ (a_n) korlátos*
(Tehát a korlátosság szükséges feltétele a konvergenciának.)

B $\forall\, \varepsilon > 0$-ra $\exists\, N(\varepsilon)$:

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon\,, \quad \text{ha} \quad n > N(\varepsilon) = N$$

Tehát $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ - on kívül legfeljebb csak az $a_1, a_2, \ldots, a_N$ elemek eshetnek.



$$\Longrightarrow \begin{cases} \exists\, k_a \;:\; \forall\, n\text{-re } k_a \le a_n & k_a = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_N, A - \varepsilon\} \\ \exists\, k_f \;:\; \forall\, n\text{-re } a_n \le k_f & k_f = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_N, A + \varepsilon\}. \end{cases}$$

Így $\exists\, K :\; |a_n| \le K$, tehát korlátos. ■

M $\Longleftarrow$ nem igaz. (Az állítás nem megfordítható.)
Példa: $a_n = (-1)^n$ korlátos, de nem konvergens.

Pl. Konvergens-e az alábbi sorozat: $\boxed{a_n = \begin{cases} 2n + 1, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \dfrac{1}{3n^2 + 1}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}}$

Megoldás. Nem konvergens, mert nem korlátos. ($a_{2m} = 2 \cdot 2m + 1 = 4m + 1 \le k \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$-re ellentmond az Archimédesz-féle axiómának.)

1.4. Határérték és műveletek

1.4.1. Műveletek konvergens számsorozatokkal

T₁ $\boxed{(a_n \to A) \;\wedge\; (b_n \to B) \quad \Longrightarrow \quad (a_n + b_n \to A + B)}$

B Tehát be kell látni, hogy

$$c_n = a_n + b_n \;\to\; C = A + B,$$

azaz $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy

$$|c_n - C| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

Legyen $\varepsilon^* = \dfrac{\varepsilon}{2}$! Az a_n és b_n számsorozatok konvergenciája miatt

$\exists\, N_1(\varepsilon^*) = N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right) \wedge\ N_2(\varepsilon^*) = N_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, hogy

$$\left.\begin{array}{rl} & |a_n - A| < \varepsilon^* = \dfrac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, n > N_1(\varepsilon^*) \\ \text{és} & |b_n - B| < \varepsilon^* = \dfrac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, n > N_2(\varepsilon^*) \end{array}\right\} \implies \text{Ha } n > \max\{N_1(\varepsilon^*), N_2(\varepsilon^*)\},$$

akkor

$$|c_n - C| = |(a_n + b_n) - (A + B)| =$$
$$= |(a_n - A) + (b_n - B)| \le |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon^* + \varepsilon^* = 2\,\varepsilon^* = \varepsilon$$

Tehát a keresett $N(\varepsilon) = \max\left\{N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right), N_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$ ■

M A bizonyításnál felhasználtuk a háromszög egyenlőtlenséget. ($|a+b| \le |a| + |b|$)

T$_2$ $\boxed{(a_n \to A) \implies (c\, a_n \to c\, A)}$

B (i) $c = 0$ esetén az állítás triviálisan igaz.

(ii) $c \ne 0$ esetén:

Legyen $\varepsilon^* = \dfrac{\varepsilon}{|c|}$!

a_n konvergenciája miatt $\exists\, N_1(\varepsilon^*) = N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{|c|}\right)$, hogy

$$|a_n - A| < \varepsilon^* \qquad \forall\, n > N_1(\varepsilon^*)$$

$$\implies |c\, a_n - c\, A| = |c\,(a_n - A)| = |c|\,|a_n - A| < |c|\,\varepsilon^* = |c|\,\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

$$\forall\, n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right) = N(\varepsilon)$$ ■

M A bizonyításnál felhasználtuk, hogy $|a\, b| = |a|\,|b|$.

K *(i)* $(a_n \to A) \implies (-a_n \to -A)$ *(Most $c = -1$)*

(ii) $(a_n \to A) \wedge (b_n \to B) \quad \Longrightarrow \quad a_n - b_n = a_n + (-b_n) \to A + (-B) = A - B$

(T_1, T_2-ből következik)

T₃

$$\boxed{\begin{array}{l} \textit{(i)}\ (a_n \to 0) \wedge (b_n \to 0) \quad \Longrightarrow \quad a_n b_n \to 0 \\ \textit{(ii)}\ (a_n \to A) \wedge (b_n \to B) \quad \Longrightarrow \quad a_n b_n \to AB \end{array}}$$

B (i) $\exists\, N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ és $N_2(2)$, hogy

$$\left.\begin{array}{ll} |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2} & \forall\, n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = N_1 \\ |b_n - 0| < 2 & \forall\, n > N_2(2) = N_2 \quad (\varepsilon = 2 \text{ most }) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow$$

Ha $n > \max\{N_1, N_2\}$, akkor $\quad |a_n b_n - 0| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon.$

(ii) Mivel a $c_n \equiv A$ $\forall\, n$-re (stagnáló sorozat) $\to A$, ezért

$$(a_n - A \to A - A = 0) \wedge (b_n - B \to B - B = 0).$$

T_3 (i)-et alkalmazva kapjuk: $\quad (a_n - A) \cdot (b_n - B) \to 0$, vagyis

$$a_n b_n - A b_n - B a_n + AB \to 0.$$

Ekkor

$$a_n b_n = (\underbrace{a_n b_n - A b_n - B a_n + AB}_{\substack{\downarrow \\ 0}}) + (\underbrace{A b_n + B a_n - AB}_{\substack{\downarrow \\ AB + AB - AB}}) \to AB$$

■

M Nyilván három konvergens sorozat szorzata az egyes határértékek szorzatához konvergál. Teljes indukcióval belátható, hogy véges sok konvergens sorozat szorzata is az egyes sorozatok határértékének szorzatához konvergál. Hasonlóan általánosítható T_2 véges sok konvergens sorozat összegére.

Pl.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} = 1^{10} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k} = 1^{k} = 1 \quad (k \in \mathbb{N}^+ \text{ adott konstans, független } n\text{-től})$$

De vigyázat!

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \neq 1^{n} = 1$$

Az utolsó példában alkalmazott módszer ún. „letakarás” lenne. Eddig megismert tételeinkben nem véletlenül nem volt erről szó, mert alkalmazása rossz eredményhez vezethet. Később látni fogjuk, hogy a 3. sorozat határértéke a matematikában jól ismert e $\neq 1$ szám.

T_3^* $\boxed{(a_n \to 0) \wedge (b_n \textit{ korlátos}) \implies a_n b_n \to 0}$

B A feltételek miatt:

$$\forall\, \varepsilon^* > 0\text{-hoz } \exists\, N_a(\varepsilon^*) : \qquad |a_n - A| < \varepsilon^*, \text{ ha } n > N_a(\varepsilon^*),$$

másrészt $|b_n| \le K$.
Ekkor

$$|a_n b_n - 0| = |a_n|\,|b_n| \le |a_n|\, K < \varepsilon^* K = \varepsilon$$

Tehát $\varepsilon^* = \dfrac{\varepsilon}{K}$ választás mellett az a_n sorozathoz megtalált küszöbindex megfelel az $a_n b_n$ sorozathoz keresett küszöbindexnek.

Így $N(\varepsilon) = N_a\left(\dfrac{\varepsilon}{K}\right)$ választással

$$|a_n b_n - 0| < \varepsilon, \qquad \text{ha } n > N(\varepsilon)$$

■

T_4 $\boxed{(a_n \to A) \implies (|a_n| \to |A|)}$

B $||a_n| - |A|| \le |a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$. ■

M $(|a_n|)$ konvergenciájából általában nem következik (a_n) konvergenciája.
(Pl. $a_n = (-1)^n$ divergens, de $|a_n| = 1^n = 1 \to 1$).

Speciálisan azonban igaz: $|a_n| \to 0 \implies a_n \to 0$.
Ugyanis
$$\big|\,|a_n| - 0\,\big| = |\,a_n\,| = |\,a_n - 0\,| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

T5

$$\boxed{\begin{array}{l} \textit{(i)}\ (b_n \to B \neq 0) \implies \dfrac{1}{b_n} \to \dfrac{1}{B} \\[2ex] \textit{(ii)}\ (b_n \to B \neq 0) \wedge (a_n \to A) \implies \dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{A}{B} \end{array}}$$

B (i) Mivel T_4 szerint $|b_n| \to |B|$, ezért $\exists\, N_1\left(\dfrac{|B|}{2}\right) = N_1$, hogy

$$\big||b_n| - |B|\big| < \frac{|B|}{2}, \quad \text{ha } n > N_1$$

azaz

$$|B| - \frac{|B|}{2} < |b_n| < |B| + \frac{|B|}{2}, \quad \text{ha } n > N_1$$

vagyis

$$|b_n| > \frac{|B|}{2}, \quad \forall\, n > N_1.$$

Másrészt $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, N_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\,|B|^2\right) = N_2(\varepsilon^*)$, hogy

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}\,|B|^2 = \varepsilon^* \quad \forall\, n > N_2(\varepsilon^*).$$

Így ha $n > N(\varepsilon) := \max\{N_1, N_2\}$, akkor:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - b_n}{B \cdot b_n}\right| = \frac{|B - b_n|}{|B| \cdot |b_n|} < \frac{|B - b_n|}{|B| \cdot \dfrac{|B|}{2}} < \frac{\varepsilon^*}{|B| \cdot \dfrac{|B|}{2}} =< \frac{\dfrac{\varepsilon}{2}\,|B|^2}{|B| \cdot \dfrac{|B|}{2}} = \varepsilon$$

(ii) $\dfrac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \dfrac{1}{b_n} \to A \cdot \dfrac{1}{B} = \dfrac{A}{B}$ $\quad T_3$ és T_5 (i) miatt. ∎

Néhány példa az előző tételek alkalmazására

Pl. $\boxed{a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{500}{n^2}} \to \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{500 \text{ db}} = 0$

Megoldás. A tagok száma 500 (n-től független!), ezért T_1 véges sokszori alkalmazásával a 0 eredmény helyesnek adódik.

Pl. $\boxed{b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}} \to 0 + \cdots + 0 = 0$ HIBÁS gondolatmenet!!!

Megoldás. Hiszen

$$b_1 = \frac{1}{1^2}, \quad b_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^2}, \quad b_3 = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2}, \quad b_4 = \frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^2}, \ldots$$

Így a tagok száma itt függ n-től, ez nem véges sok sorozat összege, így a T_1 tétel erre már nem terjeszthető ki. A helyes megoldás:

$$b_n = \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} = \frac{(1+n) \cdot \frac{n}{2}}{n^2} = \frac{1+n}{2n} = \frac{\frac{1}{n} + 1}{2} \to \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

Pl. $\boxed{a_n = \frac{8n^2 - n + 3}{n^2 + 9}} = \underbrace{\frac{n^2}{n^2}}_{=1} \frac{8 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{9}{n^2}} \to \frac{8 - 0 + 0}{1 + 0} = 8$

Pl. $\boxed{a_n = \left(\frac{2n+1}{3-n}\right)^3 \frac{3n^2 + 2n}{2 + 6n^2}}$

Megoldás.

$$a_n = \underbrace{\left(\frac{2n}{-n}\right)^3}_{=-8} \left(\frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 - \frac{3}{n}}\right)^3 \underbrace{\frac{3n^2}{6n^2}}_{=\frac{1}{2}} \frac{1 + \frac{2}{3n}}{1 + \frac{1}{3n^2}} \to -8 \cdot 1^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -4$$

M A hatványozásnál a szorzatra vonatkozó tételt alkalmaztuk.

Pl. $\boxed{a_n = \underbrace{\frac{n^2 - 5}{2n^3 + 6n}}_{b_n} \underbrace{\sin\left(n^4 + 5n + 8\right)}_{c_n}} \to 0\,.$

Megoldás. Hiszen $$b_n = \underbrace{\frac{n^2}{2n^3}}_{=\frac{1}{2n}\to 0} \frac{1-\dfrac{5}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n^2}} \to 0\cdot 1 = 0 \quad \text{és} \quad c_n \quad \text{korlátos.}$$

●●●

1.4.2. Néhány jól használható egyszerűbb tétel

T $\boxed{(a_n \geq 0) \wedge (a_n \to A \geq 0) \quad \Longrightarrow \quad (\sqrt{a_n} \to \sqrt{A})}$

B (i) $A = 0$ esete:

$$\begin{array}{l} \left|\sqrt{a_n} - 0\right| = \sqrt{a_n} < \varepsilon, \\ \text{ha } n > N(\varepsilon) = N_a(\varepsilon^2) \end{array} \quad \Longleftarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq |a_n - 0| = a_n < \varepsilon^2, \text{ ha } n > N_a(\varepsilon^2) \\ (a_n \to 0 \text{ miatt } \exists\, N_a(\varepsilon^2)) \end{array} \right.$$

(ii) $A > 0$ esete:

$a_n \to A$ miatt $\exists\, N_a(\varepsilon\sqrt{A}) = N_a(\varepsilon^*)$:

$|a_n - A| < \varepsilon \cdot \sqrt{A} = \varepsilon^*$, ha $n > N_a\left(\varepsilon\sqrt{A}\right)$

De ekkor

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{A}\right| = \left|\frac{a_n - A}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}}\right| = \frac{|a_n - A|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} \leq \frac{|a_n - A|}{\sqrt{A}} < \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{A}}{\sqrt{A}} = \varepsilon\,,$$

tehát $N(\varepsilon) = N_a(\varepsilon^*)$ ■

M $a_n \geq 0,\ a_n \to A \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{A}$ tetszőleges rögzített $k \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Pl. $\boxed{a_n = \sqrt{4n^2 + 5n - 1} - \sqrt{4n^2 + n + 3}}$ ($\infty - \infty$ alakú)

Megoldás.

$$a_n = \frac{4n^2 + 5n - 1 - (4n^2 + n + 3)}{\sqrt{4n^2 + 5n - 1} + \sqrt{4n^2 + n + 3}} =$$

$$= \frac{4n - 4}{\sqrt{4n^2 + 5n - 1} + \sqrt{4n^2 + n + 3}} =$$

$$= \underbrace{\frac{4n}{\sqrt{4n^2}}}_{=\frac{4n}{2n}=2} \frac{1 - \dfrac{1}{n}}{\sqrt{1 + \dfrac{5}{4n} - \dfrac{1}{4n^2}} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{4n} + \dfrac{3}{4n^2}}} \to 2 \cdot \frac{1}{1+1} = 1$$

1.4.3. Feladatok

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n^2+\sqrt{n}-1}{3n^2+8}} = ?$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2+5n} - \sqrt{2n^2+3}\right) = ?$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+4}\right) = ?$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{2n^4+n^3-2n^2+8}}{\sqrt[3]{n^6+5n^2+3}} = ?$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4+4n^2-n} - \sqrt{n^4-n^2-n+1}\right) = ?$

•••

T $\boxed{(a_n \to \infty) \quad \Longrightarrow \quad \left(\dfrac{1}{a_n} \to 0\right)}$

B Tudjuk, hogy $\exists\, N_a(P)$:

$$a_n > P > 0\,, \quad \text{ha} \;\; n > N_a(P).$$

■

Tehát $\dfrac{1}{P} > \dfrac{1}{a_n} > 0\,,$ ha $n > N_a(P)$. $\quad P = \dfrac{1}{\varepsilon}$ választással kapjuk, hogy

$$0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon\,, \quad \text{ha} \;\; n > N_a(P).$$

Vagyis

$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon\,, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon) = N_a(P).$$

($a_n > 0$ feltehető, hiszen csak véges sok negatív elem lehet. Ezek elhagyhatók.)

Pl. $\boxed{(a_n \to 0) \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \left(\dfrac{1}{a_n} \to \infty\right)}$

Megoldás. Nem következik!
Például

$$a_n = \frac{-2}{n} \qquad \text{esetén} \qquad \frac{1}{a_n} = -\frac{n}{2} \;\to\; -\infty$$

Vagy például

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{esetén} \quad \frac{1}{a_n} = (-1)^n n^2 := b_n$$
$$b_{2m} \to \infty, \quad b_{2m+1} \to -\infty. \qquad \text{Tehát} \quad \frac{1}{a_n} \not\to \infty.$$

De igaz:

$$((a_n > 0) \wedge (a_n \to 0)) \implies \left(\frac{1}{a_n} \to \infty\right)$$
$$((a_n < 0) \wedge (a_n \to 0)) \implies \left(\frac{1}{a_n} \to -\infty\right)$$

Ezt röviden így fogjuk jelölni az indoklásoknál: $\dfrac{1}{0+} \to +\infty$, $\dfrac{1}{0-} \to -\infty$

T $\boxed{(a_n \to 0) \implies \left(\dfrac{1}{|a_n|} \to \infty\right)}$

B Tudjuk, hogy $\exists\, N_a(\varepsilon)$:

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon, \quad \text{ha} \;\; n > N_a(\varepsilon).$$

Vagyis $\quad \dfrac{1}{|a_n|} > \dfrac{1}{\varepsilon} = P\,, \;$ ha $\quad n > N_a(\varepsilon) = N(P).$ ■

•••

További hasonló tételek bizonyíthatók:

Pl. $\quad \dfrac{0}{\infty} \to 0 \quad$ (Jelentése: $a_n \to 0\,,\; b_n \to \infty \quad$ esetén $\quad \dfrac{a_n}{b_n} \to 0$)

$\left(\text{sőt} \quad \dfrac{\text{korlátos}}{\infty} \to 0\,;\right) \quad \dfrac{\infty}{+0} \to \infty\,; \quad \infty + \infty \to \infty\,; \quad \infty \cdot \infty \to \infty$

(Felhasználhatóak bizonyítás nélkül.)

Határozatlan alakok:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0 \cdot \infty; \quad \infty - \infty; \quad 1^{\infty}; \quad \infty^0; \quad 0^0$$

Ilyen esetekben azonos átalakítással próbálkozunk, ill. később kapunk egy segédeszközt (L'Hospital-szabály).

1.5. További tételek a határértékről (2)

A limesz monoton:

(T) $\boxed{(a_n \to A,\, b_n \to B,\, a_n < b_n, \forall n \in \mathbb{N}^+) \Longrightarrow (A \leq B,\ \textit{tehát}\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n)}$

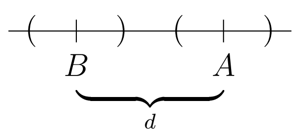
(M₁) Példa $A = B$ esetére:

$$a_n = \underbrace{1 - \frac{1}{n}}_{\substack{\downarrow \\ 1 = A}} < b_n = \underbrace{1 + \frac{1}{n}}_{\substack{\downarrow \\ 1 = B}}$$

(M₂) $a_n \to A, \quad b_n \to B, \quad a_n \leq b_n$ esetén is igaz az állítás.

(M₃) $a_n \to A, \quad b_n \to B, \quad a_n \leq b_n$, ha $n > N_1$ ($\exists$ ilyen N_1) feltétel is elég.

(B) Megmutatjuk, hogy $A > B$ nem lehet, így a trichotom tulajdonság miatt $A \leq B$.



Ha $A > B$ lenne, akkor pl. $\varepsilon := \dfrac{d}{3} = \dfrac{A-B}{3} > 0$-hoz a számsorozatok konvergenciája miatt $\exists\, N_a, N_b$:

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, n > N_a\,(\varepsilon)\text{-ra}\ \ |a_n - A| < \varepsilon \\ \forall\, n > N_b\,(\varepsilon)\text{-ra}\ \ |b_n - B| < \varepsilon \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$a_n > b_n$, ha $n > \max\{N_a, N_b\}$
Ez pedig a feltétel miatt nem lehetséges.

■

Rendőrelv:

(T)

$$\left(\begin{array}{l} a_n \to A \\ b_n \to A \end{array} \quad \textit{és} \quad \begin{array}{l} a_n \leq c_n \leq b_n \\ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{array}\right) \Longrightarrow (c_n \to A)$$

(M) A tétel állítása most is igaz marad, ha a $\forall n \in \mathbb{N}$ feltétel helyett a gyengébb $\forall\, n > N_1$ ($\exists$ ilyen N_1) feltételt használjuk.

(B) A feltételek miatt:
Ha $n > N_a(\varepsilon)$: $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ és $A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon$, ha $n > N_b(\varepsilon)$.

$N(\varepsilon) := \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon)\}$.

Ha $n > N(\varepsilon)$, akkor az előzőek miatt:

$$A - \varepsilon \, < \, a_n \, \le \, c_n \, \le \, b_n \, < \, A + \varepsilon.$$

Tehát, ha $n > N(\varepsilon)$

$$A - \varepsilon \, < \, c_n \, < \, A + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |c_n - A| < \varepsilon \, .$$

Vagyis $c_n \to A$, ezzel az állítást bebizonyítottuk. ■

Speciális rendőrelv:

(T)

(i) $(a_n \ge b_n) \wedge (b_n \to \infty) \quad \Longrightarrow \quad a_n \to \infty$

(ii) $(a_n \le b_n) \wedge (b_n \to -\infty) \quad \Longrightarrow \quad a_n \to -\infty$

(B) $(\neg B)$ ■

●●●

Néhány nevezetes számsorozat

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & ha\ |a| < 1, \\ 1, & ha\ a = 1, \\ \infty, & ha\ a > 1, \\ \multicolumn{2}{l}{oszcillálóan\ divergens\ egyébként.} \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} n^k\, a^n = 0,$ *ha* $|a| < 1$ *és* $k \in \mathbb{N}^+$ $(\neg B)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1,$ *ha* $p > 0.$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$ $(\neg B)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty\,; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2^n} = \infty\,; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = \infty\,; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n} = \infty.$$

1.6. Néhány példa az előző tételek alkalmazására

Pl. $\boxed{a_n = \dfrac{3n^5+n^2-n}{n^3+3}} > \dfrac{3n^5+0-n^5}{n^3+3n^3} = \dfrac{n^2}{2} \to \infty \quad \Longrightarrow \quad a_n \to \infty$

Másik megoldás:

$$a_n = \frac{n^5}{n^3} \underbrace{\frac{3+\dfrac{1}{n^3}-\dfrac{1}{n^4}}{1+\dfrac{3}{n^3}}}_{c_n} > n^2 \cdot 2 \to \infty \quad \Longrightarrow \quad a_n \to \infty$$

Felhasználtuk, hogy

$$c_n \to 3 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, N_0 : \; 2 < c_n \; (<4)\,, \text{ ha } n > N_0$$

M Persze belátható lenne, hogy $b_n \to \infty$, $c_n \to C > 0$ esetén $b_n\, c_n \to \infty$. Mi azonban ezt nem bizonyítottuk be, ezért nem használhatjuk fel a megoldásnál.

Pl. $\boxed{a_n = \dfrac{1}{n^4+3} \cos\left(n^7-5\right)} \overset{?}{\to} 0\,,$

Megoldás.

$$\underbrace{\frac{1}{n^4+3}\cdot(-1)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \le a_n \le \underbrace{\frac{1}{n^4+3}\cdot 1}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \quad \underset{\text{a rendőrelv miatt}}{\Longrightarrow} \quad a_n \to 0\,.$$

Másik megoldás: egy nullsorozat és egy korlátos sorozat szorzatáról van szó, így egy korábbi tétel miatt a szorzat is nullsorozat.

Pl. $\boxed{a_n = \dfrac{3^{2n}}{4^n+3^{n+1}} \to ?}$

Megoldás. $$\frac{3^{2n}}{4^n+3^{n+1}} = \underbrace{\frac{9^n}{4^n}}_{=\left(\frac{9}{4}\right)^n \to \infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+3\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}}_{\to 1}$$

Tehát $+\infty$ határértéket várunk, ezért a speciális rendőrelvet használjuk:

$$a_n > \left(\frac{9}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{1+3\cdot 1} \to \infty$$
$$\Longrightarrow \quad a_n \to \infty\,.$$

Pl. $a_n = \dfrac{2^{2n} + (-3)^{n-1}}{5^{n+2} + 7^{n+1}} \to ?$

Megoldás. $\dfrac{2^{2n} + (-3)^{n-1}}{5^{n+2} + 7^{n+1}} = \dfrac{4^n - \frac{1}{3} \cdot (-3)^n}{25 \cdot 5^n + 7 \cdot 7^n} =$

$$= \underbrace{\frac{4^n}{7^n}}_{=\left(\frac{4}{7}\right)^n \to 0} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^n}{25 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n + 7} \to 0 \cdot \frac{1-0}{0+7} = 0$$

Pl. $a_n = \dfrac{n^2 + 9^{n+1}}{2\,n^5 + 3^{2n-1}} \to ?$

Megoldás. $\dfrac{n^2 + 9^{n+1}}{2\,n^5 + 3^{2n-1}} = \dfrac{n^2 \left(\frac{1}{9}\right)^n + 9}{2\,n^5 \left(\frac{1}{9}\right)^n + \frac{1}{3}} \quad \dfrac{9^n}{9^n} \quad \to \quad \dfrac{0+9}{0+\frac{1}{3}} = 27$

Felhasználtuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} n^k\, a^n = 0$, ha $|a| < 1$. (Most $a = \dfrac{1}{9}$.)

Pl. Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+100}}$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Megoldás. $a_n \to \underbrace{0 + 0 + \ldots 0}_{100 \text{ darab}} = 0$

A (b_n) sorozatnál már nem alkalmazható az előbbi módszer, mivel az egyes tagok ugyan nullához tartanak, de a tagok száma végtelenhez tart ($\infty \cdot 0$ alakú). A rendőrelv segítségével tudjuk megoldani a feladatot.

$$\underbrace{\frac{n}{n}\ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}}_{\downarrow\atop 1} = n\,\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < b_n < n\,\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \underbrace{\frac{n}{n}\ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}}_{\downarrow\atop 1}$$

$$\Longrightarrow \quad b_n \to 1\,.$$

Pl. $\boxed{\text{Bizonyítsuk be, hogy } \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a \in \mathbb{R})\ !}$

Megoldás. Ha $a = 0$: triviálisan igaz.

Ha $0 < a < 1$: $\frac{0}{\infty}$ alakú, ezért 0-hoz tart a sorozat.

Ha $a = 1$: $\frac{1}{n!} \to 0.$

Ha $a > 1$: $n > [a]$ esetén

$$\underset{\underset{0}{\downarrow}}{0} < \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{[a]}\cdot\frac{a}{[a]+1}\cdots\frac{a}{n} < \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{[a]}\cdot 1\cdot 1\cdots 1\,\frac{a}{n} = \frac{a^{[a]}}{[a]!}\,\frac{a}{n} = \frac{konstans}{\underset{\underset{0}{\downarrow}}{n}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{a^n}{n!} \to 0\,.$$

Ha $a < 0$:

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{(-1)^n\,|a|^n}{n!} = \underbrace{(-1)^n}_{\text{korlátos}}\ \underbrace{\frac{|a|^n}{n!}}_{\to 0} \quad\to\quad 0$$

Pl. $\boxed{a_n = \sqrt[3n]{n} \to ?}$

Megoldás. $\sqrt[3n]{n} = \dfrac{\sqrt[3n]{3n}}{\sqrt[3n]{3}} \quad\to\quad \dfrac{1}{1} = 1$

Ugyanis az $\sqrt[n]{n}$ és az $\sqrt[n]{p}$ $(p = 3)$ részsorozatairól van szó.

Másik megoldás: $a_n = \sqrt[3n]{n} = \sqrt[3]{\sqrt[n]{n}} \quad\to\quad \sqrt[3]{1} = 1$

Pl. $\boxed{a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2n^5+5n}{8n^2-2}}} \quad\to\quad ?\,,$

Megoldás.

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{4}}\quad\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}_{\substack{\downarrow\\ 1\cdot 1^3 = 1}} = \sqrt[n]{\frac{2n^5}{8n^2}} \le \sqrt[n]{\frac{2n^5+5n}{8n^2-2}} \le \sqrt[n]{\frac{2n^5+5n^5}{8n^2-2n^2}} = \underbrace{\sqrt[n]{\frac{7}{6}}\quad\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}_{\substack{\downarrow\\ 1\cdot 1^3 = 1}}$$

$$\implies \quad a_n \to 1\,.$$

Pl. $\boxed{a_n = \sqrt[n]{\dfrac{3^n+5^n}{2^n+4^n}} \to ?}$

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\;\frac{5}{4}}_{\substack{\downarrow \\ \frac{5}{4}}} = \sqrt[n]{\frac{5^n}{4^n+4^n}} < \sqrt[n]{\frac{3^n+5^n}{2^n+4^n}} < \sqrt[n]{\frac{5^n+5^n}{4^n}} = \underbrace{\sqrt[n]{2}\;\frac{5}{4}}_{\substack{\downarrow \\ \frac{5}{4}}}$$

$$\implies \quad a_n \to \frac{5}{4}\,.$$

•••

1.7. Monoton sorozatok

Elégséges tétel (a_n) konvergenciájára:

T *(i) Ha (a_n) monoton növekedő és felülről korlátos, akkor konvergens.*

(ii) Ha (a_n) monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens.

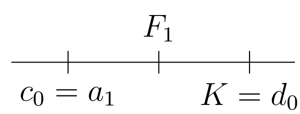
A két esetet összevonva a tétel így is kimondható :
Ha (a_n) monoton és korlátos, akkor konvergens.

B Monoton növekedő esetre:

Felveszünk egy $I_n = [c_n, d_n]$ egymásba skatulyázott zárt intervallumsorozatot, ahol
c_n: mindig a számsorozat egy eleme és
d_n: mindig felső korlát.
Így az (a_n) sorozat elemei véges sok elem kivételével a $[c_n, d_n]$-ben vannak. A Cantor-axióma szerint az I_n intervallumok metszete nem üres. Választunk a metszetből egy elemet, erről belátjuk, hogy a számsorozat határértéke. Mivel a határérték egyértelmű, azt is beláttuk, hogy ebben a speciális intervallumsorozatban egyetlen közös elem van, mert az intervallumok hossza 0-hoz tart.

Részletesen:

$a_1 \le a_n \le K \quad \exists\, K$ (a korlátosság miatt)
$I_0 = [c_0, d_0] := [a_1, K]$



$$F_1 := \frac{c_0 + d_0}{2}$$

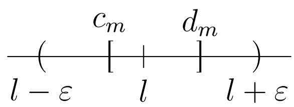
Ha F_1 felső korlát, akkor $c_1 = c_0,\ d_1 = F_1,\quad I_1 = [c_1, d_1] := [c_0, F_1]$
Ha F_1 nem felső korlát: $\exists\, a_{n_1} > F_1$ és ekkor $c_1 = a_{n_1}, d_1 = d_0,\quad I_1 = [c_1, d_1] := [a_{n_1}, d_0]$

$$F_2 := \frac{c_1 + d_1}{2}$$

Ha F_2 felső korlát: $I_2 = [c_2, d_2] := [c_1, F_2]$
Ha F_2 nem felső korlát: $\exists\, a_{n_2} > F_2$ és ekkor $I_2 := [a_{n_2}, d_1]$.

Stb.

$\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ (Cantor-axióma), tehát $\exists\, l \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} I_n$.
Belátjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.



I_n hossza: $\quad d_n - c_n \leq \dfrac{K - a_1}{2^n} < \varepsilon\,,\;$ ha $\quad n > N(\varepsilon)$. Az előzőek miatt

$$0 < l - c_n \leq d_n - c_n < \varepsilon \quad \text{és} \quad 0 < d_n - l \leq d_n - c_n < \varepsilon\,, \quad \text{vagyis}$$

$$l - \varepsilon < c_n \leq d_n < l + \varepsilon\,, \text{ ha } \quad n > N(\varepsilon).$$

Mivel $c_m = a_{n_m}$ és $(a_n) \nearrow$:

$$c_m = a_{n_m} \leq a_n, \text{ ha } n > n_m \quad \text{és} \quad a_n \leq d_m \ \text{(felső korlát)}\ \forall\, n \quad \Longrightarrow$$

$$l - \varepsilon\ < c_m = a_{n_m} \leq a_n\ \leq d_m\ < l + \varepsilon\,, \text{ ha } \quad n > n_m = N(\varepsilon)$$

Tehát valóban $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$. ■

•••

1.7.1. Példák rekurzív sorozatokra

A rekurzív megadású számsorozatok konvergenciája sok esetben vizsgálható az előző elégséges tétel alkalmazásával. Erre mutatunk most néhány példát.

Pl. $a_1 = \dfrac{4}{3};\qquad a_{n+1} = \dfrac{3 + a_n^2}{4};\qquad n = 1, 2, \ldots$
Konvergens-e a sorozat? Ha igen, mi a határértéke?

Megoldás. $a_1 = 1{,}33 > a_2 = \dfrac{3 + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2}{4} = 1{,}194 > a_3 = 1{,}1067$
Sejtés: $(a_n) \searrow$, tehát $\quad a_n > a_{n+1} > 0$.
Bizonyítás: teljes indukcióval.

1. $a_1 > a_2 > a_3 > 0$ teljesül

2. Tfh. $a_{n-1} > a_n > 0$

3. Igaz-e:
$$\frac{3+a_{n-1}^2}{4} = a_n \overset{?}{>} a_{n+1} = \frac{3+a_n^2}{4}$$
2. miatt $\quad a_{n-1} > a_n \geq \frac{3}{4} > 0$
$$\Longrightarrow \quad a_{n-1}^2 > a_n^2 \quad \Longrightarrow \quad 3+a_{n-1}^2 > 3+a_n^2$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{3+a_{n-1}^2}{4} = a_n \ > \ a_{n+1} = \frac{3+a_n^2}{4}$$
Tehát a számsorozat monoton csökkenő és alulról korlátos (hiszen $a_n > 0$)
$\Longrightarrow \quad (a_n)$ konvergens, és fennáll:
$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3+a_{n-1}^2}{4}$$
$$A = \frac{3+A^2}{4} \quad \Longrightarrow \quad A^2 - 4A + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = 1 \ \text{ vagy } \ A = 3.$$
$A = 3$ nem lehet, mivel $a_n < a_1 = \dfrac{4}{3}$, ezért a_n nem esik a 3 szám pl. 1 sugarú környezetébe. Így $\quad A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1\,.$

Pl. $a_1 = 1; \qquad a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}; \qquad n = 1, 2, \dots$

Konvergens-e a sorozat? Ha igen, mi a határértéke?

Megoldás. $(a_n) = (1,\ 2{,}646,\ 2{,}94, \dots)$

$\sqrt{6+a_n} \geq 0$ miatt a sorozat elemei pozitívak ((ii)-ben precízen megmutatjuk).

(i) Ha a sorozat konvergens lenne, akkor létezne
$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6+a_{n-1}} = \sqrt{6+A}\,, \quad \text{vagyis} \quad A^2 - A - 6 = 0\,.$$
Ebből $A = 3$ vagy $A = -2$ lehetne. $a_n = \sqrt{6+a_{n-1}} > 0$ miatt $A = -2$ nem lehet. Így csak az $A = 3$ jöhet szóba.

(ii) Sejtés: $(a_n) \nearrow$.
Bizonyítás: teljes indukcióval. (Egyidejűleg belátjuk, hogy $a_n > 0\,.$)

$0 < a_1 < a_2 < a_3 \quad$ igaz.
Tegyük fel, hogy $\quad 0 < a_{n-1} < a_n\,.$

Igaz-e, hogy

$$0 \overset{?}{<} \sqrt{6+a_{n-1}} = a_n \overset{?}{<} a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$$

Az indukciós feltevés miatt $\quad 0 < a_{n-1} < a_n$

$$\Longrightarrow \quad 0 < 0+6 < 6+a_{n-1} < 6+a_n \quad (a_n > 0 \text{ miatt})$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < \sqrt{6+a_{n-1}} < \sqrt{6+a_n}$$

Vagyis $\quad 0 < a_n < a_{n+1}$.

Tehát a sorozat monoton növekedő és elemei értelmezettek és pozitívak.

(iii) Létezik-e K felső korlát? K-nak most célszerű A-t választani. Teljes indukcióval belátjuk, hogy $\quad a_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

$a_1 < 3$ teljesül. Tegyük fel, hogy $a_n < 3$. Ekkor

$$a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} < \sqrt{6+3} = 3.$$

Tehát (a_n) felülről korlátos (felső korlátja 3).

(iv) Vagyis $(a_n) \nearrow \wedge (a_n)$ felülről korlátos $\quad \Longrightarrow \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A.$
Láttuk, hogy $A = 3$ lehet csak.

(M) A monotonitás másképpen is belátható:

$$0 < a_n \overset{?}{<} a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$$

$$a_n^2 \overset{?}{<} 6 + a_n$$

$$a_n^2 - a_n - 6 \overset{?}{<} 0$$

Ez igaz, ha $-2 < a_n < 3$, de ezt még be kell bizonyítani. $-2 < a_n$ triviálisan igaz ($a_n > 0$ miatt), $a_n < 3$ pedig teljes indukcióval bizonyítandó.

(Pl.) $a_1 = -3; \qquad a_{n+1} = \dfrac{5 - 6\,a_n^2}{13}; \qquad n = 1, 2, \dots$

Konvergens-e a sorozat?

Megoldás. Monoton csökkenő-e?

$$a_{n+1} = \frac{5 - 6a_n^2}{13} \overset{?}{<} a_n\,, \quad \text{amiből} \quad 6a_n^2 + 13a_n - 5 \overset{?}{>} 0.$$

$$\left(6x^2+13x-5=0, \quad x_{1,2}=-\frac{5}{2}\,;\ \frac{1}{3}\right)$$

Tehát monoton csökkenő, ha $a_n < -\dfrac{5}{2}$, vagy $a_n > \dfrac{1}{3}$.

Most teljes indukcióval belátható, hogy $a_n \le -3 \quad \left(< -\dfrac{5}{2}\right)$ (HF.)

Tehát a sorozat monoton csökkenő a -3 kezdőértékkel.

Ha a sorozat alulról korlátos lenne, akkor konvergens lenne, és a határértéke:

$$A=\frac{5-6A^2}{13} \quad \Longrightarrow \quad A=-\frac{5}{2} \text{ vagy } A=\frac{1}{3} \text{ lehetne.}$$

Mivel most $a_n \le -3 \ \forall n$-re $\Longrightarrow$ (a_n) nem konvergens, vagyis alulról nem korlátos

$\Longrightarrow$ $\forall M$-hez $\exists n_0$, hogy $a_{n_0} < M$.

Mivel $(a_n) \searrow$, ezért $a_n < a_{n_0} < M$, ha $n > n_0$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

1.8. Egy kitüntetett számsorozat

Ⓣ $e_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *korlátos és* $\nearrow$ $\Longrightarrow$ (e_n) *konvergens.*

Ⓑ 1. Korlátosság (a binomiális tétel felhasználásával):

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k=1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}\,\frac{1}{n^k}=$$

$$=1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{0<\cdots<1}\underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{0<\cdots<1}\cdots\underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{0<\cdots<1}\right) <$$

$$< 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} := s_n$$

De (s_n) felülről korlátos, mert

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdots n} <$$
$$< 1 + 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) =$$
$$= 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3$$

Tehát $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < s_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < 3.$

2. (e_n) monoton nő:

$$e_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\right) =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}_{>1-\frac{1}{n}}\cdots\underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)}_{>1-\frac{k-1}{n}}\right) + \binom{n+1}{n+1}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} >$$

$$> 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right) + 0 = e_n$$

Tehát $e_{n+1} > e_n$. ■

Mivel $(e_n) \nearrow$ és korlátos $\Longrightarrow$ konvergens.
A sorozat határértékét e-vel jelöljük.

$$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

A fentiek miatt: $2 < e < 3$.

Belátható (mi nem bizonyítjuk), hogy e nem racionális szám, továbbá:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x\,, \qquad x\in\mathbb{R}$$

1.8.1. Néhány e-vel kapcsolatos példa

Pl. $\boxed{a_n = \left(1+\dfrac{1}{n^3+n+6}\right)^{n^3+n+6}}$ $\to e$, ugyanis (e_n) egy részsorozatáról van szó.

Pl. $$\boxed{a_n = \left(1+\frac{1}{n-6}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n-6}\right)^{n-6} \left(1+\frac{1}{n-6}\right)^6 \to e\cdot 1^6 = e$$

Pl. $$\boxed{a_n = \left(1+\frac{1}{6n+1}\right)^{6n-7}} = \left(1+\frac{1}{6n+1}\right)^{6n+1} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{6n+1}\right)^8} \to e\cdot\frac{1}{1^8} = e$$

Pl. $$\boxed{a_n = \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{n-2}} = \left(\frac{n+4-1}{n+4}\right)^{n+4-6} =$$

$$= \left(1+\frac{-1}{n+4}\right)^{n+4} \frac{1}{\left(\dfrac{n+4}{n+3}\right)^6} \to e^{-1}\cdot\frac{1}{1^6} = \frac{1}{e}$$

$$\left(\text{Felhasználtuk, hogy} \quad \frac{n+4}{n+3} = \frac{1+\dfrac{4}{n}}{1+\dfrac{3}{n}} \to \frac{1+0}{1+0} = 1\right)$$

Másik megoldás:

$$a_n = \frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n} \quad \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^2 \quad \to \quad \frac{e^3}{e^4}\cdot 1^2 = \frac{1}{e}$$

Pl. $\boxed{a_n = \left(\frac{n^2-2}{n^2+3}\right)^{n^2}} = \frac{\left(1+\frac{-2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{n^2}} \quad \to \quad \frac{e^{-2}}{e^3} = e^{-5}$

Pl. $\boxed{a_n = \left(\frac{n+1}{n+6}\right)^{2n}} = \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{6}{n}\right)^n}\right)^2 \quad \to \quad \left(\frac{e^1}{e^6}\right)^2 = e^{-10}$

Pl. $\boxed{a_n = \left(\frac{2n+2}{2n+9}\right)^{2n}} = \frac{\left(1+\frac{2}{2n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{9}{2n}\right)^{2n}} \quad \to \quad \frac{e^2}{e^9} = e^{-7}$

Pl. $\boxed{a_n = \left(\frac{2n^2+5}{2n^2+3}\right)^{4n^2} \to ?}$

Megoldás. Két átalakítással is megoldjuk.

1. megoldás:

$$a_n = \left(\frac{\left(1+\frac{5}{2n^2}\right)^{2n^2}}{\left(1+\frac{3}{2n^2}\right)^{2n^2}}\right)^2 \quad \to \quad \left(\frac{e^5}{e^3}\right)^2 = e^4$$

2. megoldás:

$$a_n = \frac{\left(1+\frac{5\cdot 2}{4n^2}\right)^{4n^2}}{\left(1+\frac{3\cdot 2}{4n^2}\right)^{4n^2}} \quad \to \quad \frac{e^{10}}{e^6} = e^4$$

Pl. Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \left(\frac{3n^2+1}{3n^2-2}\right)^{3n^2}, \qquad b_n = \left(\frac{3n^2+1}{3n^2-2}\right)^{9n^2},$$

$$c_n = \left(\frac{3n^2+1}{3n^2-2}\right)^{3n^3}, \qquad d_n = \left(\frac{3n^2+1}{3n^2-2}\right)^{3n}.$$

Megoldás.

$$a_n = \frac{\left(1+\dfrac{1}{3n^2}\right)^{3n^2}}{\left(1+\dfrac{-2}{3n^2}\right)^{3n^2}} \to \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{-2}} = \mathrm{e}^3 = A$$

$$b_n = (a_n)^3 \quad \Longrightarrow \quad b_n \to A^3 = \mathrm{e}^9$$

$$c_n = (a_n)^n > \underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{8^n}\ , \text{ ha } n > N_1 \quad (a_n \to \mathrm{e}^3 \text{ miatt } \exists\, N_1) \quad \Longrightarrow \quad c_n \to \infty$$

$$d_n = \sqrt[n]{a_n} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, N_2 : \quad n > N_2 \text{ esetén}$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{e^3-0,1}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \le d_n \le \underbrace{\sqrt[n]{e^3+0,1}}_{\substack{\downarrow \\ 1}}$$

$$\Longrightarrow \quad d_n \to 1\,.$$

1.8.2. Feladatok

1. Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét, amennyiben azok léteznek!

   a) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{4n}\right)^{n+100}$

   b) $a_n = \left(\dfrac{n-2}{n+8}\right)^{n+7}(-1)^n$

   c) $a_n = \left(\dfrac{n+3}{n-2}\right)^{2n+8}$

d) $a_n = \left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^n, \quad b_n = \left(\dfrac{3n-1}{4n+2}\right)^n, \quad c_n = \left(\dfrac{4n-1}{3n+2}\right)^n$

e) $a_n = \left(\dfrac{n^3-2}{n^3+1}\right)^{n^3+8}, \quad b_n = \left(\dfrac{n^3-2}{n^3+1}\right)^{n^4}, \quad c_n = \left(\dfrac{n^3-2}{n^3+1}\right)^{n^2}$

f) $a_n = \left(1-\dfrac{2}{n!}\right)^{n!}, \quad b_n = \left(1-\dfrac{2}{n!}\right)^{(n-1)!}, \quad c_n = \left(1-\dfrac{2}{n!}\right)^{(n+1)!}$

2. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+3}{2n^2+1}\right)^{\frac{1}{n}} = ?$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{2n^2+3}{2n^2+4}\right)^{n^2+4}} = ?$

3. Gyakorló példák rekurzív sorozatokhoz:

a) $a_1 = 2; \quad a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n}$

b) $a_1 = \dfrac{1}{2}; \quad a_{n+1} = a_n - a_n^2$
(Útmutatás: $a_{n+1} = a_n(1-a_n)$, először $0 < a_n < 1$-et mutassa meg.)

c) $a_1 = \dfrac{1}{3}; \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3+a_n}$
(Segítség: $a_{n+1} = \dfrac{a_n+3-3}{3+a_n} = 1 - \dfrac{3}{3+a_n}$)

d) $a_1 = \dfrac{1}{2}; \quad a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{a_{n-1}^2}{2}$

e) $a_1 = 4; \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+6}{5}$

f) $a_1 = 5; \quad a_n = \sqrt{2a_{n-1}+5}$

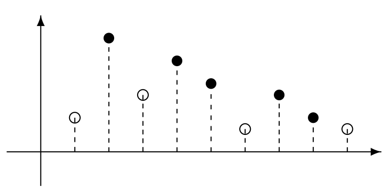
•••

1.9. További tételek a határértékről (3)

T *Minden sorozatnak van monoton részsorozata.*

B

„csúcs”: a_{n_0} csúcs, ha $\forall\, n > n_0$-ra $a_n \le a_{n_0}$



1. $\exists$ végtelen sok csúcs $\Longrightarrow$ van monoton csökkenő részsorozat, hiszen ezek a csúcsok monoton csökkenő részsorozatot alkotnak.

2. Véges sok csúcs van (esetleg nincs is).
a_{s_1} : a legnagyobb indexű csúcs után következő elem. (Ha nem volt: $a_{s_1} = a_1$.)
a_{s_1} nem csúcselem.
$\exists\, s_2 > s_1 :\ a_{s_2} \geq a_{s_1}$, különben a_{s_1} csúcs lenne. a_{s_2} sem csúcselem.
$\exists\, s_3 > s_2 :\ a_{s_3} \geq a_{s_2}$, különben a_{s_2} csúcs lenne.
Stb. Így kapunk egy $(a_{n_r}) \nearrow$ részsorozatot. ■

Bolzano–Weierstrass kiválasztási tétel:

(T) *Korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

(B) Az előző tétel miatt $\exists$ monoton részsorozat, és mivel ez korlátos $\Longrightarrow$ konvergens. ■

(M) A racionális számok $\mathbb{Q}$ halmazában nem igaz a Bolzano–Weierstrass kiválasztási tétel. Legyen $(b_n) = (1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414, \dots) \longrightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \quad b_n \in \mathbb{Q}$.
$(b_n) \subset [1, 2]$, azaz korlátos. (b_n) minden részsorozata $\sqrt{2}$-höz konvergál, tehát nincs (b_n)-nek olyan részsorozata, amely egy $\mathbb{Q}$-beli elemhez konvergálna.

•••

Szükséges és elégséges tétel számsorozat konvergenciájához

Cauchy-féle konvergenciakritérium:

(T) *Az (a_n) számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:*

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \qquad \forall\, n, m > M(\varepsilon) \ \ \textit{esetén}$$

$(\neg B)$

(M_1) Más megfogalmazásban:

$$|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon \qquad \forall\, n > M(\varepsilon)\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N} \ \text{ esetén}$$

(M_2) A tétel azt a tényt fejezi ki, hogy konvergens sorozat elemei egymáshoz is tetszőlegesen közel vannak, ha indexeik elég nagyok. Ezt a tételt használhatjuk a konvergencia bizonyítására akkor is, ha a határértéket nem ismerjük.

Ⓓ Az (a_n) számsorozatot *Cauchy-sorozatnak* nevezzük, ha $\forall\,\varepsilon > 0$-hoz $\exists\, M(\varepsilon)$:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \qquad \text{ha } n, m > M(\varepsilon)$$

A Cauchy-féle konvergencia tételt megfogalmazhatjuk a következőképpen is:

Az (a_n) számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

Ⓜ $\mathbb{Q}$-ban a Cauchy-sorozat nem feltétlenül konvergens.

Például $\quad (a_n) = (1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414, \dots) \longrightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Az (a_n) Cauchy-sorozat, mert $|a_{n+k} - a_n| < 10^{-N} = \varepsilon$, ha $n > N$, $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges.
Nincs olyan $\mathbb{Q}$-beli elem, amelyhez (a_n) konvergálna.

•••

Egy fontos példa

Pl.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Bizonyítsuk be, hogy $\quad \lim_{n\to\infty} s_n = \infty$

Megoldás.

$$s_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}$$

$$s_{2N} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N}$$

N-et akármilyen nagyra választjuk:

$$|s_{2N} - s_N| = \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} > N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2},$$

tehát nem szorítható ε alá, ha $\varepsilon \le \frac{1}{2}$. Nem teljesül rá a Cauchy-féle konvergencia kritérium $\implies$ divergens.
Mivel $(s_n) \nearrow \implies s_n \to \infty$.

•••

1.10. Sorozat torlódási pontjai

Ⓓ **(Torlódási pont (sűrűsödési pont, sűrűsödési érték):)** $t \in \mathbb{R}$, ill. $t = \infty$, vagy $t = -\infty$ az (a_n) torlódási pontja, ha minden környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza
(Tehát létezik olyan (a_{n_r}) részsorozat, amely t-hez tart.)

($+\infty$ környezetei (P, ∞) alakúak, ahol $P \in \mathbb{R}$. $-\infty$ környezetei $(-\infty, M)$ alakúak, ahol $M \in \mathbb{R}$.)

Ⓣ *(a_n) valós számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha pontosan egy valós szám a torlódási pontja.*
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ akkor és csak akkor, ha $t = \infty$ az egyetlen torlódási pont.

Ⓓ $S :=$ (a_n) torlódási pontjainak halmaza.

Ⓣ *Ha a torlódási pontok halmaza felülről korlátos, akkor létezik legnagyobb torlódási pont. $(\neg B)$*

Ⓓ **(Limesz szuperior:)**

$$\limsup a_n \overset{\text{jel}}{=} \overline{\lim}\, a_n := \begin{cases} \text{legnagyobb torlódási pont,} & \text{ha a torlódási pontok halmaza} \\ & \text{felülről korlátos} \\ -\infty, & \text{ha } S = \emptyset \text{ vagy } S = \{-\infty\} \\ \infty, & \text{különben} \end{cases}$$

Ⓓ **(Limesz inferior:)**

$$\liminf a_n \overset{\text{jel}}{=} \underline{\lim}\, a_n := \begin{cases} \text{legkisebb torlódási pont,} & \text{ha a torlódási pontok halmaza} \\ & \text{alulról korlátos} \\ \infty, & \text{ha } S = \emptyset \text{ vagy } S = \{\infty\} \\ -\infty, & \text{különben} \end{cases}$$

Ⓜ Ha $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \quad \Longrightarrow \quad \overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Pl. $\boxed{a_n = 2^{(-1)^n n}\,; \qquad \overline{\lim}\, a_n = ?\,, \quad \underline{\lim}\, a_n = ?}$

Megoldás. Ha n páros: $a_n = 2^n \to \infty$ (Részletezve: $n = 2m$: $a_{2m} = 2^{2m} = 4^m \to \infty$)

Ha n páratlan: $a_n = 2^{-n} = \dfrac{1}{2^n} \to 0$ $\left(n = 2m+1 : a_{2m+1} = 2^{-(2m+1)} = \dfrac{1}{2\cdot 4^m} \to 0\right)$

Így a sorozat torlódási pontjai: $0\,,\ \infty \implies \overline{\lim}\, a_n = \infty\,,$ $\underline{\lim}\, a_n = 0$

Pl.

$$a_n = \frac{n^2 + n^2\ \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)}{2n^2 + 3n + 7}$$

Adja meg a számsorozat torlódási pontjait! $\overline{\lim}\, a_n = ?\,,$ $\underline{\lim}\, a_n = ?$

Megoldás. n értékétől függően három részsorozat viselkedését kell vizsgálnunk.
Ha $n = 2m$: $\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = 0\,,$ ezért a kapott részsorozat:

$$a_n = \frac{n^2}{2n^2+3n+7} \to \frac{1}{2}$$

Ha $n = 4m+1$: $\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = 1\,,$ ekkor a részsorozat:

$$a_n = \frac{2n^2}{2n^2+3n+7} \to 1$$

Ha $n = 4m-1$: $\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = -1\,,$ így a részsorozat:

$$a_n = 0 \to 0$$

Tehát a torlódási pontok halmaza: $S = \left\{0\,,\ \dfrac{1}{2}\,,\ 1\right\}$

$$\overline{\lim}\, a_n = 1\,, \qquad \underline{\lim}\, a_n = 0$$

Pl.

$$a_n = \frac{3^{2n+1} + (-4)^n}{5 + 9^{n+1}}\,, \qquad b_n = a_n \cdot \cos n\pi$$

$\overline{\lim}\, a_n = ?\,,$ $\underline{\lim}\, a_n = ?$ $\overline{\lim}\, b_n = ?\,,$ $\underline{\lim}\, b_n = ?$

Megoldás. $a_n = \dfrac{3\cdot 9^n + (-4)^n}{5 + 9\cdot 9^n} = \underbrace{\dfrac{9^n}{9^n}}_{=1}\ \dfrac{3 + \left(-\dfrac{4}{9}\right)^n}{5\cdot\left(\dfrac{1}{9}\right)^n + 9} \to \dfrac{3+0}{0+9} = \dfrac{1}{3}$

Ezért

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = \frac{1}{3}$$

Az (a_n) sorozat konvergens, mert egyetlen véges torlódási pontja van.

(b_n) vizsgálata : $\cos n\pi = (-1)^n$.

Ezért, ha n páros: $b_n = a_n \to \dfrac{1}{3}$

Ha n páratlan: $b_n = -a_n \to -\dfrac{1}{3}$

$$\Longrightarrow \quad \overline{\lim}\, a_n = \frac{1}{3}, \qquad \underline{\lim}\, a_n = -\frac{1}{3}, \qquad \lim_{n \to \infty} a_n \nexists$$

Pl. Határozza meg az alábbi sorozatok limeszét (ha létezik), valamint limesz szuperiorját és a limesz inferiorját!

a) $a_n = \dfrac{-4^n + 3^{n+1}}{1 + 4^n}$ b) $b_n = \dfrac{(-4)^n + 3^{n+1}}{1 + 4^n}$

c) $c_n = \dfrac{(-4)^n + 3^{n+1}}{1 + 4^{2n}}$

Megoldás. a) $a_n = \dfrac{-4^n + 3 \cdot 3^n}{1 + 4^n} = \underbrace{\dfrac{4^n}{4^n}}_{=1} \dfrac{-1 + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} \to \dfrac{-1+0}{0+1} = -1$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} a_n = \overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = -1$$

b) $b_n = \dfrac{(-4)^n + 3 \cdot 3^n}{1 + 4^n} = \underbrace{\dfrac{(-4)^n}{4^n}}_{=(-1)^n} \underbrace{\dfrac{1 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}}_{:=\beta_n} = (-1)^n \beta_n$

$\beta_n \to \dfrac{1+0}{0+1} = 1$

Ha n páros: $b_n = \beta_n \to 1$

Ha n páratlan: $b_n = -\beta_n \to -1$

$$\Longrightarrow \quad \overline{\lim}\, b_n = 1\,, \qquad \underline{\lim}\, b_n = -1\,, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n \nexists$$

c) $$c_n = \frac{(-4)^n + 3\cdot 3^n}{1 + 16^n} = \underbrace{\frac{(-4)^n}{16^n}}_{=(-\frac{1}{4})^n} \quad \frac{1 + 3\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n}{\left(\dfrac{1}{16}\right)^n + 1} \to 0\cdot\frac{1+0}{0+1} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} c_n = \overline{\lim}\, c_n = \underline{\lim}\, c_n = 0$$

2. fejezet

Valós számsorok

2.1. Numerikus sorok konvergenciája

A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ végtelen összeghez hozzárendelünk egy $(\, s_n \,)$ számsorozatot a következő módon:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_1}_{s_1} + a_2}_{s_2} + a_3}_{s_3} + \cdots + a_n}_{s_n} + \cdots$$

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k : \quad n\text{-edik részletösszeg}$$

E számsorozat határértékének segítségével definiáljuk a sor összegét az alábbiaknak megfelelően.

Ⓓ A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens és összege s, ha létezik a

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) = s \in \mathbb{R}$$

(véges) határérték.

[1]lásd Thomas 11-es bemutató 2. fejezet (21-31. oldal).

A részletösszegek (s_n) sorozatának viselkedése szerint az alábbi esetek lehetségesek:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} s \in \mathbb{R}\,, & \text{az összeg konvergens} \\ +\infty\,, & \\ -\infty\,, & \text{az összeg divergens.} \\ \nexists\,, & \end{cases}$$

Pl. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1 = ?$

Megoldás. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+1+\cdots$ esetén $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \infty \qquad \text{(Divergens a sor.)}$$

Pl. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = ?$

Megoldás. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1-1+1-1+\cdots+(-1)^k+\cdots$ divergens, mert

$$\left.\begin{array}{l} s_{2k+1} = 1 \to 1 \\ s_{2k} = 0 \to 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad (s_n) \text{ -nek 2 torlódási pontja van, a sor divergens.}$$

Pl. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = ?$

Megoldás.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \underbrace{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{s_n} + \cdots = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2}-1}}_{s_n} = \frac{1}{2}\,\frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 1\,,$$

tehát a sor konvergens.

Pl. $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k\,(k+1)} = ?}$

Megoldás.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-1}{k+1} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{-1}{2}+1\right) + \left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{4}+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{-1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1, \qquad \text{konvergens a sor.}$$

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{(harmonikus sor) divergens}}$

Megoldás.

$$s_{2^k} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) + \cdots +$$

$$+ \left(\cdots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + \cdots + 2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k} = 1 + k\cdot\frac{1}{2} \;\to\; \infty$$

$$\lim_{k\to\infty} s_{2^k} = \infty \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty}$$

Ugyanis $s_n \geq s_{2^k}$, ha $n > 2^k$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

M Ha a sorban *véges sok* tagot elhagyunk vagy megváltoztatunk, akkor a konvergencia ténye nem változik, konvergens sorból konvergens sort, divergens sorból divergens sort kapunk. A sorösszeg értéke természetesen megváltozik.

2.1.1. Geometriai (mértani) sor

T *Geometriai sor*

$$1 + q + q^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & \text{ha } |q| < 1 \\ \infty, & \text{ha } q \geq 1 \\ \text{divergens}, & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

B $$s_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

Ha $q = 1$:

$$s_n = n\,, \quad \text{ezért} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \infty\,.$$

Ha $q \neq 1$:

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Mivel $q^n \to 0$, ha $|q| < 1$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}\,, \text{ ha } |q| < 1.$$

Mivel $q^n \to \infty$, ha $q > 1 \implies s_n \to \infty$, ha $q > 1$.

Ha $q = -1$:

q^n -nek két torlódási pontja van, mégpedig $t_1 = 1$, $t_2 = -1$.

$\implies$ s_n -nek is 2 torlódási pontja van: 0 és 1, tehát divergens.

Ha $q < -1$:

q^n -nek két torlódási pontja van, mégpedig $t_1 = -\infty$, $t_2 = \infty$.

$\implies$ s_n -nek is 2 torlódási pontja van: $-\infty$ és ∞, tehát divergens.

Pl. $$\sum_{k=3}^{\infty} q^k = q^3 + q^4 + q^5 + \cdots = \frac{q^3}{1-q}\,, \text{ ha } |q| < 1\,.$$

A részletösszegek a tételben szereplő részletösszegek q^3 -szeresei, így a határérték (a sor összege) is q^3 -nel szorzódik.

Pl. $$\boxed{a + aq + aq^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a\,q^k = \sum_{k=1}^{\infty} a\,q^{k-1} = \frac{a}{1-q}\,, \text{ ha } |q| < 1}$$

Most a részletösszegek a tételben szereplő részletösszegek a -szorosai, így a határérték is a -szoros lesz.

$$\left(\text{A képletet úgy érdemes megjegyezni, hogy} \quad s = \frac{\text{első tag}}{1 - \text{kvóciens}}\,.\right)$$

Pl. $$\boxed{\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-2)^{3k}}{3^{2k}} = ?}$$

Megoldás. $$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-2)^{3k}}{3^{2k}} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\left((-2)^3\right)^k}{\left(3^2\right)^k} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-8)^k}{9^k} = \sum_{k=3}^{\infty} \left(-\frac{8}{9}\right)^k =$$
$$= -\left(\frac{8}{9}\right)^3 + \left(\frac{8}{9}\right)^4 - \left(\frac{8}{9}\right)^5 \pm \cdots = \frac{-\left(\frac{8}{9}\right)^3}{1-\left(-\frac{8}{9}\right)}$$
$$\left(q = \frac{8}{9}, \quad |q| < 1\right)$$

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^{k+1}}{4^{k+2}} = ?}$

Megoldás.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2^k}{4^{k+2}} + \frac{3^{k+1}}{4^{k+2}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{3}{16}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^k\right)$$

$$s_n = \frac{1}{16}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k + 3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2}-1} + 3\,\frac{3}{4}\,\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\frac{3}{4}-1}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{16}\cdot\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + 3\cdot\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}\right) = \frac{5}{8}$$

Pl. Milyen x-re konvergens a $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (\log_2 x)^k$ sor?

Megoldás. $q = \log_2 x, \quad |\log_2 x| < 1 \iff \quad -1 < \log_2 x < 1,$
$$2^{-1} < x < 2, \quad \text{azaz } x \in (2^{-1}, 2)\,.$$

2.1.2. Konvergens sorok összege és konstansszorosa

T *Ha* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$ *és* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b$, $S_a, S_b, c \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = S_a + S_b \quad \textit{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (c\cdot a_k) = c\cdot S_a\,.$$

B $S_a = \lim\limits_{n\to\infty} s_n^a = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

$S_b = \lim\limits_{n\to\infty} s_n^b = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$

$$S_{a+b} = \lim_{n\to\infty} s_n^{a+b} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) + \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \right) = S_a + S_b$$

Másrészt

$$S_{c\,a} = \lim_{n\to\infty} s_n^{c\,a} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (c\, a_k) = c \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = c\, S_a$$ ■

Ezen tételek segítségével egyszerűbben oldhatók meg az előző típusú feladatok.

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^{k+2}}{2^{2k+1}} = ?}$

Megoldás.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^{k+2}}{2^{2k+1}} = \frac{(-3)^2}{2^1} \sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^k = \frac{9}{2} \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}{1-(-\frac{3}{4})}$$

$$\left(q = -\frac{3}{4}\,, \quad |q| < 1 \ \ \text{teljesül.} \right)$$

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k+2} + (-2)^{k+2}}{5^k} = ?}$

Megoldás. A sor két konvergens geometriai sor összege:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9\cdot 3^k + (-2)^2\cdot(-2)^k}{5^k} = 9 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^k = 9 \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} + 4 \frac{-\frac{2}{5}}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)}$$

$$\left(q_1 = \frac{3}{5}\,, \quad |q_1| < 1\,, \quad q_2 = -\frac{2}{5}\,, \quad |q_2| < 1\right)$$

•••

A konvergencia szükséges és elégséges feltétele (Cauchy-kritérium):

Ⓣ ***Cauchy-tétel***

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *akkor és csak akkor konvergens, ha* $\forall\, \varepsilon > 0$*-hoz* $\exists\, M(\varepsilon)$*:*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > M(\varepsilon) \text{ és } k \in \mathbb{N}^+$$

Ⓑ Triviálisan igaz, hiszen a számsorozatok konvergenciájára tanult szükséges és elégséges tétel alkalmazható. (s_n) akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall\, \varepsilon > 0$ -hoz $\exists\, M(\varepsilon)$, hogy $n, m > M(\varepsilon)$ esetén $|s_m - s_n| < \varepsilon$.
Legyen $m > n$ és $m = n + k$! Mivel

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,,$$

$$s_m = s_{n+k} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}\,.$$

Ezért

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon\,,$$

ha $n > M(\varepsilon)$ és $k \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges. ■

Pl. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ (alternáló harmonikus sor)?

Megoldás. Igen, ugyanis

$$|s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{n+k}\right| =$$

$$= \begin{cases} \underbrace{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)}_{>0}+\underbrace{\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)}_{>0}+\cdots+\underbrace{\left(\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\right)}_{>0}= \\ =\frac{1}{n+1}-\underbrace{\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)}_{>0}-\cdots-\underbrace{\left(\frac{1}{n+k}\right)}_{>0}, \qquad \text{ha } k \text{ páros} \\ \\ \underbrace{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)}_{>0}+\underbrace{\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)}_{>0}+\cdots+\underbrace{\left(\frac{1}{n+k-2}-\frac{1}{n+k-1}\right)}_{>0}+\frac{1}{n+k}= \\ =\frac{1}{n+1}-\underbrace{\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)}_{>0}-\cdots-\underbrace{\left(\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\right)}_{>0}, \qquad \text{ha } k \text{ páratlan} \end{cases}$$

Vagyis

$$|s_{n+k}-s_n|<\frac{1}{n+1}<\varepsilon, \quad \text{ha} \quad n>\frac{1}{\varepsilon}-1 \quad \Longrightarrow \quad N(\varepsilon)\geq\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$$

Későbbiekben könnyen ellenőrizhetjük, hogy ez egy úgynevezett Leibniz-sor.

2.1.3. A konvergencia szükséges feltétele

Ⓣ $$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \textit{konvergens}\right) \quad \Longrightarrow \quad \left(\lim_{k\to\infty} a_k = 0\right)$$

Ⓑ A Cauchy-kritériumból ($k=1$ választással):

$$|s_{n+1}-s_n|=|a_{n+1}|<\varepsilon, \quad \text{ha } n>N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad a_n\to 0$$

Vagy (egy másik bizonyítás)

$$s_n=s_{n-1}+a_n \quad \Longrightarrow \quad a_n=s_n-s_{n-1}\to s-s=0$$ ■

Ⓜ A feltétel nem elégséges. Például a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ sor a feltételt teljesíti, mégis divergens.

2.2. Váltakozó előjelű (alternáló) sorok

$$c_1 - c_2 + c_3 - \cdots + (-1)^{n+1} c_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, c_n \quad , \qquad\qquad c_n > 0$$

Leibniz-kritérium:

Ⓣ *Ha az alternáló sor tagjainak abszolút értékeiből képzett sorozat (fent* (c_n) *) monoton fogyóan tart* 0 *-hoz (jelben* $c_n \searrow 0$ *), akkor a sor konvergens.*

Az ilyen alternáló sor neve: **Leibniz-sor**.

Ⓑ Belátjuk, hogy $s_{2k} \nearrow$ és felülről korlátos:

$$s_{2k+2} = s_{2k} + \underbrace{(c_{2k+1} - c_{2k+2})}_{\geq 0} \geq s_{2k} \quad \Longrightarrow \quad s_{2k} \nearrow$$

Másrészt

$$\underbrace{0 \leq s_{2k+2}}_{\text{az előzőből látható}} = c_1 - \underbrace{(c_2 - c_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(c_4 - c_5)}_{\geq 0} - \cdots - \underbrace{(c_{2k+2})}_{\geq 0} \leq c_1$$

Tehát s_{2k} monoton növő és felülről korlátos $\Longrightarrow$ s_{2k} konvergens, legyen $s = \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k}$.

Megmutatjuk, hogy $s_{2k+1} \to s$ szintén, és így a sor konvergens.

$$s_{2k+1} = s_{2k} + c_{2k+1} \to s + 0 = s \qquad \blacksquare$$

Ⓜ Az is megmutatható, hogy az s_{2k+1} részsorozat monoton csökkenően tart s -hez.

$$0 \leq s_{2k+1} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + (c_{2k-1} - c_{2k}) + c_{2k+1} =$$

$$= \underbrace{(c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + c_{2k-1}}_{s_{2k-1}} - \underbrace{(c_{2k} - c_{2k+1})}_{\geq 0} \leq s_{2k-1}$$

[2]lásd Thomas 11-es bemutató 6. fejezet (49-60. oldal).

Hibabecslés Leibniz-típusú soroknál

Tehát a Leibniz-típusú soroknál a páros indexű részletösszegek s-nél kisebbek vagy egyenlők:
$$s_{2k} \leq s.$$
A páratlan indexű elemek monoton csökkenve tartanak s-hez, ezért
$$s \leq s_{2k+1}.$$
Mivel
$$s - s_{2k} \leq s_{2k+1} - s_{2k} = c_{2k+1} \quad \text{és} \quad s_{2k+1} - s \leq s_{2k+1} - s_{2k+2} = c_{2k+2},$$
ezért
$$\boxed{|H| = |s - s_n| \leq c_{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.}$$

●●●

Pl. Konvergens-e a $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n}$ sor?

Megoldás. A sor Leibniz-típusú és így konvergens, mivel $c_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2n+1}} \searrow 0$.

Pl. Konvergens-e a $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$ sor?

Megoldás.

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{3}\,\sqrt[n]{n}}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2n+n}} \leq c_n < 1 \to 1$$

$\Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tehát nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele, így a sor divergens.

Pl. Konvergens-e a $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$ sor?

Megoldás.
$$c_n = \frac{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{1 + \dfrac{2}{n^2}} \quad \to \quad 0$$

A monoton csökkenés most nem triviálisan igaz, hiszen n növelésével a számláló és a nevező is nő. Várható, hogy a (c_n) sorozat monoton csökkenő, mert a nevező „gyorsabban nő”. De ezt ilyenkor be kell bizonyítanunk! Tehát igaz-e, hogy

$$\begin{aligned} c_{n+1} &\overset{?}{\leq} c_n \\ \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+2} &\overset{?}{\leq} \frac{n+1}{n^2+2} \\ (n+2)\,(n^2+2) &\overset{?}{\leq} (n+1)\,(n^2+2n+3) \\ 0 &\overset{?}{\leq} n^2+3n-1 \qquad \text{Ez pedig igaz, minden } n \text{ -re}. \end{aligned}$$

És innen visszafelé igaz, hogy $c_{n+1} \leq c_n$.

Tehát a sor Leibniz-típusú és így konvergens.

Ha a sor összegét s_{100} -zal közelítjük, akkor az elkövetett hiba:

$$|H| = |s - s_{100}| \leq c_{101} = \frac{101 + 1}{101^2 + 2}$$

2.2.1. Feladatok a váltakozó előjelű sorokhoz

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

1. $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{\lg k}$

2. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

3. $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\ 2k}{k^2-1}$

4. $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

2.3. Sorok abszolút és feltételes konvergenciája

D $\displaystyle\sum^{\infty} a_k$ sor *abszolút konvergens*, ha $\displaystyle\sum^{\infty} |a_k|$ konvergens.

Pl. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$ abszolút konvergens.

(Konvergens geometriai sorokról van szó, ahol a kvóciens $-\dfrac{1}{2}$, illetve $\dfrac{1}{2}$.)

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ nem abszolút konvergens, de konvergens.

D *Feltételesen konvergens sor:*
a konvergens, de nem abszolút konvergens sor

Ilyen pl. a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ sor.

Ugyanis beláttuk, hogy ez a sor konvergens, de a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor divergens.

T $$\left(\sum^{\infty} |a_k| \textit{ konvergens}\right) \Longrightarrow \left(\sum^{\infty} a_k \textit{ konvergens}\right)$$

Tehát az abszolút konvergenciából következik a konvergencia.

B Ha $\sum^{\infty} |a_k|$ konvergens, akkor teljesül rá a Cauchy-kritérium, továbbá

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \le |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|$$

miatt

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \le \underbrace{||a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > M(\varepsilon),\ k \in \mathbb{N}^+}_{\text{Cauchy-kritérium } \sum^{\infty} |a_k|\text{-ra}}$$

Így $\displaystyle\sum^{\infty} a_k$ -ra is teljesül a szükséges és elégséges tétel (Cauchy-kritérium), tehát konvergens. ■

[3]lásd Thomas 11-es bemutató 6. fejezet (49-60. oldal).

Ez a tétel azt mutatja, hogy az abszolút konvergencia vizsgálata igen hasznos lehet. A $\sum^{\infty} |a_k|$ sor elemei nem negatívak, sőt pozitívnak tekinthetők, mivel a nulla elemeket nyilván nem kell figyelembe vennünk.

2.4. Pozitív tagú sorok

(T) *(i) Egy pozitív tagú sor részletösszegei monoton növekedőek.*

(ii) Egy pozitív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata korlátos.

(B) (i) Ha $a_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, akkor $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \;\; \forall\, n$-re.

(ii) a) Ha a sor konvergens, akkor (s_n) konvergens $\Longrightarrow$ (s_n) korlátos

b) Ha (s_n) korlátos, akkor $(s_n) \nearrow$ miatt (s_n) konvergens. ■

(M) Pozitív tagú sor vagy konvergens, vagy ∞-nel egyenlő. Ez nem igaz általánosságban egy váltakozó előjelű sorra, ahol a részletösszegek sorozatának lehet több torlódási pontja $\left(\text{pl. } \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\right)$.

(T) *$a_k > 0$; $a_k \geq a_{k+1}$ feltételek mellett*

a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} a_{2^l} \cdot 2^l$ is konvergens

(B) $(\neg B)$
A bizonyítás lényege, hogy az első sor részletösszegei a második sor megfelelő részletösszegeivel alulról és felülről is becsülhetőek. A becslés igazolásához fontos feltenni, hogy az (a_k) sorozat monoton csökken.
(A részletes bizonyítás megtekinthető Walter Rudin: A matematikai analízis alapjai című könyvében.) ■

Példák a tétel alkalmazására:

(Pl.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergens, ha $\alpha > 1$. Egyébként divergens.

(B) Ha $\alpha \leq 0$: $\quad a_n = \dfrac{1}{n^\alpha} = n^{|\alpha|} \not\to 0$

A konvergencia szükséges feltétele nem teljesül $\Longrightarrow$ divergens a sor.

Ha $\alpha > 0$: $\quad a_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \searrow$, így alkalmazható az előző tétel:

Vagyis $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ és $\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2^l)^\alpha} \cdot 2^l$ egyidejűleg konvergens, illetve divergens.

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2^l)^\alpha} \cdot 2^l = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha l}} \frac{1}{2^{-l}} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{l\alpha - l} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{(\alpha-1)l} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\right)^{l} = \sum_{l=1}^{\infty} q^l \qquad \blacksquare$$

Geometriai sort kaptunk, mely csak akkor konvergens, ha

$$|q| = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} < 1.$$

Tehát a konvergencia csak akkor teljesül, ha $\alpha - 1 > 0$, vagyis $\alpha > 1$.

Vigyázat! A tételben szereplő két sor összege nem azonos, tehát nem tudtuk megállapítani a $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor összegét, csak a konvergencia tényét tudtuk megállapítani $\alpha > 1$-re. Ilyenkor a megfelelő s_n részletösszeggel tudjuk közelíteni a sor összegét az esetleg előírt pontossággal (lásd hibabecslések, 2.5.6 fejezet).

Pl. $\displaystyle\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log_2 n}$ divergens

Ugyanis: $\displaystyle\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot \log_2 2^l} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l}$ divergens.

Pl. $\displaystyle\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\log_2 n)^p}$ $p > 1$ konvergens, egyébként divergens

B $p > 0$ esetén alkalmazható az előző tétel:

$$\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot (\log_2 2^l)^p} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l^p} \qquad 0 < p \le 1 : \text{ div.}; \quad 1 < p : \text{ konv.}$$

($p \le 0$ esete HF. Pl. minoráns kritériummal megmutatható. (Lásd később.) $\blacksquare$

Pl. $$\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n} \qquad \text{divergens}$$

A tétel alkalmazható.

$$\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot (\log_2 2^l) \cdot (\log_2 \log_2 2^l)} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l \cdot \log_2 l} \quad \text{ez pedig divergens}$$

2.5. Pozitív tagú sorok konvergenciájával kapcsolatos elégséges kritériumok

- majoráns kritérium (csak konvergencia eldöntésére)
- minoráns kritérium (csak divergencia eldöntésére)
- hányados kritérium
- gyökkritérium
- integrálkritérium

Ezeket a kritériumokat kizárólag pozitív tagú sorokra alkalmazhatjuk. Így a szóbanforgó kritériumok hasznosak lehetnek az abszolút konvergencia eldöntésére (amiből következik az eredeti — nem feltétlenül pozitív tagú — sor konvergenciája is.)

2.5.1. Majoráns kritérium

T *Ha* $0 < a_n \le c_n \quad \forall\ n$*-re és* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *konvergens* $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergens*

B A feltétel miatt

$$\begin{aligned} a_1 &\le c_1 \\ &\vdots \\ a_n &\le c_n \end{aligned}$$

Azonos értelmű egyenlőtlenségek összeadhatók, ezért

[4]lásd Thomas 11-es bemutató 3., 4. és 5. fejezet (32-48. oldal).

$$s_n^a = a_1 + \cdots + a_n \le c_1 + \cdots + c_n = s_n^c \,.$$

Továbbá $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergenciája miatt $s_n^c \le K \implies s_n^a$ korlátos és mivel pozitív tagú a sor $\implies \sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ konvergens. ■

2.5.2. Minoráns kritérium

Ⓣ *Ha* $0 \le d_n \le a_n \quad \forall\, n$*-re és* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ *divergens* $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergens*

Ⓑ $s_n^a \ge s_n^d \to \infty \implies s_n^a \to \infty$ (spec. rendőrelv) ■

Ⓜ Mindkét esetben elegendő, ha a feltétel $\forall\, n$ helyett $n \ge N_0$-ra teljesül.

($\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=N_0}^{\infty} a_n$ egyidejűleg konvergens, ill. divergens, hiszen az első szumma részletösszegei $c = \sum\limits_{n=1}^{N_0-1} a_n$ konstanssal nagyobbak, mint a második szumma részletösszegei.)

Pl. Konvergens-e a $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

Megoldás. A harmonikus sorból végtelen sok tagot elhagytunk. A minoráns kritériummal belátjuk, hogy még ez a sor is divergens. Ugyanis

$$a_n > \frac{1}{2n+n} = \frac{1}{3n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergens} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens}$$

Pl. Konvergens-e a $\boxed{\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n^5+3}}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

Megoldás.

$$a_n < \frac{1}{\sqrt{2n^5}} = \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{5/2}}\,, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}} \text{ konvergens } \left(\alpha = \frac{5}{2} > 1\right)$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

Pl. Konvergens-e a $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n^5+3}}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

Megoldás. A sor divergens, mivel a rendőrelvvel megmutatható, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, tehát nem tart nullához, így nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele. Részletezve:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{5}\ \left(\sqrt[n]{n}\right)^5}}_{\substack{\downarrow \\ \frac{1}{1\cdot 1^5} = 1}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2n^5+3n^5}} \le a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2n^5+3}} < \frac{1}{\sqrt[n]{1}} = \underbrace{1}_{\substack{\downarrow \\ 1}}$$

$$\Longrightarrow \quad a_n \to 1\,.$$

Pl. Konvergens-e a $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n^4+5}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

Megoldás.

$$a_n < \frac{n+2n}{3n^4} = \frac{1}{n^3}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \text{ konvergens } (\alpha = 3 > 1) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

Pl. Konvergens-e a $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-32}{n^3+8}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

Megoldás. $n \ge 4$-re a sor pozitív tagú. A minoráns kritériummal megmutatjuk, hogy divergens.

Ugyanis, ha $n \geq 6$, akkor $n^2 > 32$ és ezért

$$a_n = \frac{2n^2 - 32}{n^3 + 8} > \frac{2n^2 - n^2}{n^3 + 8n^3} = \frac{1}{9n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n} = \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergens}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens.}$$

Pl. Konvergens-e a $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^{n+1}}{2^{2n+3} + 5}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

Megoldás.

$$a_n = \frac{2^n + 3 \cdot 3^n}{8 \cdot 4^n + 5} < \frac{3^n + 3 \cdot 3^n}{8 \cdot 4^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ konvergens geometriai sor $\left(q = \frac{3}{4},\ |q| < 1\right) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens

Feladatok

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

1. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{3n + 2}$
2. $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \sqrt{n}}$
3. $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log_2 n}$
4. $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n \log_2 n^2}$
5. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n+2} - 3}$
6. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n} - 3}$
7. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2^n - 3}$
8. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n + 2^{n+1}}$
9. $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n + n}{n \cdot 4^n - 3}$
10. $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1 + n}{1 + n^2}\right)^2$

11. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{7n^5 - 2n^3 + 1}{n^6 + 3n^2 - \sqrt{n}}$

12. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{7n^5 - 2n^3 + 1}{n^7 + n^2 - n + 3}$

13. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{7n^5 + n^3 + 1}{n^8 - n^2 + 3}$

14. $\displaystyle\sum_{6}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}$

2.5.3. Hányados kritérium

T₁

1. $(a_n > 0,\ \forall\ n) \wedge \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1,\ \forall\ n\right) \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergens.*

2. $(a_n > 0,\ \forall\ n) \wedge \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge q \ge 1,\ \forall\ n\right) \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergens.*

B 1. Mivel $a_{n+1} \le q\, a_n \le q^2\, a_{n-1} \le q^3\, a_{n-2} \le \cdots \le q^n\, a_1, \quad \forall\ n$, ezért $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} a_n$-nek $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} q^{n-1}\, a_1$ konvergens majoránsa (geometriai sor, $0 < q < 1$) $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{1}^{\infty} a_n$ konvergens.

2. Mivel $a_{n+1} \ge q\, a_n \ge q^2\, a_{n-1} \ge \cdots \ge q^n\, a_1, \quad \forall\ n$, ezért $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} a_n$-nek $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} q^{n-1}\, a_1$ divergens minoránsa (geometriai sor, $q \ge 1$) $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} a_n$ divergens. ■

M₁ $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} a_n$ és $\displaystyle\sum_{N_0}^{\infty} a_n$ egyidejűleg konvergens, ill. divergens, ezért elég, ha a T₁ feltételei $\forall\ n \ge N_0$-ra teljesülnek.
(Természetesen, ha konvergensek, akkor az első sor összege $a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_0-1}$-gyel több, mint a második sor összege.)

M₂ T₁ (1)-nél nem elég megmutatni, hogy $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, q-t is kell találni.

Pl. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, pedig

$$a_n = \frac{1}{n}\,, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \quad \text{miatt} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1\,.$$

Pl. $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^2}$ konvergens. És most is

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1\,. \qquad (\text{De } \nexists \quad 0 < q < 1\,)$$

M$_3$ T_1 (2)-nél viszont q megtalálása nem fontos. A tétel így is kimondható.

$$(a_n > 0) \ \wedge \ \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \ \forall\ n \geq N_0\right) \quad \Longrightarrow \quad \sum_1^\infty a_n \text{ div.}$$

Ekkor ugyanis:

$0 < a_n \leq a_{n+1}$, tehát $a_n \nearrow$ (és $a_n > 0$) $\Longrightarrow$ $a_n \not\to 0$ (nem teljesül a szükséges feltétel) $\Longrightarrow$ $\sum\limits_1^\infty a_n$ divergens

A hányados kritérium egy kényelmesebben használható formában is kimondható:

T$_1^*$

1. $(a_n > 0, \forall\ n) \wedge \left(\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1\right) \quad \Longrightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ *konv.*

2. $(a_n > 0, \forall\ n) \wedge \left(\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c > 1 \ \textit{vagy} \ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty\right) \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ *div.*

B 1. Legyen $\varepsilon = \dfrac{1-c}{2}$, így $q = c + \varepsilon < 1$. A határérték tulajdonsága miatt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1\,, \quad \forall\ n > N(\varepsilon).$$

Ezért T_1 (1)-ből adódik, hogy $\sum\limits_{n=N(\varepsilon)}^\infty a_n$ és így vele együtt $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ is konvergens.

2. Legyen $\varepsilon = \dfrac{c-1}{2}$, így $q = c - \varepsilon > 1$. Ekkor $\exists\, N(\varepsilon)$, hogy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1, \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$$

Így T_1^* (2)-ből adódik az állítás.

T_1^* (2) állítása $c = \infty$ esetén is igaz. Ugyanis, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, akkor is található megfelelő q. (Pl. $q = 2$ is választható.)

M₄ Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, akkor nem tudtunk meg semmit a konvergenciáról. Lehet a sor konvergens és divergens is.

Pl. $\sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n}$ divergens, és a $\sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n^2}$ konvergens sorok esetén egyaránt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$

M₅ A fenti tétel tovább finomítható. Bebizonyíthatók az alábbi állítások is:

$$\text{Ha } a_n > 0\ \forall\, n, \text{ és } \overline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_1^\infty a_n \text{ konvergens.}$$

$$\text{Ha } a_n > 0\ \forall\, n, \text{ és } \underline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_1^\infty a_n \text{ divergens.}$$

($\overline{\lim}\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ a konvergenciáról nem mond semmit.)

Pl. Konvergens-e a $\boxed{\sum\limits_{n=1}^\infty \dfrac{(n+2)\ 3^{n+1}}{n!}}$ sor?

Megoldás. A feladatot a T_1^* tétellel (hányadoskritériummal) oldjuk meg.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)\ 3^{n+2}\quad n!}{(n+1)!\quad (n+2)\ 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\,(n+3)}{(n+1)\,(n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \quad \frac{1+\dfrac{3}{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)} = 0 < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum^\infty a_n \text{ konvergens.}$$

Feladatok

Vizsgálja meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

1. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{(2n+1)!}$
2. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}\,(n+2)!}$
3. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
4. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$
5. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)^{n+3}}$
6. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}, \qquad k \in \mathbb{N}^+$

2.5.4. Gyökkritérium

T₂ *Ha* $\forall\, n \geq N$ *-re* $a_n > 0$ *és*

1. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_{N}^{\infty} a_n$ *konv.*

2. $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_{N}^{\infty} a_n$ *div.*

B 1. $0 < a_n \leq q^n$ és $\displaystyle\sum_{N}^{\infty} q^n$ konvergens $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{N}^{\infty} a_n$ konvergens a majoráns kritérium miatt.

2. $a_n \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad a_n \not\to 0 \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_{N}^{\infty} a_n$ div. ■

M₆ $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ elég, ha végtelen sok n-re igaz. Nem kell, hogy $\forall\, n > N$-re teljesüljön. Ekkor már $\exists\, a_{n_r} \not\to 0$ részsorozat.

Ez a tétel is kimondható limeszes alakban:

T_2^* *Ha* $a_n > 0$ *és* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$, *akkor*

$$c < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

$$c > 1 \text{ vagy } c = \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ divergens.}$$

B Hasonló a hányados kritériumnál látotthoz. ■

M_7 $c = 1$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ esetén nem használható a gyökkritérium. Az alábbi két példa igazolja állításunk helyességét.

Pl. $\sum^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

Pl. $\sum^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

Bebizonyítható az alábbi állítás is:

T

$$\text{Ha } a_n > 0,\ n > N \text{ és } \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ konv.} \qquad (\neg B)$$

$$\text{Ha } a_n > 0,\ n > N \text{ és } \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ div.}$$

M_8 A második állítás könnyen bizonyítható, hiszen $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$-ből következik a divergencia, mivel végtelen sok n-re:

$$\sqrt[n]{a_n} > 1 \quad \Longrightarrow \quad a_n > 1\,; \quad \text{tehát } \exists\, a_{n_r} \not\to 0 \text{ részsorozat.}$$

Pl. Konvergens-e a $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+5}\right)^{2n^3}}$ sor?

Megoldás. A feladatot a T_2^* tétellel (gyökkritériummal) oldjuk meg.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+5}\right)^{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\dfrac{2}{2n^2}\right)^{2n^2}}{\left(1+\dfrac{5}{2n^2}\right)^{2n^2}} = \frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^5} = \frac{1}{\mathrm{e}^3} < 1$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

Feladatok

Vizsgálja meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

1. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2\; 7^n}$
2. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2\; 3^n}{7^{n+1}}$
3. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n^6}{2^{n+3}}$
4. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n^2}$
5. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^{n^2+2n}$
6. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{4n+1}$
7. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{2n+1}\,(3n+1)}$
8. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n}{n-2}\right)^{n^2} \frac{1}{4^n}$

További kidolgozott példák

Pl. Konvergens-e a $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n^4\;\, 8^n}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

Megoldás. Ezt a feladatot legegyszerűbben a majoráns kritérimmal oldhatjuk meg.

$$a_n < \frac{8^n}{n^4\;\, 8^n} = \frac{1}{n^4}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \text{ konvergens } (\alpha = 4 > 1) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

A hányados kritérium, illetve a gyökkritérium is használható lenne.

Pl. Konvergens-e a $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 \ 7^n}{8^n}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

Megoldás. Ennek a feladatnak a megoldása már a majoráns kritérummal elég nehézkes lenne. A hányados kritérium alkalmazható, de itt a gyökkritérium alkalmazása a legjobb választás.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^4 \ 7}{8} = \frac{7}{8} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

Pl. Konvergens-e a $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(2n+1)\ 5^n}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

Megoldás. Most viszont a hányados kritérium alkalmazása a legcélszerűbb. (A gyökkritérium alkalmazásánál a rendőrelvre is szükségünk lenne az $\sqrt[n]{2n+1}$ sorozat határértékének bizonyításához.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+2} \qquad (2n+1) \quad 5^n}{(2n+3)\ 5^{n+1} \quad 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{5} \quad \frac{2n+1}{2n+3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{5} \quad \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}} = \frac{3}{5} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum a_n \text{ konvergens.}$$

Pl. Konvergens-e a $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!\ 2^n}{3^{2n}}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)! \left(\frac{2}{9}\right)^n$ sor?

Megoldás. Itt is a hányados kritériumot alkalmazzuk:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}}{(n+1)! \left(\frac{2}{9}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{9} \ (n+2) = \infty > 1$$

$$\Longrightarrow \quad \sum a_n \text{ divergens.}$$

Pl. Abszolút vagy feltételesen konvergens-e a $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5\,n^2 + 3}}$ sor?

Megoldás. Nem abszolút konvergens, mert

$$|a_n| = \frac{n}{5n^2+3} \geq \frac{n}{5n^2+3n^2} = \frac{1}{8n}$$

és $\frac{1}{8}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergens, tehát $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|$ divergens (a minoráns kritérium miatt).

Viszont $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konvergens, mert Leibniz-típusú. Ugyanis

$|a_n| = \dfrac{n}{5n^2+3} \searrow 0$, mert

$$|a_n| = \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{=\frac{1}{n}} \frac{1}{5+\frac{3}{n^2}} \to 0\cdot\frac{1}{5} = 0$$

És

$$\begin{array}{rcl}
|a_{n+1}| = \dfrac{n+1}{5(n+1)^2+3} & < & \dfrac{n}{5n^2+3} = |a_n| \\
 & \Uparrow & \\
(n+1)(5n^2+3) & < & n\,(5n^2+10n+8) \\
 & \Uparrow & \\
5n^3+5n^2+3n+3 & < & 5n^3+10n^2+8n \\
 & \Uparrow & \\
0 & < & 5n^2+5n-3\,, \quad \text{ha} \ \ n \geq 2
\end{array}$$

Vagyis a sor feltételesen konvergens.

2.5.5. Integrálkritérium

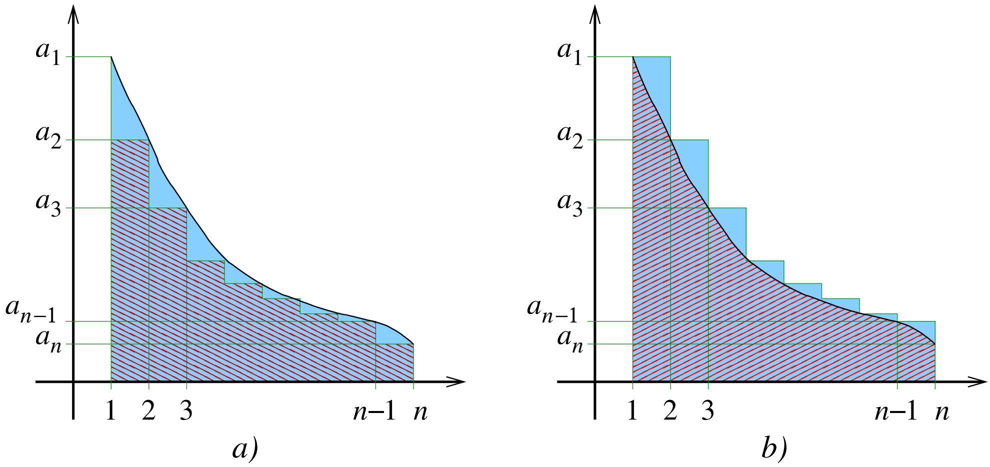
T *Legyen f pozitív értékű monoton csökkenő függvény $[1,\infty)$ -en és $f(k) = a_k > 0$*

1. *Ha $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergens $\Longrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens*

2. *Ha $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ divergens $\Longrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergens*

(M) $\Longleftarrow$ állítás is igaz, tehát a sor és az improprius integrál egyidejűleg konvergens, illetve divergens.

2.1. ábra. Az integrál és a részletösszeg kölcsönösen majorálja, minorálja egymást



(B) 1. Tekintsük a 2.1.a) ábrát! Mivel

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq \underbrace{\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{monoton növő függvénye } n\text{-nek}} \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}\,,$$

$$a_k > 0 \;\text{ és }\; \sum_2^n a_k \;\text{ korlátos } \Longrightarrow \sum_2^\infty a_k \;\text{ konvergens } \Longrightarrow \sum_1^\infty a_k \;\text{ konvergens}$$

2. Tekintsük a 2.1.b) ábrát!

$$\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = s_{n-1}$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = \infty$, tehát a sor divergens. ∎

A $\sum^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor konvergenciája

Ⓣ *A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor konvergens, ha $\alpha > 1$, minden más esetben divergens.*

Ⓑ $\alpha \le 0$ esete:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} = \lim_{n\to\infty} n^{|\alpha|} \nrightarrow 0$$

($\alpha = 0$ esetén 1-hez tart , $\alpha < 0$ esetén pedig ∞-hez tart)

$\Longrightarrow$ a sor divergens, mivel nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

$\alpha > 0$ esete:

$f(x) := \frac{1}{x^\alpha}$, $x \ge 1$: a függvény monoton csökkenő és $f(n) = \frac{1}{n^\alpha} = a_n$.

Így alkalmazható a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciájának vizsgálatára az integrálkritérium.

Mint bizonyítottuk $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konvergens $\alpha > 1$-re, ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor is konvergens, ha $\alpha > 1$. Az improprius integrál divergens $0 < \alpha < 1$ esetén, így ekkor a vizsgált sor is divergens. ■

2.5.6. Hibabecslés pozitív tagú sorok esetén

Integrálkritériummal

Ha a sor konvergenciája integrálkritériummal állapítható meg, akkor az s sorösszeg s_n részletösszeggel való közelítésének hibáját is egy integrállal becsülhetjük.

Ⓣ *Ha az integrálkritérium 1. állításának feltételei teljesülnek, akkor az $s \approx s_n$ közelítésnél elkövetett hiba*

$$0 < H = r_n = a_{n+1} + a_{n+2} \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \le \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ⓑ Mivel

$$a_{n+1} + a_{n+2} \cdots + a_m \le \int_n^{m} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

ezért

$$H = r_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} a_k \le \lim_{m\to\infty} \int_n^m f(x)\,dx = \int_n^\infty f(x)\,dx. \qquad \blacksquare$$

Pl. Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ \ln n^{10}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ (\ln\ \sqrt{n})^2}$

Amelyik sor konvergens, annál adjon becslést az $s \approx s_{1000}$ közelítésnél elkövetett hibára!

Megoldás.

a) $$f(x) := \frac{1}{x\ \ln x^{10}} = \frac{1}{10}\,\frac{1}{x\ \ln x}\ , \quad x \ge 3$$

f pozitív értékű monoton csökkenő függvény a $[3,\infty)$ intervallumon és $f(n) = a_n > 0 \implies$ alkalmazható az integrálkritérium.

$$\int_3^\infty \frac{1}{10}\,\frac{1}{x\ \ln x}\,dx = \frac{1}{10}\lim_{\omega\to\infty}\int_3^\omega \underbrace{\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}}_{f'/f\ \text{alakú}}\,dx = \frac{1}{10}\lim_{\omega\to\infty} \ln\ln x\big|_3^\omega =$$

$$= \frac{1}{10}\lim_{\omega\to\infty}(\ln\ln\omega - \ln\ln 3) = \infty$$

Az improprius integrál divergens $\overset{\text{int. kr.}}{\implies}$ a $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ \ln n^{10}}$ sor is divergens.

b) $$f(x) := \frac{1}{x\ (\ln\ \sqrt{x})^2} = \frac{1}{1/4}\,\frac{1}{x\ (\ln\ x)^2}\ , \quad x \ge 3$$

f pozitív értékű monoton csökkenő függvény a $[3,\infty)$ intervallumon $f(n) = a_n > 0 \implies$ most is alkalmazható az integrálkritérium.

$$\int_3^\infty 4\,\frac{1}{x\ (\ln\ x)^2}\,dx = 4\lim_{\omega\to\infty}\int_3^\omega \underbrace{\frac{1}{x}(\ln x)^{-2}}_{f'\,f^{-2}\ \text{alakú}}\,dx = 4\lim_{\omega\to\infty}\left.\frac{(\ln x)^{-1}}{-1}\right|_3^\omega =$$

$$= 4\lim_{\omega\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln\omega} + \frac{1}{\ln 3}\right) = \frac{4}{\ln 3}$$

Az improprius integrál konvergens $\overset{\text{int. kr.}}{\implies}$ a $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ (\ln\ \sqrt{n})^2}$ sor is konvergens.

Hibaszámítás az $s \approx s_{1000}$ közelítésre:

$$0 < H = s - s_{1000} \le \int_{1000}^{\infty} 4\,\frac{1}{x}\,(\ln x)^{-2}\,\mathrm{d}x = 4 \lim_{\omega\to\infty} \left.\frac{(\ln x)^{-1}}{-1}\right|_{1000}^{\omega} =$$

$$= 4 \lim_{\omega\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln\omega} + \frac{1}{\ln 1000}\right) = \frac{4}{\ln 1000}$$

Egyéb esetekben (csak pozitív tagú sorokra)

Ha a sor konvergenciáját nem az integrálkritériummal mutattuk meg, akkor próbálkozhatunk azzal, hogy a hibát megadó r_n maradékösszeget egy konvergens geometriai sor r_n^* maradékösszegével becsüljük. Ha pl. a sor konvergenciájára hányados vagy gyökkritériummal következtettünk, akkor a sorhoz mindig található konvergens majoráló geometriai sor.

Pl. Bizonyítsa be, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2}{2^{2n+1} + n^2 + n}$$

sor konvergens és adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítésnél elkövetett hibára!

Megoldás. $a_n = \dfrac{3^n + 2}{2\cdot 4^n + n^2 + n} < \dfrac{3^n + 3^n}{2\cdot 4^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ konvergens geometriai sor $\left(0 < q = \dfrac{3}{4} < 1\right) \overset{\text{maj. kr.}}{\Longrightarrow}$ a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens.

Hibaszámítás az $s \approx s_{100}$ közelítésre:

$$0 < H = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{3^n + 2}{2^{2n+1} + n^2 + n} \le \sum_{n=101}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{101}}{1 - \frac{3}{4}}$$

Pl.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$$

Mutassa meg, hogy a sor konvergens és adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítésnél elkövetett hibára!

Megoldás. Hányados kritériummal dolgozunk.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}\ \ (n+1)!}{(n+2)!\ \ 3^n} = \frac{3}{n+2} \to 0 < 1$$

$$\stackrel{\text{hány. kr.}}{\Longrightarrow} \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ sor konvergens.}$$

Hibaszámítás az $s \approx s_{100}$ közelítésre:

$$0 < H = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!} = \frac{3^{101}}{102!} + \frac{3^{102}}{103!} + \frac{3^{103}}{104!} + \frac{3^{104}}{105!} + \ldots =$$

$$= \frac{3^{101}}{102!} \left(1 + \frac{3}{103} + \frac{3^2}{103 \cdot 104} + \frac{3^3}{103 \cdot 104 \cdot 105} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{3^{101}}{102!} \left(1 + \frac{3}{103} + \left(\frac{3}{103}\right)^2 + \left(\frac{3}{103}\right)^3 + \ldots\right) = \frac{3^{101}}{102!} \frac{1}{1 - \frac{3}{103}}$$

2.6. Műveletek konvergens sorokkal

Ⓣ *Ha* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$ *és* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b$, $S_a, S_b \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = S_a + S_b \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot a_k) = c \cdot S_a\,.$$

Bizonyítása az 1.2 fejezetben már megtörtént.

2.6.1. Végtelen sorok természetes szorzata

$$
\begin{array}{c|cccccccccccc}
 & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & \cdots & + & a_k & + \cdots \\
\hline
b_1 & b_1a_1 & + & b_1a_2 & + & b_1a_3 & + & b_1a_4 & + & \cdots & + & b_1a_k & + \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
b_2 & b_2a_1 & + & b_2a_2 & + & b_2a_3 & + & b_2a_4 & + & \cdots & + & b_2a_k & + \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
b_3 & b_3a_1 & + & b_3a_2 & + & b_3a_3 & + & b_3a_4 & + & \cdots & + & b_3a_k & + \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
b_4 & b_4a_1 & + & b_4a_2 & + & b_4a_3 & + & b_4a_4 & + & \cdots & + & b_4a_k & + \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
b_k & b_ka_1 & + & b_ka_2 & + & b_ka_3 & + & b_ka_4 & + & \cdots & + & b_ka_k & + \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

A természetes szorzat elemei:

$$t_1 = b_1a_1, \quad t_2 = b_2a_1 + b_2a_2 + b_1a_2, \quad t_3 = b_3a_1 + b_3a_2 + b_3a_3 + b_2a_3 + b_1a_3, \ldots$$

A természetes szorzat:

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k\,, \qquad \text{ahol} \qquad \sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k .$$

T *Ha* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$ *és* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b$, *akkor a* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *és* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *sorok természetes szorzata konvergens, és*

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) = S_a\, S_b .$$

(Bizonyítás az előzőek alapján nyilvánvaló.)

2.6.2. Végetelen sorok Cauchy-szorzata

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccc}
 & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & \cdots & + & a_k & + & \cdots \\
\hline
b_1 & b_1a_1 & & b_1a_2 & & b_1a_3 & & b_1a_4 & & \cdots & & b_1a_k & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
b_2 & b_2a_1 & & b_2a_2 & & b_2a_3 & & b_2a_4 & & \cdots & & b_2a_k & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
b_3 & b_3a_1 & & b_3a_2 & & b_3a_3 & & b_3a_4 & & \cdots & & b_3a_k & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
b_4 & b_4a_1 & & b_4a_2 & & b_4a_3 & & b_4a_4 & & \cdots & & b_4a_k & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & & \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
b_k & b_ka_1 & & b_ka_2 & & b_ka_3 & & b_ka_4 & & \cdots & & b_ka_k & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

A Cauchy-szorzat elemei:

$$
\begin{aligned}
&c_1 = b_1a_1, \\
&c_2 = b_1a_2 + b_2a_1, \\
&c_3 = b_1a_3 + b_2a_2 + b_3a_1, \\
&\cdots, \\
&c_n = b_1a_n + b_2a_{n-1} + b_3a_{n-2} + \cdots + b_na_1 \qquad (\text{indexek összege } n+1\,).
\end{aligned}
$$

A Cauchy-szorzat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,, \quad \text{ahol} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} b_k\, a_{n-k+1}\,.$$

(T) *Ha* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *és* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *abszolút konvergens sorok és* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a\,,\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b\,,$ *akkor a* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *és* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *Cauchy-szorzata is abszolút konvergens, és*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = S_a\, S_b\,, \quad \textit{ahol} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} b_k\, a_{n-k+1}\,.$$

(¬B)

(Pl.) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots = \frac{1}{1-x}\,,$ ha $|x| < 1$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^k = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^k\, x^k + \cdots = \frac{1}{1+x}\,, \ \text{ha} \ |x| < 1\,.$$

Írjuk fel a fenti két sor Cauchy-szorzatát!

Megoldás.

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccc}
 & 1 & + & x & + & x^2 & + & x^3 & + & \cdots & + & x^k & + & \cdots \\
\hline
1 & 1 & & x & & x^2 & & x^3 & & \cdots & & x^k & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
-x & -x & & -x^2 & & -x^3 & & -x^4 & & \cdots & & -x^{k+1} & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
x^2 & x^2 & & x^3 & & x^4 & & x^5 & & \cdots & & x^{k+2} & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
-x^3 & -x^3 & & -x^4 & & -x^5 & & -x^6 & & \cdots & & -x^{k+3} & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & & \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
(-1)^k x^k & \cdots & & & & & & & & & & & & \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Cauchy-szorzat:

$$1+0+x^2+0+x^4+0+x^6+\cdots = 1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2k}+\cdots = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1+x}\,, \quad \text{ha} \quad |x|<1\,.$$

Pl. Házi feladat:

Határozzuk meg a $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=\mathrm{e}^x$ és $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}=\mathrm{e}^y$ sorok Cauchy-szorzatát!

M $\displaystyle \mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^{x+y}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x+y)^k}{k!}$ eredményt kell kapni.

2.6.3. Zárójelek elhelyezése, illetve elhagyása végtelen sor esetén

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+\cdots$$

A fenti sor részletösszegei:

$s_1=a_1,\ s_2=a_1+a_2,\ s_3=a_1+a_2+a_3,\ s_4=a_1+a_2+a_3+a_4,\ s_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5,\ldots$ stb. Az

$$a_1+a_2+(\underbrace{a_3+a_4+a_5}_{a_3^*})+a_6+\cdots$$

bezárójelezett új sor részletösszegei

$$s_1^* = a_1,\ s_2^* = a_1 + a_2,\ s_3^* = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,\ s_4^* = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6,\ \dots$$

Zárójelek elhelyezése esetén a részletösszegek sorozata szűkül. Ha a sor konvergens volt, akkor zárójelek behelyezése esetén is konvergens marad. Előfordulhat, hogy divergens sorból – zárójelek elhelyezése után – konvergens sor lesz.

Pl. $(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-\cdots$.

Véges sok zárójel elhelyezése nem befolyásolja a konvergenciát!

Zárójelek elhagyása után a részletösszegek sorozata bővül. Ha a sor divergens volt, akkor zárójelek elhagyása esetén is divergens marad. Előfordulhat, hogy konvergens sorból – zárójelek elhagyása után – divergens sor lesz. Véges sok zárójel elhagyása nem befolyásolja a konvergenciát!

2.6.4. Végtelen sor elemeinek felcserélése (átrendezése)

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_k + \cdots$$

$$a_1 + a_3 + a_2 + a_{100} + a_5 + a_6 + \cdots + a_{99} + a_4 + a_{101} + \cdots$$

Véges sok elem felcserélése nem változtatja meg a konvergencia vagy divergencia tényét, nem változik meg a sorösszeg sem. Végtelen sok elemcsere megváltoztathatja a sorösszeget, feltételesen konvergens sor átrendezhető akár divergenssé is.

Ⓣ *Ha* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergens és* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *divergens, akkor* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *átrendezhető úgy, hogy divergens legyen, és átrendezhető úgy is, hogy egy előre tetszőlegesen megadott szám legyen az összege.*

(Nem bizonyítjuk.)

Ⓣ *Ha* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *abszolút konvergens, akkor tetszőleges átrendezése is abszolút konvergens, az átrendezés nem változtatja meg a sorösszeget.*

(Nem bizonyítjuk.)

2.7. Feladatok sorokhoz

1. a) $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{3^{k+1} + 2^{2k+1}}{5^k} = ?$

   b) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} = ?$

c) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}} = ?$

2. Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}$

b) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n n^3+1}{n^5+1}$

c) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2+5}}$

d) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{5^n}{(2n+3)!}$

e) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{3n+1}$

f) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{n\,4^{n+1}}$

g) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$

h) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n+n}$

i) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

j) $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

k) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{7^{3n+2}}$

l) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n}{(3n)!}$

m) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$

n) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{5^n+6^n}$

o) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n+1}$

p) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+5}$

q) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+5}$

r) $\displaystyle\sum_{10}^{\infty} \frac{\frac{1}{n}}{n-\sqrt{n^2-\sqrt{n}+3}}$

s) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(1-\frac{\sqrt{5}}{3n}\right)^n$

t) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{10^n}{n!\,n^2}$

u) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(1-\frac{\sqrt{3}}{n}\right)^{n^2+n}$

v) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{\left(4+\frac{2}{n^2}\right)^n}$

w) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

x) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n^2}$

y) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n^2}$

z) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2} \frac{1}{2^n}$

3. Határozzuk meg az alábbi sorok értékét 10^{-3}-nál kisebb hibával! Lásd itt és itt.

   a) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{2n^2+1}\right)^n$

   b) $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(2n)!-n!}$

   c) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{2^n}{2^n+10^n}$

   d) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n\cdot 2^n+5}$

   e) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

   f) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n!\, 3^n}{(2n)!}$

4. Mekkora hibát követünk el, ha a sorösszeget 10. részletösszegével közelítjük? Lásd itt és itt.

   $(s \approx s_{10}; \quad H = r_{10} = \sum\limits_{k=11}^{\infty} a_k; \quad |H| \leq ?)$

   a) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!+\sqrt{2}}$

   b) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3^n}$

   c) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n$

   d) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

   e) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n}+n^2+3}$

   f) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(n-1)}{n^2+n}$

5. Abszolút, illetve feltételesen konvergens-e az alábbi sor?

a) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{n+4}{n^2+4}$

b) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ \log_2 n^2}$

c) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2-3n+8}$

d) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{3^n}+\cdots$

e) $\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{1^2}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n^2}+\cdots$

f) $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{2^3}-\cdots-\frac{1}{n!}+\frac{1}{2^n}-\cdots$

g) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\cdots+\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{1}{(2n)^2}+\cdots$

h) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2^n}+\cdots$

2.8. Számsorozatok nagyságrendje

D $a_n=O(b_n)$ („nagy ordó b_n”), ha $\exists\ c_1$:
$|a_n|\le c_1|b_n|,\quad n>N$ (legfeljebb véges sok kivétellel)

D $a_n=\Omega(b_n)$ („omega b_n”), ha $b_n=O(a_n)$.

Vagyis $|b_n|\le c_1|a_n|\quad n>N\quad(\exists\ c_1)$.

Ekkor: $c_2|b_n|=\dfrac{1}{c_1}|b_n|\le|a_n|$, vagyis most $|a_n|$ alulról becsülhető $|b_n|$ segítségével.

D $a_n=\Theta(b_n)$ („teta b_n”), ha $a_n=O(b_n)$ és $a_n=\Omega(b_n)$.

Ilyenkor azt mondjuk, hogy a_n és b_n *azonos nagyságrendű*
Az előzőből következik:

T $a_n=\Theta(b_n)\iff c_2|b_n|\le|a_n|\le c_1|b_n|$

Pl. $a_n=2n^2-n+3$

Megoldás. 1. $a_n = O(n^2)$, mert $2n^2 - n + 3 \le 2 \cdot n^2$, ha $n \ge 3$. Persze $a_n = O(n^3)$ is igaz, sőt általánosságban: $a_n = O(n^{2+\alpha}), \quad \alpha \ge 0$.

2. $a_n = \Omega(n^2)$, mert $1 \cdot n^2 = 2n^2 - n^2 \le 2n^2 - n + 3$. Sőt $a_n = \Omega(n^{2-\alpha}), \quad \alpha \ge 0$.

3. Tehát $a_n = \Theta(n^2)$.

2.8.1. Műveletek Θ-val

(T) $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \Theta(c_n) \\ b_n &= \Theta(d_n) \end{aligned}\right\} \implies \begin{cases} 1. \quad a_n \cdot b_n = \Theta(c_n \cdot d_n) \\ 2. \quad \dfrac{a_n}{b_n} = \Theta\left(\dfrac{c_n}{d_n}\right) \\ 3. \quad a_n + b_n = \Theta(c_n + d_n) \end{cases}$$

Különbségre nem igaz!

(M) Akkor van értelme használni ezt, ha c_n és d_n sokkal „egyszerűbb” sorozatok.

(B)

$$0 < \alpha_1 c_n \le a_n \le \alpha_2 c_n, \quad \text{mert } a_n = \Theta(c_n)$$
$$0 < \beta_1 d_n \le b_n \le \beta_2 d_n, \quad \text{mert } b_n = \Theta(d_n)$$

1. Azonos értelmű egyenlőtlenségek összeszorozhatók:

$$(\alpha_1\beta_1)c_n d_n \le a_n b_n \le (\alpha_2\beta_2)c_n d_n \quad \implies \quad a_n b_n = \Theta(c_n d_n)$$

2.

$$\left.\begin{aligned} &0 < \alpha_1 c_n \le \alpha_n \le \alpha_2 c_n \\ &0 < \frac{1}{\beta_2}\frac{1}{d_n} \le \frac{1}{b_n} \le \frac{1}{\beta_1}\frac{1}{d_n} \end{aligned}\right\} \implies \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)\frac{c_n}{d_n} \le \frac{a_n}{b_n} \le \left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)\frac{c_n}{d_n},$$

tehát $\dfrac{a_n}{b_n} = \Theta\left(\dfrac{c_n}{d_n}\right)$

3.

$$\alpha(c_n + d_n) \le \alpha_1 c_n + \beta_1 d_n \le a_n + b_n \le \alpha_2 c_n + \beta_2 d_n \le \beta(c_n + d_n)$$
$$\alpha = \min\{\alpha_1, \beta_1\}, \quad \beta = \max\{\alpha_2, \beta_2\}$$

$\implies a_n + b_n = \Theta(c_n + d_n)$ ■

Pl. $a_n = \sqrt{2n^2+3n+1} - \sqrt{n^2-n+1} = ?$

Megoldás. $a_n = \dfrac{n^2+4n}{\sqrt{2n^2+3n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} =$

$$= \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n)+\Theta(n)} = \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n+n)} = \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n)} = \Theta\left(\frac{n^2}{n}\right) = \Theta(n) \quad \Longrightarrow \quad a_n \to \infty$$

Pl. $a_n = \sqrt{7n^2-2n+10} - \sqrt{7n^2-2n+3} = ?$

Megoldás. $a_n = \dfrac{10-3}{\sqrt{7n^2-2n+10}+\sqrt{7n^2-2n+3}} = = \dfrac{\Theta(1)}{\Theta(n+n)} = \Theta\left(\dfrac{1}{n}\right) \quad \Longrightarrow$
$a_n \to 0$

2.8.2. Aszimptotikus egyenlőség ($a_n \sim b_n$)

D a_n aszimptotikusan egyenlő b_n-nel, jelben $a_n \sim b_n$, ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Pl. $\sin\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$, mert $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$

Pl. $n! \sim \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ **Stirling-formula** $(\neg \mathrm{B})$

T $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \sim c_n \\ b_n \sim d_n \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 1. & a_n + b_n \sim c_n + d_n \\ 2. & a_n b_n \sim c_n d_n \\ 3. & \dfrac{1}{a_n} \sim \dfrac{1}{c_n} \\ 4. & \dfrac{b_n}{a_n} \sim \dfrac{d_n}{c_n} \end{array}\right.$$

Megint nincs különbség!

B

$$a_n \sim c_n : \quad \frac{a_n}{c_n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < 1-\varepsilon < \frac{a_n}{c_n} < 1+\varepsilon, \quad n > N_1$$

$$b_n \sim d_n: \quad \frac{b_n}{d_n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < 1-\varepsilon < \frac{b_n}{d_n} < 1+\varepsilon, \quad n > N_2$$

Legyen $n > \max\{N_1, N_2\} = N$

1. $1-\varepsilon = \dfrac{(1-\varepsilon)c_n + (1-\varepsilon)d_n}{c_n+d_n} < \dfrac{a_n+b_n}{c_n+d_n} < \dfrac{(1+\varepsilon)c_n + (1+\varepsilon)d_n}{c_n+d_n} = 1+\varepsilon\,,$

   ha $n > N$

2. $\neg$B

3. $\dfrac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{c_n}} = \dfrac{c_n}{a_n} = \dfrac{1}{\frac{a_n}{c_n}} \to 1$

4. Az előző kettőből következik: $a_n \sim c_n \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{a_n} \sim \dfrac{1}{c_n}$; másrészt $b_n \sim d_n$

$$\Longrightarrow \quad \frac{b_n}{a_n} \sim \frac{d_n}{c_n} \qquad \blacksquare$$

Pl. $a_n = \sqrt[3]{2n^2+n+1} - \sqrt[3]{2n^2-3n-7} = ?$

Megoldás.

$$a_n = \frac{2n^2+n+1-(2n^2-3n-7)}{\left(\sqrt[3]{2n^2+n+1}\right)^2 + \sqrt[3]{2n^2+n+1}\sqrt[3]{2n^2-3n-7} + \left(\sqrt[3]{2n^2-3n-7}\right)^2} \sim$$

$$\sim \frac{4n}{\left(\sqrt[3]{2}\,n^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{2}\,n^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{2}\,n^{\frac{2}{3}}\right)^2} = \frac{4n}{\sqrt[3]{4}\cdot 3\,n^{\frac{4}{3}}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{n}} \quad \Longrightarrow \quad a_n \to 0$$

Pl. $a_n = \dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{n}}{\sqrt[3]{2n^2+n+1} - \sqrt[3]{2n^2-3n-7}} = ?$

Megoldás.

$$a_n \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{4}{3\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{n}}} = \text{konst}\cdot\sqrt[3]{n} \to \infty$$

Pl. $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = ?$

Megoldás.

$$a_n \sim \frac{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} 2\pi n}{\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{2\pi\cdot 2n}} = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}{4^n} \to 0$$

Pl. $\binom{2n}{n} = ?$

Megoldás. Az előző példa felhasználásával:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \qquad \left(= \Theta\left(\frac{4^n}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

M $a_n \sim b_n \quad \not\Longrightarrow \quad (a_n)^n \sim (b_n)^n \qquad$ Pl. $\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\downarrow\ 1} \sim \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\downarrow\ 1}$, de $\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\downarrow\ \mathrm{e}} \not\sim 2$

Persze $a_n \sim b_n$ esetén $a_n^k \sim b_n^k$, $k \in \mathbb{N}^+$ már igaz ($k \neq f(n)$). (k valós is lehet)

$$\left(\frac{a_n}{b_n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^k \to 1\right)$$

És igaz a következő tétel is:

T $a_n, b_n > 0$

$$a_n \sim b_n \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} \sim \sqrt[n]{b_n}$$

B $a_n \sim b_n \quad \Longrightarrow \quad \frac{a_n}{b_n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < 1-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1+\varepsilon, \quad n > N(\varepsilon)$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\sqrt[n]{1-\varepsilon}}_{\downarrow\ 1} < \sqrt[n]{\frac{a_n}{b_n}} < \underbrace{\sqrt[n]{1+\varepsilon}}_{\downarrow\ 1} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{\frac{a_n}{b_n}} \to 1$$

■

Pl. $\sqrt[n]{\frac{3n^2 - n\sqrt{n} + 6}{2n^2 + 3n + 7}} \sim \sqrt[n]{\frac{3}{2}} \sim 1$

Pl. Határozza meg A és α értékét úgy, hogy $\cos\frac{1}{n} - 1 \sim An^\alpha$ teljesüljön!

Megoldás. 1. megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{n} - 1}{An^\alpha} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{n} - 1}{n^\alpha} = A \neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 0\text{-ra } A = 0 \text{ lenne} \\ \alpha > 0\text{-ra } \frac{0}{\infty} \to 0 = A \text{ lenne} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \alpha < 0$$

$$u := \frac{1}{n} \xrightarrow[\infty]{n} 0$$

$$\lim_{u\to+0} \underbrace{\frac{\cos u - 1}{u^{-\alpha}}}_{\frac{0}{0}\text{ alakú } (-\alpha>0)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{u\to+0} \frac{-\sin u}{-\alpha u^{-\alpha-1}} = \lim_{u\to+0} \frac{\sin u}{u^{-\alpha-1}} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} = A$$

ha $-\alpha - 1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = -2, A = -\dfrac{1}{2}$.

Tehát $\cos \dfrac{1}{n} - 1 \sim -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^2}$

2. megoldás:

$\cos x - 1 = -2\sin^2 \dfrac{x}{2}$ azonosság segítségével: $\dfrac{\cos \frac{1}{n} - 1}{An^\alpha} = \dfrac{-2\sin^2 \frac{1}{2n}}{An^\alpha} \to 1$, ha $An^\alpha = -2\left(\dfrac{1}{2n}\right)^2 \to A = -\dfrac{1}{2}, \alpha = -2$

Feladat:

Határozza meg A és α értékét úgy, hogy $\sin \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} \sim An^\alpha$ fennálljon!

(T) $a_n > 0, b_n > 0$

$a_n \sim b_n \quad \Longrightarrow \quad \sum^\infty a_n$ *és* $\sum^\infty b_n$ *egyidejűleg konvergens, illetve divergens*

(Jelben: $\sum^\infty a_n \sim \sum^\infty b_n$*)*

(B) $a_n \sim b_n \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{a_n}{b_n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 - \varepsilon < \dfrac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon$. Legyen $\varepsilon < 1$.

Tehát $c_1 b_n < a_n < c_2 b_n \quad (c_1 = 1 - \varepsilon > 0, \quad c_2 = 1 + \varepsilon)$

Ha $\sum^\infty a_n$ konvergens, akkor $b_n < \dfrac{1}{c_1} a_n$ miatt $\sum^\infty b_n$ is konvergens (majoráns kritérium)

Ha $\sum^\infty a_n$ divergens, akkor $\dfrac{1}{c_2} a_n < b_n$ miatt $\sum^\infty b_n$ is divergens (minoráns kritérium)

Ha $\sum^\infty b_n$ konvergens, akkor $a_n < c_2 b_n$ miatt $\sum^\infty a_n$ is konvergens (majoráns kritérium)

Ha $\sum^\infty b_n$ divergens, akkor $c_1 b_n < a_n$ miatt $\sum^\infty a_n$ is divergens (minoráns kritérium) ■

(Pl.) $\displaystyle\sum^\infty \frac{1}{3n^2 - 2\sqrt{n} + 8} = \sum^\infty a_n$

Megoldás. $a_n \sim \dfrac{1}{3n^2} = b_n$ és $\displaystyle\sum^{\infty} b_n$ konvergens $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum^{\infty} a_n$ konvergens

Pl. $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{1}{7n + \sqrt[3]{n} - 1} = \sum^{\infty} a_n$

Megoldás. $a_n \sim \dfrac{1}{7n} = b_n$ és $\displaystyle\sum^{\infty} b_n$ divergens $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum^{\infty} a_n$ divergens

Pl. $\displaystyle\sum^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n} = \sum^{\infty} a_n$

Megoldás. $a_n \sim \dfrac{1}{n} = b_n$ és $\displaystyle\sum^{\infty} b_n$ divergens $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum^{\infty} a_n$ divergens

Pl. $\displaystyle\sum^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) = \sum^{\infty} a_n$

Megoldás. $a_n = 2\sin^2 \dfrac{1}{2n} \sim 2\dfrac{1}{4n^2} = \dfrac{1}{2n^2} = b_n$ és $\displaystyle\sum^{\infty} b_n$ konvergens $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum^{\infty} a_n$ konvergens

Feladatok:
Konvergensek-e az alábbi sorok?

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ch}\frac{2}{n} - \cos\frac{3}{n}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{3n}{n}}$

D $\boxed{\begin{array}{c} a_n = o(b_n) \quad (\text{„kis ordó } b_n\text{”}), \text{ ha } \forall\, c > 0\text{-ra} \\ |a_n| \le c\,|b_n| \quad n > N\text{-re} \end{array}}$

Más jelölés is használatos:

$a_n \ll b_n$, ha $a_n = o(b_n)$

(Nagyságrendileg kisebb vagy lényegesen kisebb.)

A definíció következménye, hogy $b_n \neq 0$ esetén $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| \leq c, \quad n > N \quad \forall\, c > 0$-ra. Ebből persze már következik, hogy ekkor $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N_0(\varepsilon)$, hogy $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon$, ha $n > N_0(\varepsilon)$.

Nyilvánvalóan igaz az alábbi állítás is:

T $\boxed{a_n = o(b_n), \quad b_n \neq 0 \iff \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0}$

Pl. Mit jelent $a_n = o(1)$?

Megoldás. Mivel $\forall\, c > 0$-ra $|a_n| \leq c$, ha $n > N$, ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

A következő állítás is könnyen bizonyítható lenne:ű

M $a_n \sim b_n \iff a_n = b_n(1 + o(1))$.

Pl. Mutassuk meg, hogy $n! = o(n^n)$!

Megoldás. Be kell látni, hogy $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$

1. megoldás:

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} < \frac{1}{n} \qquad + \text{rendőrelv}$$

2. megoldás:

$$\frac{n!}{n^n} \sim \frac{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{n^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{\mathrm{e}^n} \to 0$$

3. fejezet

Egyváltozós valós függvények határértéke és folytonossága

3.1. Függvény határértéke

Ⓓ Függvény: egyértékű reláció.
$f : D_f \longrightarrow R_f$ $\forall x \in D_f \subset \mathbb{R}$-hez hozzárendel pontosan egy $y \in R_f \subset \mathbb{R}$-et. $(y = f(x))$
D_f: domain, értelmezési tartomány (ÉT); R_f: range, értékkészlet (ÉK).
(Jelöljük $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ módon is.)

Néhány definíció és példa:

Ⓓ f felülről korlátos, ha $\exists K \in \mathbb{R}$, amire $f(x) \leq K \quad (x \in D_f)$, vagy másképp $R_f \subset (-\infty, K]$.

Ⓓ f alulról korlátos, ha $\exists K \in \mathbb{R}$, amire $f(x) \geq -K \quad (x \in D_f)$, vagy másképp $R_f \subset [-K, \infty)$.

Ⓓ f korlátos, ha alulról és felülről is korlátos, azaz $\exists K \in \mathbb{R}$, amire $|f(x)| \leq K$ $(x \in D_f)$, vagy másképp $R_f \subset [-K, K]$.

Ⓓ f monoton nő, ha $x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \qquad (x_1, x_2 \in D_f)$.

Ⓓ f szigorúan monoton nő, ha $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \qquad (x_1, x_2 \in D_f)$.

[1]lásd Thomas 02-es bemutató 1. és 3. fejezet (3-13. és 25-36. oldal).

Ⓓ f monoton csökken, ha $x_1 \le x_2 \implies f(x_1) \ge f(x_2) \qquad (x_1, x_2 \in D_f)$.

Ⓓ f szigorúan monoton nő, ha $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2) \qquad (x_1, x_2 \in D_f)$.

Ⓓ f periodikus $p > 0$ periódussal, ha $f(x+p) = f(x) \qquad (x \in D_f)$. (Ehhez persze az is kell, hogy $x \in D_f \implies x + p \in D_f$, azaz $D_f + p \subset D_f$ teljesüljön.)

Ⓓ f páros, ha $f(-x) = f(x) \qquad (x \in D_f)$. (Ehhez persze az is kell, hogy $x \in D_f \implies -x \in D_f$, azaz $-D_f \subset D_f$ teljesüljön.)

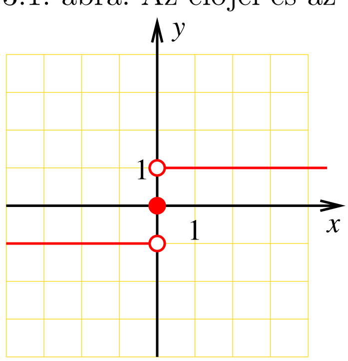
Ⓓ f páratlan, ha $f(-x) = -f(x) \qquad (x \in D_f)$. (Ehhez persze az is kell, hogy $x \in D_f \implies -x \in D_f$, azaz $-D_f \subset D_f$ teljesüljön.)

Pl. Az előjel (signum) függvény (3.1.a) ábra):

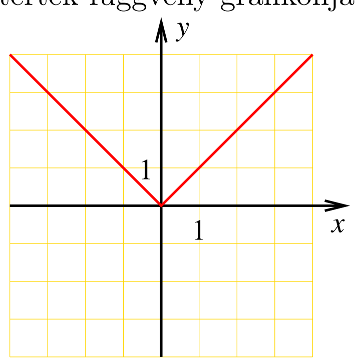
$$\operatorname{sg} x = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Az előjel függvény korlátos (pl.: $K = 1$), monoton nő, de nem szigorúan, nem periodikus, és páratlan.

3.1. ábra. Az előjel és az abszolútérték függvény grafikonja



a) sgn x



b) abs x

Pl. Az abszolútérték függvény (3.1.b) ábra):

$$|x| = \operatorname{abs} x = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Az abszolútérték függvény alulról korlátos (pl.: $K = 0$), de felülről nem, így nem korlátos. Semmilyen értelemben nem monoton, nem periodikus, és páros.

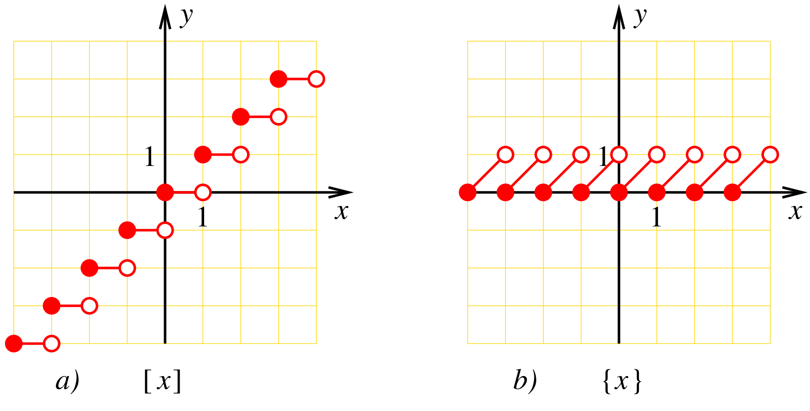
Pl. Az egészrész függvény (3.2.a) ábra):

$$[x] = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$$

Tehát $[x]$ az x-nél nem nagyobb legnagyobb egész szám. Pl. $[1.9] = 1$, $[-1.1] = -2$.

Az egészrész függvény alulról sem és felülről sem korlátos, így nem korlátos. Monoton nő, de nem szigorúan, nem periodikus, és se nem páros, se nem páratlan.

3.2. ábra. Az egészrész és a törtrész függvény grafikonja



Pl. A törtrész függvény (3.2.b) ábra):

$$\{x\} = x - [x]$$

A törtrész függvény alulról korlátos (pl.: $K = 0$), és felülről is (pl.: $K = 1$), így korlátos. Semmilyen értelemben nem monoton, periodikus ($p = 1$), és se nem páros, se nem páratlan.

Pl. Dirichlet függvény:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

A Dirichlet függvény alulról korlátos (pl.: $K = 0$), felülről korlátos (pl.: $K = 1$), így korlátos. Semmilyen értelemben nem monoton, minden pozitív, racionális p-vel periodikus, így nincs legkisebb periódusa, és páros.

Néhány definíció:

D Az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontja, ha x_0 minden környezete a H végtelen sok elemét tartalmazza.

Környezet fogalma:

D Az x_0 pont δ sugarú környezete:

Ha $x_0 \in \mathbb{R}$ és $\delta > 0$, akkor

$$K_{x_0,\delta} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

D Az x_0 pont δ sugarú pontozott környezete:

$$\dot{K}_{x_0,\delta} = K_{x_0,\delta} \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta).$$

Ha δ-nak nincs szerepe, akkor a jelölésben sem tüntetjük fel: K_{x_0}, $\dot{K}_{x_0}$.

$$|x - x_0| < r \iff x \in K_{x_0,r}.$$

Végesben vett véges határérték definíciója

D Azt mondjuk, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, ha

- x_0 torlódási pontja D_f-nek,
- $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon\,, \text{ ha } 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad x \in D_f$$

(Azaz $f(x) \in K_{A,\varepsilon}$, ha $x \in \dot{K}_{x_0,\delta} \cap D_f$)

H halmazra szorítkozó határérték:
az előző definícióban a $D_f \to D_f \cap H$ helyettesítést elvégezve kapjuk a definícióját.
Jobb oldali határérték: $H = (x_0, \infty)$

Jelölése: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0+0)$

Bal oldali határérték: $H = (-\infty, x_0)$

Jelölése: $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0-0)$

A definíciókból következően az értelmezési tartomány x_0 belső pontjában $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ akkor és csak akkor létezik, ha $\exists\, f(x_0-0), f(x_0+0)$ és $f(x_0-0) = f(x_0+0)$ (véges).

T ***Cauchy-kritérium*** $(\neg B)$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \iff \forall\, \varepsilon > 0$*-hoz* $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : x_1, x_2 \in \dot{K}_{x_0,\delta}$ *esetén* $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$

Pl. Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{x^2-4}{x+2} - 3x - 1 \right) = 3$

Megoldás. Be kell látnunk, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$:
$|f(x) - 3| < \varepsilon$, ha $0 < |x+2| < \delta(\varepsilon)$! $\qquad \delta(\varepsilon) = ?$

$$|f(x) - 3| = \left| \frac{x^2-4}{x+2} - 3x - 1 - 3 \right| \overset{x \neq -2}{=} |x - 2 - 3x + 1 - 3| = |-2x-4| =$$

$$= |(-2)(x+2)| = 2\,|x+2| < \varepsilon \implies |x+2| < \frac{\varepsilon}{2} \implies \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Pl. Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{x \to 27} \sqrt[3]{x} = 3$

Megoldás. $|f(x) - 3| < \varepsilon$, , ha $0 < |x-27| < \delta(\varepsilon) \qquad \delta(\varepsilon) = ?$

$$\left|\sqrt[3]{x} - 3\right| = \left| \left(\sqrt[3]{x} - 3\right) \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 3\sqrt[3]{x} + 3^2}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 3\sqrt[3]{x} + 3^2} \right| = \frac{|x-27|}{\left|\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 9\right|} \underset{x>0}{<} \frac{|x-27|}{9} < \varepsilon$$

Innen $|x-27| < 9\varepsilon$, így $\delta(\varepsilon) \leq \min\{9\varepsilon, 27\}$
(27 az $x > 0$ megkötésből származik.)

Pl. Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-x+5)=11$

Megoldás. $|f(x)-11|<\varepsilon$, ha $0<|x-3|<\delta(\varepsilon)$ $\quad \delta(\varepsilon)=?$

$$|x^2-x+5-11|=|x^2-x-6|=|x-3||x+2| \underset{\substack{|x-(-2)|<6 \\ -8<x<4}}{<} |x-3|\cdot 6<\varepsilon$$

Tehát $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{6}$, vagyis $\quad \delta(\varepsilon)\le\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{6},1\right\}$

(A vizsgálatot leszűkítettük a $(-8,4)$ intervallumra. A vizsgált $x_0=3$ pontnak ezen intervallum végpontjaitól való minimális távolsága 1, tehát δ nem lehet 1-nél nagyobb. Ezért került be a képletbe 1.)

Pl. Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+1}{1-x}=-1$

Megoldás. $|f(x)-(-1)|<\varepsilon$, ha $0<|x-(-2)|<\delta(\varepsilon)$

$$\left|\frac{2x+1}{1-x}+1\right|=\left|\frac{2x+1+1-x}{1-x}\right|=\frac{|x+2|}{|x-1|} \underset{\substack{|x-1|>1 \\ (x<0)\vee(x>2)}}{<} \frac{|x+2|}{1}<\varepsilon$$

Tehát $|x+2|<\varepsilon$, vagyis $\delta(\varepsilon)\le\min\{\varepsilon,2\}$
(2: -2 távolsága 0-tól.)

Feladatok:

A definícióval mutassa meg, hogy

1. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x+5}=3$
2. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x)=3$
3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$
4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{3+x}=-\dfrac{1}{2}$

●●●

3.1.1. Szükséges és elégséges tétel határérték létezésére

Átviteli elv:

T

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \forall\, x_n \to x_0\text{-ra } f(x_n) \to A \\ x_n \in D_f \\ x_n \neq x_0 \end{array}$$

(P állítás) *(Q állítás)*

B 1. Szükségesség $(P \implies Q)$:
Teljesül: $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.
Be kell látni:

$$f(x_n) \to A, \text{ tehát } \forall\,\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, N(\varepsilon)\text{: } |f(x_n) - A| < \varepsilon, \text{ ha } n > N(\varepsilon)$$

Algoritmus:
$\varepsilon \to \delta(\varepsilon)$: $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$
$\delta(\varepsilon) \to N_1(\delta(\varepsilon))$: $|x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$, ha $n > N_1(\delta(\varepsilon))$
De ekkor $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, ha $n > N_1(\delta(\varepsilon)) \implies N(\varepsilon) := N_1(\delta(\varepsilon))$

2. Elégségesség $(Q \implies P$, ezzel ekvivalens $\neg P \implies \neg Q)$:
$\forall\, x_n \to x_0$-ra $f(x_n) \to A$.

Következik-e ebből, hogy $\forall\,\varepsilon > 0$-hoz $\exists\,\delta(\varepsilon)$:

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha } 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \ ?$$

Indirekt módon bizonyítunk.

Tfh. $\exists\,\varepsilon > 0$, melyhez nincs $\delta(\varepsilon)$. Tehát minden δ rossz. Pl. $\delta = \dfrac{1}{m}$ $(m \in \mathbb{N}^+)$ is rossz, tehát $\exists\, x_m$: $0 < |x_m - x_0| < \dfrac{1}{m}$, de $|f(x_m) - A| \geq \varepsilon$. De ekkor lenne olyan $x_m \to x_0$ pontsorozat, amelyre $f(x_m) \not\to A$ ↯ ■

Pl. Legyen $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, és $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Ekkor f-nek nincs határértéke a $x_0 = 0$-ban, még féloldali sem.

Megoldás. Csak a jobb oldali határérték létezését cáfoljuk. Legyen

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0+ .$$

Ekkor

$$f(x_n) = f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \sin(n\pi) = 0 \to 0,$$

vagyis az átviteli elv miatt csak 0 lehetne a jobb oldali határérték. (És így a határérték is.)

Legyen most

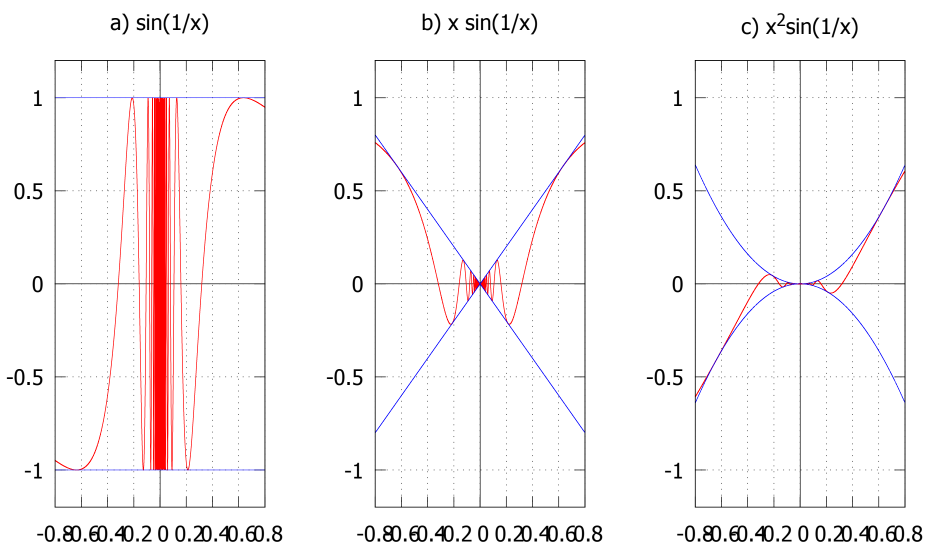
$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0+ .$$

Ekkor

$$f(x_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1 \neq 0,$$

így az átviteli elv miatt nem létezik jobb oldali határérték. (És így a határérték sem.)

3.3. ábra. A $\sin(1/x)$ függvény grafikonja



Pl. Ezzel szemben

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Megoldás. Csak az utóbbit bizonyítjuk. Legyen $f(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Ha $x_n \neq 0$ és $x_n \to 0$, akkor

$$-x_n^2 \leq f(x_n) \leq x_n^2$$

így a rendőrelv miatt $f(x_n) \to 0$, ami az átviteli elv szerint adja az állítást.

(Másik indoklás: mivel $(0 \cdot \text{korlátos})$ alakú határértékről van szó, a tanult tétel miatt a függvény 0-hoz tart.)

3.1.2. Végesben vett határértékek

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \\[2ex] 2.\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)=A \\[2ex] 3.\ \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)=A \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall\varepsilon>0\text{-hoz } \exists\,\delta(\varepsilon)>0\text{:} \\ |f(x)-A|<\varepsilon,\text{ ha} \end{array} \left\{\begin{array}{l} 1.\ 0<|x-x_0|<\delta \\ \quad (x\in\dot{K}_{x_0,\delta}) \\[1ex] 2.\ 0<x-x_0<\delta \\ \quad (x_0<x<x_0+\delta) \\[1ex] 3.\ -\delta<x-x_0<0 \\ \quad (x_0-\delta<x<x_0) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \\[2ex] 2.\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=+\infty \\[2ex] 3.\ \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=+\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall\,\Omega>0\text{-hoz } \exists\,\delta(\Omega)>0\text{:} \\ f(x)>\Omega,\text{ ha} \end{array} \left\{\begin{array}{l} 1.\ 0<|x-x_0|<\delta \\ \quad (x\in\dot{K}_{x_0,\delta}) \\[1ex] 2.\ 0<x-x_0<\delta \\ \quad (x_0<x<x_0+\delta) \\[1ex] 3.\ -\delta<x-x_0<0 \\ \quad (x_0-\delta<x<x_0) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \\[2ex] 2.\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=-\infty \\[2ex] 3.\ \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=-\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall\,\Omega>0\text{-hoz } \exists\,\delta(\Omega)>0\text{:} \\ f(x)<-\Omega,\text{ ha} \end{array} \left\{\begin{array}{l} 1.\ 0<|x-x_0|<\delta \\ \quad (x\in\dot{K}_{x_0,\delta}) \\[1ex] 2.\ 0<x-x_0<\delta \\ \quad (x_0<x<x_0+\delta) \\[1ex] 3.\ -\delta<x-x_0<0 \\ \quad (x_0-\delta<x<x_0) \end{array}\right.$$

•••

Pl. $\boxed{\lim\limits_{x\to 3+0} \dfrac{1}{6-2x} = -\infty}$

Megoldás.

$$\frac{1}{6-2x}<-\Omega \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2x-6}>\Omega>0 \quad\Longrightarrow\quad 0<x-3<\frac{1}{2\Omega}=\delta(\Omega)$$

Pl. $\boxed{\lim\limits_{x\to 3-0} \dfrac{1}{6-2x} = +\infty}$

Megoldás.

$$\frac{1}{6-2x}=\frac{1}{2(3-x)}\underset{3-x>0}{>}\Omega \implies 2(3-x)<\frac{1}{\Omega} \implies 3-x<\frac{1}{2\Omega}=\delta(\Omega)$$

$$\left(-\delta(\Omega)=-\frac{1}{2\Omega}<x-3<0\right)$$

3.1.3. Végtelenben vett határértékek

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$	$\forall\,\varepsilon>0$-hoz $\exists\,P(\varepsilon)>0:$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$, ha $x>P(\varepsilon)$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$	$\forall\,\varepsilon>0$-hoz $\exists\,P(\varepsilon)>0:$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$, ha $x<-P(\varepsilon)$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$	$\forall\,\Omega>0$-hoz $\exists\,P(\Omega)>0:$	$f(x)>\Omega$, ha $x>P(\Omega)$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$	$\forall\,\Omega>0$-hoz $\exists\,P(\Omega)>0:$	$f(x)<-\Omega$, ha $x>P(\Omega)$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$	$\forall\,\Omega>0$-hoz $\exists\,P(\Omega)>0:$	$f(x)>\Omega$, ha $x<-P(\Omega)$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	$\forall\,\Omega>0$-hoz $\exists\,P(\Omega)>0:$	$f(x)<-\Omega$, ha $x<-P(\Omega)$

M Az átviteli elv mindegyik típusra kiterjeszthető. A rendőrelv is alkalmazható.

•••

Pl. $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+3}{2x-1}=\frac{3}{2}}$

Megoldás. $|f(x)-A|<\varepsilon$, ha $x<-P(\varepsilon)$

$$\left|\frac{3x+3}{2x-1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{6x+6-(6x-3)}{4x-2}\right|=\frac{9}{|4x-2|}<\varepsilon \implies |4x-2|>\frac{9}{\varepsilon}$$

$$x<0 \text{ miatt } -(4x-2)>\frac{9}{\varepsilon} \implies -4x>\frac{9}{\varepsilon}-2 \implies x<-\frac{\frac{9}{\varepsilon}-2}{4}=-P(\varepsilon)$$

Pl. $\boxed{f(x) = \{x\} \qquad \lim\limits_{x\to\infty} \{x\} \nexists}$

Megoldás. $x_n^{(1)} = n \to \infty \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad f(x_n^{(1)}) = 0 \to 0$

$$x_n^{(2)} = n + \frac{1}{2} \to \infty \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad f(x_n^{(2)}) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0$$

Pl. $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\{x\}}{x^2+1} = 0}$

Megoldás. A rendőrelv segítségével:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & \dfrac{\{x\}}{x^2+1} & \leq & \dfrac{1}{x^2+1} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\{x\}}{x^2+1} \to 0, \text{ ha } x \to \pm\infty.$$

●●●

3.1.4. Feladatok

1. A megfelelő definícióval mutassa meg, hogy

   a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (3x^2+1) = \infty$

   b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-3}{2x+4} = \dfrac{1}{2}$

   c) $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} \dfrac{1}{(x-2)^3} = \pm\infty$

   d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{(x-1)^2} = 0$

   e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2}{1+x^2} = 3$

   f) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2+3x+5} = \infty$

2. Mutassa meg, hogy az alábbi határértékek nem léteznek!

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$

   b) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x^2$

c) $\lim_{x\to\infty} [\sin^2 x]$

d) $\lim_{x\to 2} f(x)$, ha $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \text{ rac.} \\ -x^2, & \text{ha } x \text{ irrac.} \end{cases}$

●●●

3.2. Folytonosság

x_0: az értelmezési tartomány belső pontja ($\exists\, K_{x_0} \subset D_f$)

D f folytonos x_0-ban, ha $\exists\, f(x_0)$ és $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ ha } |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

Ezzel egyenértékű:

$$f \text{ folytonos } x_0\text{-ban, ha } \exists\, f(x_0),\ \exists \lim_{x\to x_0} f(x) \text{ és } \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \left(= f(\lim_{x\to x_0} x)\right)$$

(Tehát a folytonossági helyeken a határátmenet és a függvényművelet felcserélhető.)

Jobbról folytonos f x_0-ban, ha : $f(x_0) = f(x_0 + 0)$

Balról folytonos f x_0-ban, ha : $f(x_0) = f(x_0 - 0)$

3.2.1. Szakadási helyek osztályozása

Ha az értelmezési tartomány belső pontjában f nem folytonos, akkor a szakadás lehet:

1. Elsőfajú szakadás

   a) megszüntethető szakadás: $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ (véges), de $\neq f(x_0)$ vagy $\nexists f(x_0)$

   b) véges ugrás: $\exists$ a véges $f(x_0 + 0)$ és $f(x_0 - 0)$, de $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$

2. Másodfajú szakadás (lényeges szakadás): minden más szakadási hely

3.3. Műveletek függvények körében

$$(cf)(x) := c \cdot f(x) \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x) \neq 0)$$

$$(f \circ g)(x) := f(g(x))$$

Pl. $f(x) = x^2; \quad g(x) = \sin x \qquad (f \circ g)(x) = \sin^2 x; \quad (g \circ f)(x) = \sin x^2$

A határértékekre vonatkozó tételek:

T *Ha* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ *és* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \in \mathbb{R}$, *akkor*

$$\exists \lim_{x\to x_0} (cf)(x) = c \cdot A \quad \left(= c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)\right)$$

$$\exists \lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = A + B$$

$$\exists \lim_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) \left(= \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x)\right) = A \cdot B$$

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{A}{B}, \quad \textit{ha } B \neq 0$$

B A számsorozatokra vonatkozó hasonló tételek alapján. Pl. az összegre:
A feltételek miatt:
$\forall\, x_n \to x_0 \quad (x_n \neq x_0, x_n \in D_f)$ sorozatra $f(x_n) \to A, \quad g(x_n) \to B$
$\implies \quad \forall$ ilyen $x_n \to x_0$-ra: $(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to A + B\,.$ Stb. ■

M A tételek kiterjeszthetők minden határérték fajtára a számsorozatokhoz hasonlóan. Ugyanazok a határozatlan alakok is.

•••

[2]lásd Thomas 02-es bemutató 6. fejezet (75-94. oldal).
[3]lásd Thomas 01-es bemutató 5. fejezet (70-87. oldal).
[4]lásd Thomas 02-es bemutató 2. fejezet (14-24. oldal).

Pl. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)^2}{x-1} = ?$

Megoldás. $\displaystyle\cdots = \lim_{x\to 1} \underbrace{(x-1)}_{\substack{\downarrow\\ 0}} \underbrace{\frac{x-1}{x-1}}_{\substack{\downarrow\\ 1}} \underbrace{(x+1)^2}_{\substack{\downarrow\\ 4}} = 0$

Pl. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{(x^2-9)^2} = ?$

Megoldás. $\displaystyle\cdots = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3}\frac{x-3}{x-3}\frac{x-2}{(x+3)^2}$

$$\lim_{x\to 3+0} \underbrace{\frac{1}{x-3}}_{\substack{\downarrow\\ +\infty}} \underbrace{\frac{x-3}{x-3}}_{\substack{\downarrow\\ 1}} \underbrace{\frac{x-2}{(x+3)^2}}_{\substack{\downarrow\\ \frac{3-2}{6^2}}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3-0} \underbrace{\frac{1}{x-3}}_{\substack{\downarrow\\ -\infty}} \underbrace{\frac{x-3}{x-3}}_{\substack{\downarrow\\ 1}} \underbrace{\frac{x-2}{(x+3)^2}}_{\substack{\downarrow\\ \frac{3-2}{6^2}}} = -\infty$$

Pl. $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^2-5x+6}{(x^2-9)^2} = ?$

Megoldás. $\displaystyle\cdots = \underset{\frac{30}{+0}}{=} +\infty$

Pl. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{4+x}-2} = ?$

Megoldás. $\displaystyle\cdots = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{4+x}-2} \cdot \frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x}\left(\sqrt{4+x}+2\right) = 4$

Pl. $\displaystyle\lim_{x\to \pm\infty} \frac{8+x}{3x^2+6} = ?$

Megoldás. $\cdots = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \underbrace{\frac{x}{3x^2}}_{=\frac{1}{3x}\to 0} \underbrace{\frac{1+\frac{8}{x}}{1+\frac{2}{x^2}}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} = 0$

Pl. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+1}{6+3x^2} = ?$

Megoldás. $\cdots = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \underbrace{\frac{x^2}{3x^2}}_{=\frac{1}{3}} \underbrace{\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} = \frac{1}{3}$

Pl. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{9-2x^2}{3x+6} = ?$

Megoldás. $\cdots = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \underbrace{\frac{-2x^2}{3x}}_{\substack{= -\frac{2}{3}x \\ \downarrow \\ \mp\infty}} \underbrace{\frac{1-\frac{9}{2x^2}}{1+\frac{2}{x}}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} = \mp\infty$

Pl. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (-x^9+6x^5+2x^2+3) = ?$

Megoldás. $\cdots = \lim\limits_{x\to\pm\infty} -x^9 \underbrace{\left(1-\frac{6}{x^4}-\frac{2}{x^7}-\frac{3}{x^9}\right)}_{\substack{\downarrow \\ 1}} = \mp\infty$

Pl. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+8}-\sqrt{x^2+6x}\right) = ?$

Megoldás. $\cdots = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+8-(x^2+6x)}{\sqrt{x^2+3x+8}+\sqrt{x^2+6x}} =$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{\frac{-3x}{\sqrt{x^2}}}_{=\frac{-3x}{|x|}=\frac{-3x}{\pm x}} \frac{1-\frac{8}{3x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{6}{x}}} = (\mp 3)\cdot\frac{1}{1+1} = \mp\frac{3}{2}$$

A folytonosságra vonatkozó tételek:

Beláthatók a következő tételek:

Ⓣ *Ha f és g folytonos x_0-ban, akkor*
$c \cdot f$, $f + g$, $f \cdot g$ *és* $g(x_0) \neq 0$ *esetén* $\dfrac{f}{g}$ *is folytonos* x_0 *-ban.*

Ⓣ *Ha g folytonos x_0 -ban és f folytonos $g(x_0)$ -ban, akkor $f \circ g$ folytonos x_0 -ban.*

3.4. Racionális függvények

3.4.1. Polinomok (racionális egészfüggvények)

Ⓓ n -edfokú polinomnak nevezzük a

$$P_n(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0\ , \quad a_i \in \mathbb{R}\ (i = 0, 1, \ldots, n).$$

függvényt.

Ⓣ

$$x\ , \quad x^2\ , \quad x^n\ , \quad P_n(x) = a_n\, x^n\ +\ \cdots\ +\ a_0$$

mindenütt folytonos.

Ⓑ A folytonosság definíciója:

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz}\ \ \exists\, \delta(\varepsilon): \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ ,\ \text{ha}\ \ |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

a) $f_1(x) := x$:

$$|f_1(x) - f_1(x_0)|\ =\ |x - x_0| < \varepsilon\ \Longrightarrow\ \delta(\varepsilon) = \varepsilon$$

b) $f_2(x) := x^2$:
Az alábbi bizonyításnál leszűkítjük a vizsgálatot az x_0 pont 1 sugarú környezetére.
Ez a $-x_0$ pont $r = 2\,|x_0| + 1$ sugarú környezete.
Tehát fennáll, hogy

$$|x + x_0|\ =\ |x - (-x_0)| < r = 2\,|x_0| + 1$$

Így

$$|f_2(x) - f_2(x_0)|\ =\ \left|x^2 - x_0^2\right|\ =\ |x - x_0| \cdot |x + x_0| < |x - x_0|\ \ (2\,|x_0| + 1) < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1} \Longrightarrow \delta(\varepsilon) = \min\{\frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}, 1\}$$

Ez a $\delta(\varepsilon)$ minden ε-ra megfelel, de most értéke függ x_0-tól is.

c) $f_n(x) := x^n$: teljes indukcióval látjuk be a függvény folytonosságát.
(A definícióval is dolgozhatnánk, de úgy kissé nehéz a bizonyítás.)

1.) $n = 1$-re igaz az állítás, hiszen már beláttuk, hogy $f_1(x) = x$ folytonos.

2.) Tegyük fel, hogy $(n-1)$-re igaz az állítás, tehát $f_{n-1}(x) = x^{n-1}$ folytonos.

3.) Igaz-e az állítás n-re?

Mivel $f_n(x) = x^n = x^{n-1} \cdot x = f_{n-1}(x) \cdot x$, így folytonos, mert két folytonos függvény szorzata.
Tehát a teljes indukció értelmében valóban $f_n(x)$ $\forall n$- re folytonos.

d) $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ n- edfokú polinom (racionális egész függvény), ahol $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.
A polinomok mindenütt folytonosak, hiszen véges sok folytonos függvény szorzásával és összeadásával állnak elő.

■

Néhány megjegyzés az n-edfokú polinomokról:

- x_0 a polinom gyöke, ha $P_n(x_0) = 0$.
  Ekkor a polinom felírható a következő alakban:
  $$P_n(x) = (x - x_0) \cdot P_{n-1}(x),$$
  tehát a polinomból kiemelhető az $(x - x_0)$ gyöktényező.

- Egy n-edfokú polinomnak pontosan n darab gyöke van, de lehetnek többszörös gyökei és komplex gyökei is. Ha a polinom valós együtthatójú, akkor a komplex gyökök csak konjugált párban fordulhatnak elő. Ha a konjugált komplex gyökökhöz tartozó gyöktényezőket összeszorozzuk, akkor egy valós együtthatójú másodfokú gyöktényezőt kapunk.
  Tehát a valós együtthatójú polinomok mindig felírhatók valós együtthatójú első- és másodfokú gyöktényezők szorzataként.
  Például:
  $$P_{11}(x) = \underbrace{x^3}_{=(x-0)^3} \cdot (x-1)^2 \cdot (x^2+1) \cdot (x^2+4)^2$$
  Ennek a polinomnak $x = 0$ háromszoros gyöke (a gyök multiplicitása 3), $x = 1$ kétszeres gyöke.

A további gyökök már komplexek:
$+i$ és $-i$: az (x^2+1) gyökei,
$+2i$, $+2i$, $-2i$, $-2i$ (két darab kétszeres gyök) : az $(x^2+4)^2$ gyökei.

3.4.2. Racionális törtfüggvény

(D)

$$f(x) := \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \qquad (P_n(x):\ n-\text{edfokú},\ Q_m(x):\ m-\text{edfokú polinom})$$

Valódi törtfüggvény, ha $n<m$, egyébként áltört. Az áltört polinomosztás segítségével mindig felírható egy polinom és egy valódi racionális törtfüggvény összegeként. Mivel a polinomok mindenütt folytonosak, a racionális törtfüggvény is mindenütt folytonos, kivéve a nevezőben levő polinom valós gyökeit, ahol a törtfüggvény nincs értelmezve.

Például:

$$f(x)=\frac{x^4+1}{(x+2)^2\,(x^2+2)}$$

A függvény az $x=-2$ pont kivételével mindenütt folytonos.
$(x^2+2\ \geq\ 0+2=2$, tehát ennek nincs valós gyöke.)

3.5. Példák és feladatok

(Pl.) Milyen szakadása van $x=1$-ben az alábbi függvénynek?

$$f(x)=\frac{x^4-5x^2+4}{x^4-2x^3+10x^2-18x+9}$$

Megoldás. $x^4-5x^2+4=(x^2-1)(x^2-4)=(x-1)(x+1)(x^2-4)$
A nevezőnek is gyöke $x=1$, ezért kiemelhető belőle $(x-1)$.

$$(x^4-2x^3+10x^2-18x+9):(x-1)=x^3-x^2+9x-9$$

A hányadosnak még mindig gyöke $x=1$, így: $(x^3-x^2+9x-9):(x-1)=x^2+9$.
Tehát $x\to 1$-re

$$f(x)=\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\substack{\downarrow\\ \pm\infty}}\ \underbrace{\frac{x-1}{x-1}}_{\equiv 1}\ \underbrace{\frac{(x+1)(x^2-4)}{x^2+9}}_{\substack{\downarrow\\ -\frac{3}{5}}}$$

$\lim_{x\to 1\pm 0} f(x) = \mp\infty \ : \quad x = 1$ másodfajú szakadás

Pl. Hol és milyen szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x+2|} + \dfrac{1}{x+2}, & \text{ha } x \le -1 \\[2ex] \dfrac{-x^3+x^2+4x-4}{1-x^2}, & \text{ha } x > -1 \end{cases}$$

Megoldás. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

$x = -2$:

Ha $x < -2$: $f(x) = \dfrac{1}{-(x+2)} + \dfrac{1}{x+2} \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad f(-2-0) = 0.$

Ha $-2 < x \le -1$: $f(x) = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{2}{x+2} \quad \Longrightarrow \quad f(-2+0) = +\infty.$

Így $x = -2$ lényeges (másodfajú) szakadás.

Ha $x > -1$: $f(x) = \dfrac{x^2(-x+1)+4(x-1)}{(1-x)\,(1+x)} = \dfrac{1-x}{1-x}\,\dfrac{x^2-4}{1+x}$

$x = 1$:

$f(1+0) = f(1-0) = -\dfrac{3}{2}$: $x = 1$ megszüntethető szakadás ($\nexists f(1)$)

$x = -1$:

$f(-1-0) = f(-1) = 2$

$$f(-1+0) = \lim_{x\to -1+0} \frac{1-x}{1-x}\,\underbrace{(x^2-4)}_{\downarrow \atop -3}\,\underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\downarrow \atop +\infty} = -\infty$$

Tehát $x = -1$ másodfajú szakadás.

Feladatok

1. a) $\lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+ax+1}\right) = ?$ $\qquad a \in \mathbb{R}, a \ge 0$

   b) $\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt[4]{x^4+ax^2+2} - \sqrt[4]{x^4+bx^2+1}\right) = ?$ $\qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

2. a) $\lim_{x\to 0\pm} \dfrac{x}{\{x\}} = ?$

   b) $\lim_{x\to 2\pm} \dfrac{x}{\{x\}} = ?$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\{\pi x\}}{\{x\}} = ?$

3. $\lim\limits_{x\to 2\pm} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x+4}} + \dfrac{1}{x-2} \right) = ?$

4. a) $\lim\limits_{x\to -1+} \dfrac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}} = ?$

b) $\lim\limits_{x\to -1+} \dfrac{\sqrt[3]{2x+1}+1}{\sqrt{3x+4}-1} = ?$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{-x}}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{-x}} = ?$

d) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4} = ?$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-\sqrt[6]{x-1}}{1-\sqrt[4]{x-1}} = ?$ (Próbálkozzon $u = \sqrt[12]{x-1}$ helyettesítéssel!)

5. Milyen típusú szakadásai vannak az

$$\frac{x^2-x-20}{|x^2-12x+35|\,(x+4)}$$

függvénynek?

6. Milyen típusú szakadása van $x=-1$-ben f-nek?

$$f(x) = \frac{x^4+2x^2-3}{x^4+2x^3-3x^2-8x-4}$$

7. Hol és milyen típusú szakadása van f-nek?

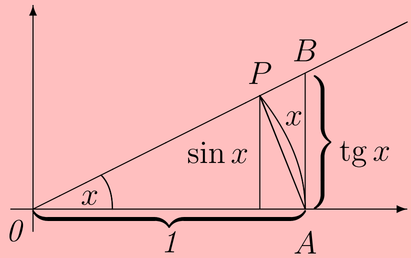
$$f(x) = \frac{(x^2+2x-8)\,(x+4)}{|x^2+3x-10|\,(x^2+5x+4)}$$

3.6. Egy nevezetes határérték

T *A* $\sin(x)$ *és* $\cos(x)$ *függvények mindenütt folytonosak.* $(\neg B)$

(A következő határérték számolása közben felhasználjuk a sin és cos függvények folytonosságát.)

T $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$



B Mivel $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ páros, elég $f(+0)$-val foglalkozni.

Legyen $0<x<\dfrac{\pi}{2}$:

$$T_{POA\triangle}<T_{POA\triangleleft}<T_{OAB\triangle}$$

$$\frac{1\cdot\sin x}{2}<\frac{1^2\cdot x}{2}<\frac{1\cdot\operatorname{tg} x}{2}$$

Mindkét oldalt $\dfrac{2}{\sin x}>0$-val megszorozva:

$$\underset{\displaystyle 1}{\underset{\displaystyle\downarrow}{1}}<\frac{x}{\sin x}<\underset{\displaystyle 1}{\underset{\displaystyle\downarrow}{\frac{1}{\cos x}}}$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{x}{\sin x}\xrightarrow[+0]{x}1\quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1=\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}$$ ■

M Tehát $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$-ben $\quad\sin x<x\quad\Longrightarrow\quad|\sin x|\le|x|\quad\forall\, x$-re.

Pl. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}=?$

Megoldás. $$\cdots=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{\substack{\downarrow\\ 1^2}}=\frac{2}{3}$$

Pl. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}=?$

Megoldás. $$\cdots=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}=\frac{3}{2}$$

Pl. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right) \operatorname{tg} x = ?$

Megoldás. $\cdots = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x} \cdot \underbrace{\sin x}_{\substack{\downarrow \\ 1}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x} \underset{u:=x-\frac{\pi}{2}}{=}$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{-u}{\cos\left(u+\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{u\to 0} \frac{-u}{-\sin u} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{\sin u}{u}} = \frac{1}{1} = 1$$

Feladatok

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = ?$
2. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\sin\sqrt[4]{x} \quad \sin\sqrt[4]{x^3}}{\sin \pi x} = ?$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = ?$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} x} = ?$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x} = ?$
6. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x} = ?$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = ?$
8. $\lim\limits_{x\to \infty} x^2 \left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right) = ?$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2} = ?$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos 2x}-1}{\sin^2 3x} = ?$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\sqrt{x^2+1}-1} = ?$
12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x} = ?$
13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3} = ?$
14. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x} = ?$
15. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{\pi - x} = ?$
16. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{5}} \dfrac{1-\cos 5x}{5x-\pi} = ?$
17. Hol és milyen típusú szakadása van az

$$f(x) = \frac{(x^2+3x+2)\ \sin|2-x|}{x^2-4}$$

függvénynek?

18. Hol és milyen típusú szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x+3|} + \dfrac{1}{x+3}, & \text{ha } x \leq 0 \\[2ex] \dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x}, & \text{ha } 0 < x < 1 \end{cases}$$

•••

3.7. Folytonos függvények tulajdonságai

Néhány definíció:

(D) f folytonos (a,b)-n, ha $\forall\, x \in (a,b)$ -ben folytonos.

(D) f folytonos $[a,b]$-n, ha folytonos (a,b)-n és a-ban jobbról, b-ben balról folytonos.

(D) $b \in H$ belső pont, ha $\exists\, K_b :\ K_b \subset H$

(D) h határpont, ha $\forall\, K_h$-ra $K_h \cap H \neq \emptyset$ és $K_h \cap \overline{H} \neq \emptyset$

(D) k külső pont, ha $\exists\, K_k :\ K_k \cap H = \emptyset$

(D) Nyílt halmaz: minden pontja belső pont

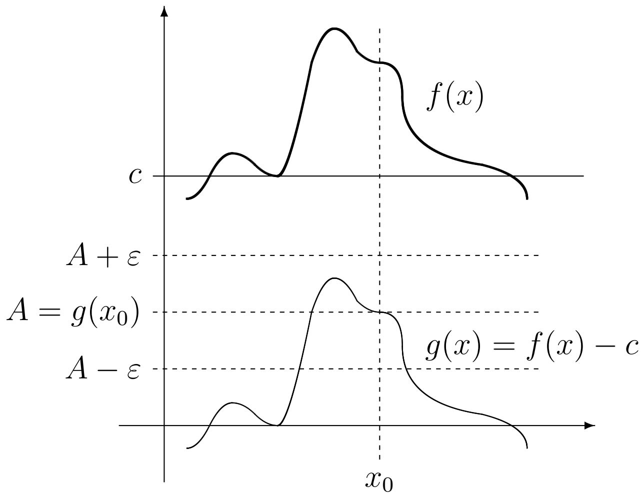
(D) Zárt halmaz: a nyílt halmaz komplementere

(D) **Kompakt halmaz** $\mathbb{R}$-ben: korlátos és zárt halmaz ($\mathbb{R}^n$-ben is érvényes a definíció)

(T) *Ha f folytonos x_0-ban és $f(x_0) > c$, akkor $\exists\, \delta > 0 :\ f(x) > c$, ha $x \in K_{x_0,\delta}$.*

B

$g(x) := f(x) - c$
g is folytonos x_0-ban és $g(x_0) > 0$.
Bizonyítandó, hogy $\exists\, K_{x_0,\delta}$:
$g(x) > 0 \quad \forall\, x \in K_{x_0,\delta}$-ra.
$A := g(x_0)$. A folytonosság miatt:



$$|g(x) - g(x_0)| = |g(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha } |x - x_0| < \delta(\varepsilon).$$

$\varepsilon := \dfrac{A}{2} \longrightarrow \delta\left(\dfrac{A}{2}\right)$, hogy

$|g(x) - A| < \dfrac{A}{2}$, azaz $0 < \dfrac{A}{2} = A - \dfrac{A}{2} < g(x) \;\left(< A + \dfrac{A}{2}\right)$, ha $|x - x_0| < \delta\left(\dfrac{A}{2}\right)$.

Tehát itt $g(x) > \dfrac{A}{2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = g(x) + c > c + \dfrac{A}{2} > c.$ ■

3.7.1. Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

T ***Bolzano tétel:***
Ha f folytonos $[a,b]$-ben, akkor minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső c értéket felvesz $[a,b]$-ben.

B Csak $f(a) < c < f(b)$ esetre bizonyítunk, azaz belátjuk, hogy létezik $\xi \in (a,b)$, amire $f(\xi) = c$.

1. lépés:

Ha $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > c \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a,\ b_1 = \dfrac{a+b}{2},\ I_1 = [a_1, b_1]$

Ha $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < c \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \dfrac{a+b}{2},\ b_1 = b,\ I_1 = [a_1, b_1]$

Ha $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = c \quad \Longrightarrow \quad \xi = \dfrac{a+b}{2}$. Ekkor vége az eljárásnak. Egyébként

$$f(a_1) < c < f(b_1), \quad [a,b] \supset I_1, \quad |a_1 - b_1| = \frac{|a-b|}{2}$$

2. lépés: Megismételjük az eljárást I_1-re, így kapunk egy $I_2 = [a_2, b_2]$ intervallumot:

$f(a_2) < c < f(b_2), \quad [a,b] \supset I_1 \supset I_2, \quad |a_2 - b_2| = \dfrac{|a-b|}{4}$, vagy megkaptuk ξ értékét.
Ha ξ-t nem kaptuk meg, folytatjuk az eljárást.

$\vdots$

n. lépés:
$f(a_n) < c < f(b_n), \quad [a,b] \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n$
A Cantor-axióma szerint: $\exists\, \xi \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, és $|a_n - b_n| = \dfrac{|a-b|}{2^n} \xrightarrow[\infty]{n} 0$

$$0 \le |a_n - \xi| \le \underbrace{|a_n - b_n|}_{\downarrow\, 0} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \xi \qquad \text{(rendőrelv)}$$

$$0 \le |b_n - \xi| \le \underbrace{|a_n - b_n|}_{\downarrow\, 0} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \xi \qquad \text{(rendőrelv)}$$

f folytonossága és az átviteli elv alapján:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Másrészt a sorozatok határértékére vonatkozó egyenlőtlenségek alkalmazásával kapjuk:
$f(a_n) < c \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \le c$
$f(b_n) > c \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \ge c$
Tehát $f(\xi) \le c$ és $f(\xi) \ge c$, ami azt jelenti, hogy $f(\xi) = c$. ■

K$_1$ *Ha f folytonos $[a,b]$-ben és $f(a)\,f(b) < 0$, vagyis $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelű, akkor az $f(x) = 0$ egyenletnek legalább egy gyöke van (a,b)-ben.*

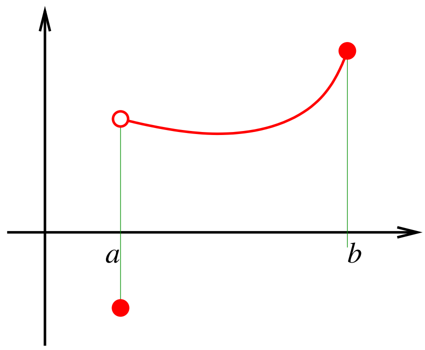
Mivel $c = 0$ az $f(a)$ és $f(b)$ függvényértékek közé esik, a Bolzano tétel értelmében $\exists\, \xi \in (a,b)$, hogy $f(\xi) = 0$, tehát ξ gyöke az egyenletnek.

K$_2$ *Páratlan fokszámú polinomnak legalább egy valós gyöke van.*

B Legyen $f(x) = a_{2k+1}\, x^{2k+1} + a_{2k}\, x^{2k} + \cdots + a_1\, x + a_0$, legyen $a_{2k+1} > 0$.
$\Longrightarrow \quad (\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, ezért $\exists\, \beta:\ f(\beta) > 1\ )$
és $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, ezért $\exists\, \alpha:\ f(\alpha) < -1)$.
A polinomok folytonosak mindenütt, tehát $[\alpha,\beta]$-ban is és $f(\alpha)\,f(\beta) < 0$.
Így az 1. következmény szerint $\exists\, \xi \in (\alpha,\beta):\ f(\xi) = 0$. ■

M Megjegyezzük, hogy ha a Bolzano tétel feltételei közül akár az intervallum korlátosságát, akár a zártságát elhagyjuk, akkor a tétel érvényét veszti. A 3.4 ábrán látható függvény például az $(a, b]$ intervallumon folytonos, $f(a)$ és $f(b)$ ellentétes előjelű, mégsem veszi föl a függvény a zérus értéket az (a, b) intervallumon. (A függvény az a pontban *nem* folytonos.

3.4. ábra. Az a pontban nem folytonos függvényre nem teljesül a Bolzano tétel



3.7.2. Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai

T ***Weierstrass I. tétele***
Ha f folytonos az $[a, b]$ (korlátos és zárt) intervallumon, akkor ott f korlátos.

B Indirekt:
Tfh. nem korlátos pl. felülről, tehát $\nexists K: \ f(x) \le K$ teljesüljön $\forall\, x \in [a, b]$-re.

$$\text{Ekkor}\quad \begin{array}{lll} \exists\, x_1: & x_1 \in [a,b], & f(x_1) > 1 \\ \exists\, x_2: & x_2 \in [a,b], & f(x_2) > 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \exists\, x_n: & x_n \in [a,b], & f(x_n) > n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

(x_n) sorozat korlátos $(\forall\, x_n \in [a, b])$ $\overset{\text{B.W. kiv. t.}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ konv. részsorozat: $(x_{n_i}) \to x_0$.
Mivel $a \le x_{n_i} \le b$ mindig fennáll, ezért $a \le \lim_{n_i \to \infty} x_{n_i} = x_0 \le b$. Tehát $x_{n_i} \to x_0 \in [a, b]$, de $f(x_{n_i}) \to \infty$ $\lightning$ f folytonos x_0-ban, ezért $f(x_{n_i}) \to f(x_0)$. ■

T ***Weierstrass II. tétele:***
Ha f folytonos $[a, b]$-ben, akkor ott felveszi az infimumát, ill. szuprémumát, tehát van minimuma és maximuma. Vagyis $\exists\, \alpha, \beta \in [a, b]$, hogy

$$f(\alpha) = \sup\{f(x) :\ x \in [a,b]\} \qquad \left(= \max_{x\in[a,b]}\{f(x)\} = \max f([a,b])\right)$$
$$f(\beta) = \inf\{f(x) :\ x \in [a,b]\} \qquad \left(= \min_{x\in[a,b]}\{f(x)\} = \min f([a,b])\right)$$

B $A := f([a,b])$.

Weierstrass I. tétele értelmében A korlátos $\overset{\text{Dedekind}}{\Longrightarrow}$ $\exists\ \sup A := M;\ \inf A := m$.
Megmutatjuk, hogy $\exists\ \alpha, \beta \in [a,b] :\ f(\alpha) = M,\ f(\beta) = m$.
Bizonyítás $f(\alpha) = M$-re: indirekt. (Hasonlóan lehetne $f(\beta) = m$-re.)
Tfh. $\nexists\,\alpha \in [a,b] :\ f(\alpha) = M \quad \Longrightarrow \quad M - f(x) > 0$, ha $x \in [a,b]$
$\Longrightarrow\ g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ folytonos $[a,b]$-ben $\overset{\text{W. I. t.}}{\Longrightarrow}$ g korlátos $[a,b]$-ben, tehát $\exists\,K$:

$$\frac{1}{M - f(x)} < K, \quad x \in [a,b] \qquad \left(K > 0,\ \frac{1}{M - f(x)} > 0\right)$$

$$M - f(x) > \frac{1}{K}$$

$$f(x) < \underbrace{M - \frac{1}{K}}_{\text{felső korlát}} < M \text{ (legkisebb felső korlát)} \quad ↯$$

■

M Weierstrass tételeiből sem a függvény folytonossága. sem a halmaz kompaktsága nem hagyható el.

Tekintsük például a 3.5 ábrán látható függvényt:

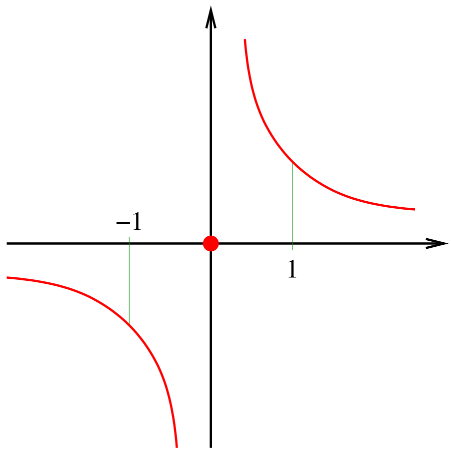
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}.$$

Ha f-et a $(0,1]$ nem zárt intervallumon vizsgáljuk, akkor ott se nem korlátos se nem veszi fel szuprémumát, bár folytonos.

Ugyanígy, ha a $[-1,+1]$ intervallumon vizsgáljuk, akkor sem korlátos, és nem veszi fel szuprémumát (és infimumát sem), bár most az intervallum kompakt, de f nem folytonos.

Végül jegyezzük meg, hogy ha f-et az $[1,\infty)$ nem korlátos (zárt) intervallumon vizsgáljuk, akkor szintén nem veszi fel infimumát.

3.5. ábra. Az $f(x)$ függvény grafikonja



3.7.3. Egyenletes folytonosság

Pl. $f(x) = x^2 + 2$

1. Mutassuk meg, hogy $\forall\, x_0 \in [1,2]$-ben folytonos a függvény!
2. Megadható-e közös $\delta(\varepsilon)$? (Létezik-e $\inf\limits_{x_0\in[1,2]} \delta(\varepsilon, x_0) > 0$?)

Megoldás. 1. $|f(x)-f(x_0)| = |x^2+2-(x_0^2+2)| = |x-x_0||x+x_0| < |x-x_0|(2|x_0|+1) < \varepsilon$

$$|x-x_0| < \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1} = \delta(\varepsilon, x_0)$$

2. $\delta(\varepsilon, x_0) = \dfrac{\varepsilon}{2|x_0|+1} \underset{x_0\,\in\,[1,2]}{\geq} \dfrac{\varepsilon}{2\cdot 2+1} = \dfrac{\varepsilon}{5} = \delta(\varepsilon, 2)$ a közös $\delta(\varepsilon)$

D Az f függvény egyenletesen folytonos az A halmazon, ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon)$ (A-ban közös):

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\,, \quad \text{ha} \quad |x_1 - x_2| < \delta; \quad x_1, x_2 \in A$$

M$_1$ Tehát $\exists \inf\limits_{x\in A} \delta(\varepsilon, x) > 0$

M$_2$ Az A halmaz általában intervallum szokott lenni.

Pl. $f(x) = x^2 + 2$

1. Egyenletesen folytonos-e f az $[1, 2]$ intervallumon?
2. Egyenletesen folytonos-e f az $(1, 2)$ intervallumon?
3. Egyenletesen folytonos-e f az $(1, \infty)$ intervallumon?

Megoldás. 1. Igen. $\delta(\varepsilon, 2)$ megfelel. (Lásd előző példa!)

2. Igen. $\delta(\varepsilon, 2)$ megfelel. (Ami a zárt intervallumhoz megfelel, az a nyílthoz is mindig jó.) Általánosságban is igaz, hogy ha f egyenletesen folytonos I-n (nyílt vagy zárt), akkor $I_1 \subset I$ esetén I_1-en is egyenletesen folytonos. Ugyanaz a δ megfelel.

3. f nem egyenletesen folytonos $(1, \infty)$-en.

   $x_n^{(1)} := n \to \infty\,,\quad x_n^{(2)} := n + \dfrac{1}{n} \to \infty\,,\quad x_n^{(2)} - x_n^{(1)} = \dfrac{1}{n} \to 0\,$; egymást tetszőlegesen megközelítik, ha n-et elegendően nagynak választjuk.

   Mégis

$$\left| f\left(x_n^{(2)}\right) - f\left(x_n^{(1)}\right) \right| = \left| \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 + 2 - (n^2 + 2) \right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2.$$

   Tehát, ha $\varepsilon < 2$, nincs közös δ.

Pl. $f(x) = x$ egyenletesen folytonos $(-\infty, \infty)$-en.

Megoldás.

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \delta(\varepsilon) = \varepsilon$$

Pl. $f(x) = \sin x$ egyenletesen folytonos $(-\infty, \infty)$-en.

Megoldás. Felhasználjuk, hogy

$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \sin\dfrac{\alpha - \beta}{2} \cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}$, , ill. $|\sin x| \le |x|$.

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sin x_1 - \sin x_2| = \left| 2 \sin\frac{x_1 - x_2}{2} \cos\frac{x_1 + x_2}{2} \right| \le$$

$$\le 2 \cdot \left| \sin\frac{x_1 - x_2}{2} \right| \cdot 1 \le 2 \frac{|x_1 - x_2|}{2} = |x_1 - x_2| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \delta(\varepsilon) = \varepsilon$$

(M) Ezzel persze azt is beláttuk, hogy $\sin x$ mindenütt folytonos.
És mivel $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, így $\cos x$ is mindenütt folytonos, mivel folytonos függvények összetétele.

(Pl.) $f(x) = \operatorname{tg} x$ egyenletesen folytonos $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$-on.

Megoldás.

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{\sin x_1}{\cos x_1} - \frac{\sin x_2}{\cos x_2}\right| = \left|\frac{\sin(x_1 - x_2)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2}\right| \le \frac{|x_1 - x_2|}{\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2} = 4|x_1 - x_2| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4}$$

(Pl.) $f(x) = \frac{1}{x}$ nem egyenletesen folytonos $(0,1)$-en.

Megoldás. $x_n^{(1)} := \frac{1}{n} \to 0, \quad x_n^{(2)} := \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad x_n^{(1)} - x_n^{(2)} \to 0.$
Ugyanakkor

$$\left|f(x_n^{(1)}) - f(x_n^{(2)})\right| = |n - (n+1)| = 1 \not< \varepsilon\,, \quad \text{ha } \varepsilon < 1$$

(Pl.) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ nem egyenletesen folytonos $(0,1)$-en.

Megoldás. $x_n^{(1)} := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 0, \quad x_n^{(2)} := \frac{1}{3\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 0$

$\left|f(x_n^{(1)}) - f(x_n^{(2)})\right| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) - \sin\left(3\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right| = |1 - (-1)| = 2 \not< \varepsilon$, ha $\varepsilon \le 2$.

(T) ***Heine tétele:***
Ha f folytonos az $[a,b]$ zárt intervallumon, akkor ott egyenletesen folytonos. $(\neg B)$

(T) *Ha f folytonos $[a,\infty)$ -en és $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ (véges), akkor f egyenletesen folytonos $[a,\infty)$-en.* $(\neg B)$

Pl. $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Egyenletesen folytonos-e $(1,10)$-en?

Megoldás. Mivel P_n folytonos $[1,10]$-en $\implies$ P_n itt egyenletesen folytonos $\implies$ P_n az $(1,10) \subset [1,10]$-en is egyenletesen folytonos.

Feladatok

1. $$f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$$

   a) Hol és milyen típusú szakadása van az f függvénynek?

   b) Van-e minimuma f-nek a $[-1,0]$ intervallumon?

2. $$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2} - \frac{1}{\cos x}$$

   a) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = ?$ $\quad \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-} f(x) = ?$

   b) Bizonyítsa be, hogy f-nek van gyöke $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$-ben!

3. Legyen f folytonos $(-\infty,\infty)$-en és $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -5$, $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$.

   Bizonyítsa be, hogy f korlátos $(-\infty,\infty)$-en! Van-e nullahelye f-nek?

4. a) Mikor mondjuk, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 5$?

   b) Bizonyítsa be, hogy ha f folytonos a $[2,\infty)$ intervallumon és

   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = 5, \qquad \sup_{x\in(2,\infty)} f(x) = 6,$$

   akkor f értékkészletében szerepel a 6.

5. Van-e gyöke az alábbi egyenletnek a $(0,\pi)$-ben?

   $$\frac{1}{x}(\cos^2 x + 1) + \frac{1}{x-\pi}(\sin^2 x + 1) = 0$$

6. $f(x) = 2x^3 - 3$

   a) Mutassa meg a határérték definíciója alapján, hogy $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 13$ $\;(\delta(\varepsilon) = ?)$

   b) Egyenletesen folytonos-e az f függvény az $(1,4)$ intervallumon?

   c) Egyenletesen folytonos-e az f függvény az $(1,\infty)$ intervallumon?

4. fejezet

Egyváltozós valós függvények differenciálása

4.1. Differenciálszámítás

Ⓓ **Differenciahányados (különbségi hányados):**

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \left(\frac{\text{függvényérték megváltozása}}{\text{független változó megváltozása}} = \text{húr iránytangense} \right)$$

$\Delta x \to 0$ esetén a húrok átmennek az érintőbe, ha létezik $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$ differenciálhányados (derivált) $=$ az érintő iránytangense.

Ⓓ Legyen $K_{x_0,\delta} \subset D_f$

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

f deriválható (differenciálható) x_0-ban, ha a fenti határérték létezik és véges. Ekkor $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ az f függvény x_0 pontbeli deriváltja (differenciálhányadosa).

Ⓓ Jobb oldali derivált: $f'_+(x_0)$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0+0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

f jobbról deriválható (jobbról differenciálható) x_0-ban, ha a fenti határérték létezik és véges.

D Bal oldali derivált: $f'_-(x_0)$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0-0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

f balról deriválható (balról differenciálható) x_0-ban, ha a fenti határérték létezik és véges.

M $f'(x_0)$ akkor és csak akkor létezik, ha $\exists\, f'_+(x_0)$ és $f'_-(x_0)$ és $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

D f deriválható (differenciálható) (a,b)-ben, ha f differenciálható x-ben $\forall\, x \in (a,b)$-re.

D f deriválható (differenciálható) $[a,b]$-ben, ha differenciálható (a,b)-ben és még $\exists\, f'_+(a), f'_-(b) \in \mathbb{R}$.

Pl. $f(x) = x^2, \qquad f'(5) = ?$

$$f'(5) = \lim_{h\to 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(5+h)^2-5^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{10h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(10+h) = 10.$$

Pl. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \qquad f'(3) = ?$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{3+h}-\frac{1}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3-(3+h)}{3h(3+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{3(3+h)} = -\frac{1}{9}.$$

Pl. $f(x) = \sqrt{x}, \qquad f'(4) = ?$

$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4+h-4}{h\left(\sqrt{4+h}+\sqrt{4}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{1}{4}.$$

Pl. $f(x) = |x|, \qquad f'(3) = ?, \qquad f'(-2) = ?, \qquad f'(0) = ?$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{|3+h|-|3|}{h} \overset{\text{ha } |h|<3}{=} \lim_{h\to 0} \frac{3+h-3}{h} = 1;$$
$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{|-2+h|-|-2|}{h} \overset{\text{ha } |h|<2}{=} \lim_{h\to 0} \frac{2-h-2}{h} = -1.$$

$$\left.\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h\to +0} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{h}{h} = 1 \\ f'_-(0) &= \lim_{h\to -0} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to -0} \frac{-h}{h} = -1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \nexists f'(0)$$

Az $f(x) = |x|$ függvény folytonos az origóban, de nem deriválható; ilyenkor azt mondjuk, hogy az origóban a függvénynek *törése* van.

Pl. $f(x) = x|x|, \qquad f'(0) = ?$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0} |h| = 0$$

Pl. $f(x) = \sqrt{4x+5}, \qquad f'(1) = ?$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4(1+h)+5}-\sqrt{4\cdot 1+5}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+4h}-\sqrt{9}}{h} \, \frac{\sqrt{9+4h}+\sqrt{9}}{\sqrt{9+4h}+\sqrt{9}} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{9+4h-9}{h\left(\sqrt{9+4h}+3\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{4}{\sqrt{9+4h}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

T ***Szükséges és elégséges tétel deriválhatóságra:***

f akkor és csak akkor differenciálható x_0-ban, ha $K_{x_0,\delta} \subset D_f$, $|h| < \delta$-ra:

$$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0) = A\cdot h + \varepsilon(h)\cdot h,$$

ahol A csak x_0-tól függhet, h-tól nem, és $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. (Itt $A = f'(x_0)$.)

B

1. Szükségesség:

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)+\varepsilon,$$

ahol $\varepsilon \to 0$, ha $h \to 0$. $\quad \Longrightarrow \quad (\Delta f =)\, f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)\cdot h + \varepsilon\cdot h.$

2. Elégségesség:
$f(x_0+h)-f(x_0) = A\cdot h + \varepsilon(h)\cdot h$ teljesül. Innen

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = A + \varepsilon(h) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = A \quad (= f'(x_0))$$

■

T *Ha f differenciálható x_0-ban, akkor ott folytonos.*

M Tehát a folytonosság szükséges feltétele a differenciálhatóságnak, de nem elégséges. Lásd $|x|$.

B A szükséges és elégséges tétel alapján:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + A\cdot h + \varepsilon(h)\cdot h$$ ■

Mindkét oldalon határértéket veszünk. $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$-ra jutunk, vagyis a határérték egyenlő a helyettesítési értékkel, tehát folytonos.

Pl. $f(x) = x^2 \qquad f'(x) = ?$

$$\Delta f = f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = 2x\cdot h + h\cdot h = A\cdot h + \varepsilon\cdot h$$

$A = f'(x) = 2x$ (független h-tól), $\quad \lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = \lim\limits_{h\to 0} h = 0$

4.1.1. Differenciál, érintő egyenes

Ha f differenciálható x_0-ban:

$$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)\cdot h}_{\text{főrész}} + \underbrace{\varepsilon(h)\cdot h}_{\text{elenyésző rész}}$$

D Az f függvény (elsőrendű) differenciálja az x_0 pontban h megváltozás mellett:
$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}f(x_0,h) := f'(x_0)\cdot h$$

M $\mathrm{d}f(x_0,h)$: a függvény x_0-beli érintő egyenesén a függvényérték megváltozása h lépésre. (4.1 ábra)

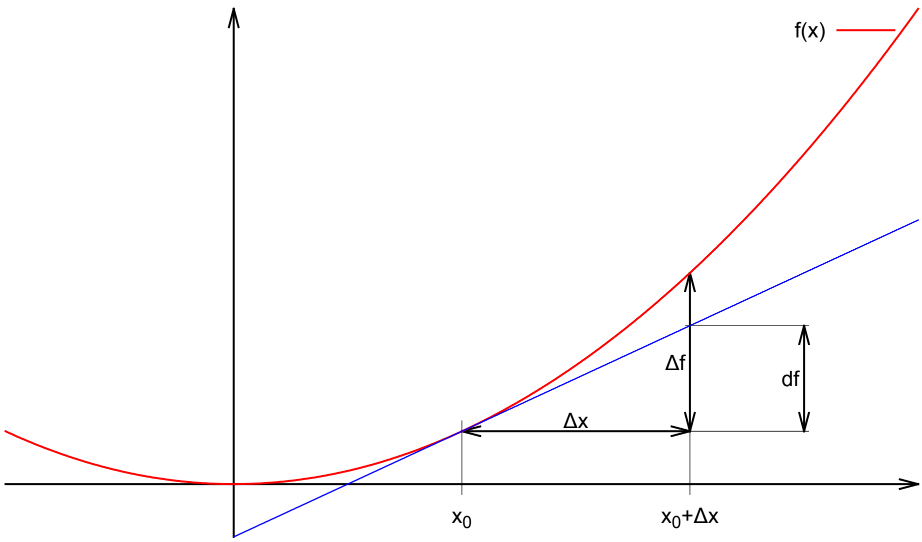
Egyéb jelölések:

$$\mathrm{d}f(x_0,\Delta x) = f'(x_0)\cdot\Delta x; \quad \mathrm{d}f = f'(x)\Delta x = f'(x)\cdot\mathrm{d}x$$

Pl. $f(x) = x^3$: $\mathrm{d}f = 3x^2\Delta x$, tehát $\mathrm{d}x^3 = 3x^2\Delta x$

Pl. $f(x) = x$: $\mathrm{d}f = 1\cdot\Delta x$, tehát $\mathrm{d}x = \Delta x$. Ez indokolja a differenciál legutolsó jelölését.

4.1. ábra. Egy függvény Δf megváltozása valamint df elsőrendű differenciálja az x_0 pontban, a Δx megváltozás mellett



Alkalmazása:

$\Delta f \approx \mathrm{d}f$:

$$f(\underbrace{x_0 + h}_{:=x}) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0, h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$$

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$:   az x_0 pontbeli érintő egyenes egyenlete.

4.1.2. Differenciálási szabályok

T *Ha f és g differenciálható x-ben, akkor itt $f + g$, $cf(c \in \mathbb{R})$, $f \cdot g$ is differenciálható valamint $g(x) \neq 0$ esetén $\dfrac{1}{g}$ és $\dfrac{f}{g}$ is differenciálható, és*

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
2. $(cf(x))' = cf'(x)$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

[1]konstansszoros deriváltja
[2]összeg deriváltja
[3]szorzat deriváltja
[4]összetett függvény deriváltja

4. $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$

5. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

B

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
   $z(x) := f(x) + g(x)$

$$z'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{z(x+h) - z(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = f'(x) + g'(x)$$

2. $(cf(x))' = c \cdot f'(x)$

$$(cf(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x)$$

3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\underset{\substack{\downarrow \\ f'(x)}}{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \; \underset{\substack{\downarrow \\ g(x)}}{g(x+h)} + \underset{\substack{\downarrow \\ f(x)}}{f(x)} \; \underset{\substack{\downarrow \\ g'(x)}}{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}} \right)$$

$\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$ (határérték = helyettesítési érték) oka:

g deriválható x-ben $\implies$ g folytonos x-ben

4. $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h\, g(x+h)g(x)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{\underset{\substack{\downarrow \\ g(x)}}{g(x+h)} \quad \underset{\substack{\downarrow \\ g(x)}}{g(x)}} \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\substack{\downarrow \\ g'(x)}} = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

$\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$: $\quad$ g folytonossága miatt

$(g(x) \neq 0$ és g folytonos x-ben (mivel deriválható) $\quad\Longrightarrow\quad \exists\, K_x:\ g(x)\neq 0$ (lásd a Bolzano tétel előtti segédtételt). Tehát elegendően kis h-ra $g(x+h)\neq 0$.)

5. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Ez már következik az előző két pontból:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' =$$

$$= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\frac{-g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

■

Láncszabály: összetett függvény deriválása

T₂ *Ha f differenciálható K_{x,δ_1}-ben és g differenciálható $K_{f(x),\delta_2}$-ben, akkor $g\circ f$ is differenciálható x-ben és*

$$((g\circ f)(x))' = (g(f(x)))' = g'(f(x))\cdot f'(x) \qquad (\neg B)$$

T₃ *Ha f folytonos $K_{x_0,\delta}$-ban, $x\in K_{x_0,\delta}\setminus\{x_0\}$ (tehát $x\in \dot K_{x_0,\delta}$) esetén $\exists\, f'(x)$ és $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = c$, akkor f differenciálható x_0-ban és $f'(x_0)=c$.* $\qquad (\neg B)$

Pl. $f(x) = (2x^2+3)\sqrt{x^2+5}$

$$f'(x) = (2x^2+3)'\sqrt{x^2+5} + (2x^2+3)\left(\sqrt{x^2+5}\right)' = 4x\sqrt{x^2+5} + (2x^2+3)\frac{1}{2\sqrt{x^2+5}}\cdot 2x$$

Pl. $f(x) = \dfrac{x^7+x^2+5}{\sqrt{x^4+2x^2+1}}$

$$f'(x) = \frac{(x^7+x^2+5)'\sqrt{x^4+2x^2+1} - (x^7+x^2+5)\left(\sqrt{x^4+2x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^4+2x^2+1}\right)^2} =$$

$$= \frac{(7x^6+2x)\sqrt{x^4+2x^2+1}-(x^7+x^2+5)\dfrac{1}{2\sqrt{x^4+2x^2+1}}\cdot(4x^3+4x)}{x^4+2x^2+1}$$

●●●

4.1.3. Magasabbrendű deriváltak

Ha az $f(x)$ függvény differenciálható az x_0 pont egy környezetében, akkor az $f'(x)$ derivált függvény x_0-beli differenciálhányadosa adja meg az $f(x)$ függvény x_0 pontban vett $f''(x_0)$ *második deriváltját*, azaz

$$f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}.$$

A második derivált egy adott x_0 pontban való létezéséhez tehát szükséges, hogy az első derivált függvény az x_0 pont egy kis környezetében létezzék.

Az $f(x)$ függvény ismételt deriválásával kapjuk a függvény további, harmadik, negyedik, stb. deriváltját. A magasabbrendű deriváltakat zárójelbe tett arab számmal, esetleg római számmal, vagy a differenciahányadosra utaló formális törttel jelöljük:

másodrendű derivált: $\quad f''(x_0) = f^{(2)}(x_0) = f^{\mathrm{II}}(x_0) = \dfrac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$

harmadrendű derivált: $\quad f'''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = f^{\mathrm{III}}(x_0) = \dfrac{d^3 f(x_0)}{dx^3}$

$\vdots \qquad \vdots$

ötödrendű derivált: $\quad f^{(5)}(x_0) = f^{\mathrm{V}}(x_0) = \dfrac{d^5 f(x_0)}{dx^5}$

$\vdots \qquad \vdots$

n-edrendű derivált: $\quad f^{(n)}(x_0) = \dfrac{d^n f(x_0)}{dx^n}.$

Fizikában idő szerinti deriváltat, illetve matematikában paraméter szerinti deriváltat szokás vessző helyett a függvény fölé tett ponttal is jelölni. Ha például az $x(t)$ függvény egy egyenesvonalú mozgás hely–idő függvénye, akkor az $x'(t) = \dot{x}(t)$ derivált függvény a mozgás sebesség–idő függvénye, és az $x''(t) = \ddot{x}(t)$ második derivált pedig a gyorsulás–idő függvény.

Pl. A következő függvény mindenütt deriválható, de második deriváltja az origóban nem létezik.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \qquad f'(x) = ? \qquad \lim_{x\to 0} f'(x) = ? \qquad f''(x) = ?$$

Ha $x \neq 0$, alkalmazhatjuk a deriválási szabályokat:

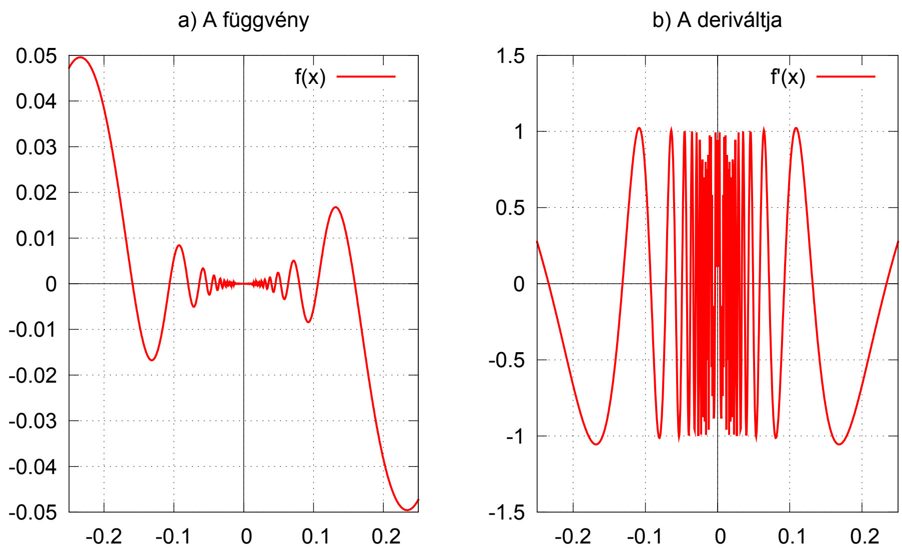
$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Ha $x = 0$, a definícióval dolgozunk:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{h}_{\to 0} \underbrace{\sin \frac{1}{h}}_{\text{korlátos}} = 0$$

Az $f(x)$ és az $f'(x)$ függvény grafikonját a 4.2. ábra mutatja.

4.2. ábra. Egy mindenütt deriválható függvény, melynek deriváltja az origóban szakad



Látható, hogy $f'(x)$-nek (másodfajú) szakadása van az origóban, tehát $\nexists f''(0)$. Ha $x \neq 0$, $f''(x)$ a deriválási szabályok ismételt alkalmazásával egyszerűen kiszámolható.

Érdekességképpen megemlítjük a következő tételt:

(T) *Intervallumon értelmezett deriváltfüggvénynek csak másodfajú szakadása lehet.*

A tételt nem bizonyítjuk.

4.1.4. Inverz függvény

D Az f függvény *invertálható* értelmezési tartományának egy $I \subset D_f$ részhalmazán, ha bármely két $x_1, x_2 \in I$ szám esetén az $f(x_1) = f(x_2)$ egyenlőség teljesülése maga után vonja, hogy $x_1 = x_2$, tehát ha az f függvény az I halmazon injektív (kölcsönösen egyértelmű vagy 1-1 értelmű). Ekkor bármely $y \in R_f$ szám esetén legfeljebb egyetlen olyan $x \in I$ szám létezik, melyre $f(x) = y$. Ezesetben azt mondjuk, hogy x az y szám f-inverze általi képe; $x = f^{-1}(y)$.

Az inverz függvény jelölése összekeverhető a mínusz első hatvánnyal, ezért ez utóbbit inkább $1/f$-el jelöljük. A számunkra fontos esetekben $I \subset D_f$ intervallum.

Az inverz függvény értelmezési tartománya, értékkészlete:

$$D_{f^{-1}} = f(I) = \big\{ y \in R_f \big| \exists x \in I : f(x) = y \big\}, \qquad R_{f^{-1}} = I \subset D_f.$$

A definícióból azonnal következik, hogy

$$\forall x \in I : \qquad f^{-1}\big(f(x)\big) = (f^{-1} \circ f)(x) = x, \qquad \text{és}$$
$$\forall y \in f(I) : \qquad f\big(f^{-1}(y)\big) = (f \circ f^{-1})(y) = y.$$

Igaz továbbá, hogy $(f^{-1})^{-1} = f|_I$, tehát egy függvény inverzének inverze megegyezik az eredeti függvény megszorításával arra a halmazra, amelyen az inverzet képeztük.

T *Ha f szigorúan monoton az $I \subset D_f$ halmazon, akkor itt invertálható.*

B Ha valamely $y \in R_f$ esetén létezne $x_1, x_2 \in I$, melyre $f(x_1) = f(x_2) = y$, és $x_1 \neq x_2$, akkor ellentmondásba kerülnénk a szigorú monotonitással. ■

Igaz továbbá, hogy f^{-1} pontosan akkor szigorúan monoton nővő, ill. csökkenő, ha f szigorúan monoton növő, ill. csökkenő I-n.

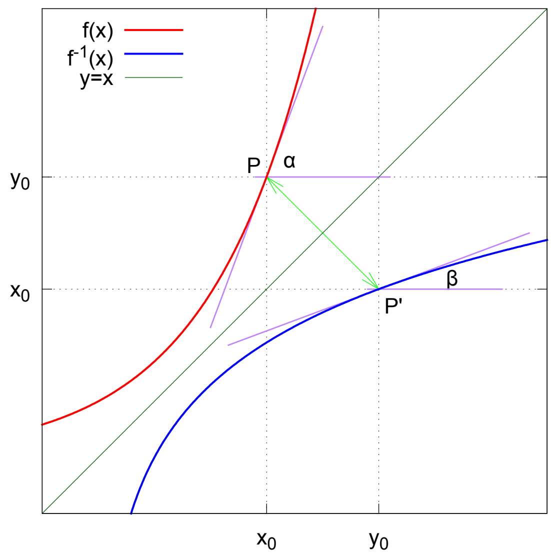
Pl. Az $f(x) = x^2$ függvény nem invertálható a teljes $\mathbb{R}$ halmazon, hiszen $f(x) = f(-x)$. Azonban f szigorúan monoton az $I = [0, \infty)$ intervallumon, tehát itt invertálható, és $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

A következő tétel geometriai kapcsolatot teremt f és f^{-1} grafikonja között.

T *Ha az f függvény invertálható, akkor f^{-1} inverzének grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre való tükrözésével kapható meg. (4.3. ábra)*

B Ha a $P(x_0, y_0)$ pont az f függvény grafikonján van, akkor $y_0 = f(x_0)$, és így $x_0 = f^{-1}(y_0)$, tehát a $P'(y_0, x_0)$ pont az f^{-1} inverz függvény grafikonján helyezkedik el. P és P' egymás tükörképei az $y = x$ egyenesre nézve, ezzel az állítást beláttuk. ■

4.3. ábra. Az inverz függvény grafikonja az eredeti grafikonnak az $y = x$ egyenesre való tükörképe



Inverz függvény deriválása

Ⓣ *Legyen* f *szigorúan monoton* I*-ben* $\Longrightarrow$ *invertálható*
f *differenciálható* I*-ben* $\Longrightarrow$ f *folytonos* I*-ben*
és $f'(x) \neq 0$ I *-ben.*
A feltételek miatt belátható, hogy $f(I)$ *is intervallum. Ekkor* f^{-1} *differenciálható az* $f(I)$ *tetszőleges belső pontjában* (x_0) *és*

$$f^{-1'}(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x_0)}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{f^{-1'}(f(x_0))}$$

Ⓑ Az összefüggés igazolásához azt kell észrevenünk, hogy a 4.3. ábrán jelölt α és β szögek pótszögek $\left(\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}\right)$, így $\operatorname{tg}\alpha \ \operatorname{tg}\beta = 1$, és

$$f^{-1'}(y_0) = \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}.$$

Innen y_0 helyett x_0-t írva kapjuk a bizonyítandó állítást. ■

Az inverz függvény deriválási szabályának egy másik egyszerű bizonyítása az

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\big(f^{-1}(x)\big) = x$$

azonosság deriválásával kapható meg. Az összefüggés bal oldalát a lánc szabály szerint deriválva azt kapjuk, hogy

$$f'\big(f^{-1}(x)\big)\ f^{-1\prime}(x) = 1,$$

ahonnan egyszerű átrendezéssel és $x = x_0$ helyettesítéssel adódik a bizonyítandó egyenlőség.

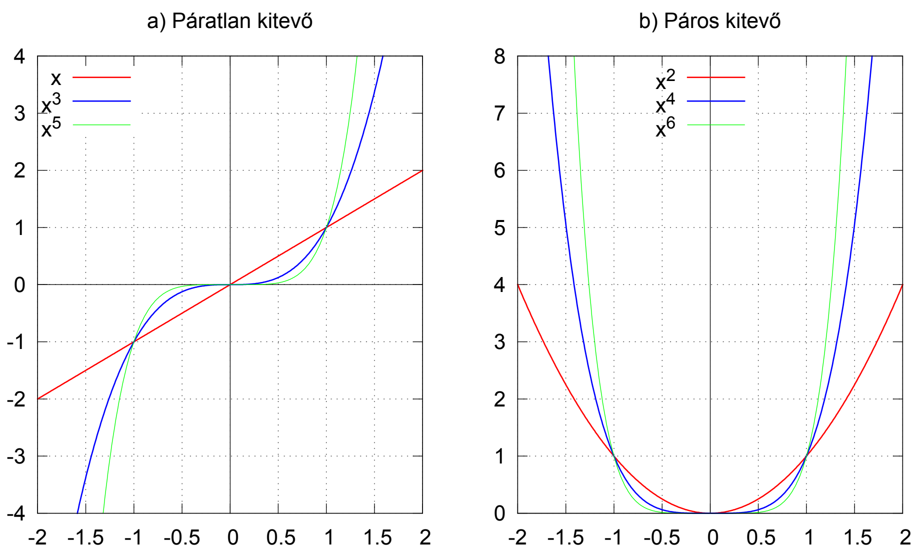
4.2. Elemi függvények

4.2.1. Hatványfüggvények

Pozitív egész kitevőjű hatványfüggvények

$\boxed{f(x) = x^n}$, $n \in \mathbb{N}^+$

4.4. ábra. Pozitív egész kitevőjű hatványfüggvények



A függvény mindenütt folytonos. (lásd: 4.4. ábra)

Mindenütt deriválható és

$$\boxed{(x^n)' = n\, x^{n-1}}$$

Ugyanis

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{(x+h) - x}{h}}_{=1} \left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}\, x + \ldots + (x+h)\, x^{n-2} + x^{n-1}\right) =$$

$$= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n \text{ darab tag}} = n\, x^{n-1}$$

Felhasználtuk, hogy

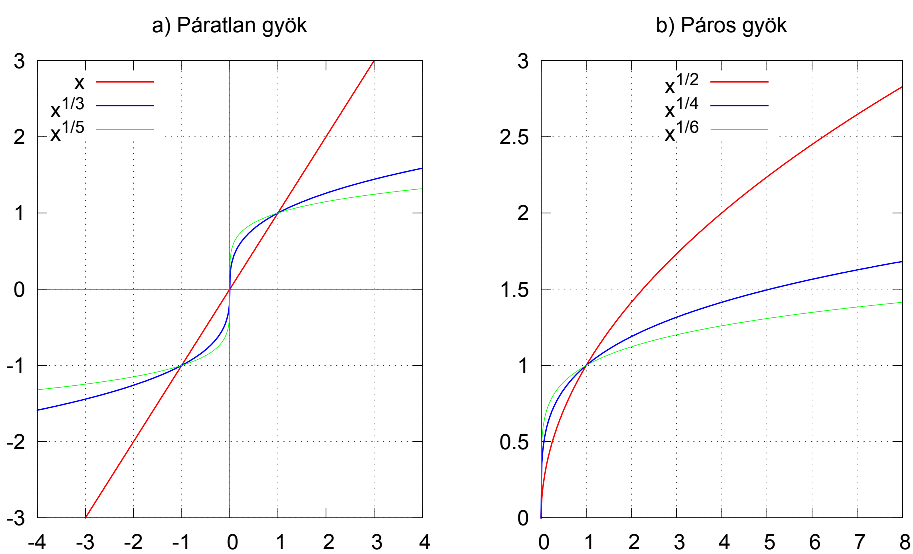
$$a^n - b^n = (a-b)\ \left(a^{n-1} + a^{n-2}\, b + \ b + a^{n-3}\, b^2 + \ldots + a^2\, b^{n-3} + a\, b^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

Pozitív egész rendű gyökfüggvények

$\boxed{f(x) = \sqrt[n]{x}}\ , \quad n \in \mathbb{N}^+$

A függvény az x^n függvény inverze (lásd: 4.5. ábra), páros n esetén csak $x \geq 0$ - ra. (Páros n esetén a teljes értelmezési tartományban nem invertálható a függvény, mert nem kölcsönösen egyértelmű a leképezés.)

4.5. ábra. Pozitív egész rendű gyökfüggvények



$f'(x)$: az inverzfüggvény deriválási szabályával:

$$f(x) = \sqrt[n]{x}\ ; \qquad f^{-1}(u) = u^n\ ; \qquad f'(x) = \frac{1}{f^{-1\prime}(u)|_{u=f(x)}}$$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{nu^{n-1}\big|_{u=\sqrt[n]{x}}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}$$

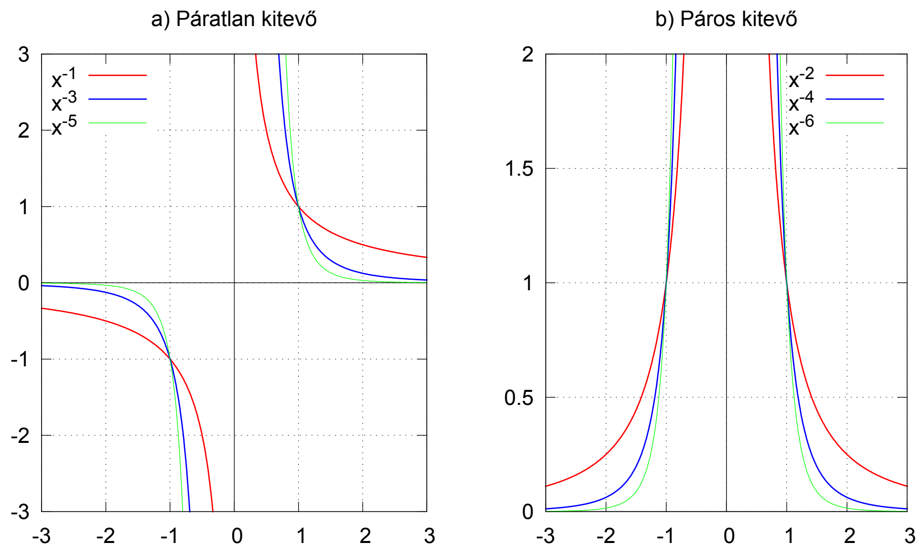
Tehát $\boxed{\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}}$ n páros: $x > 0$; n páratlan: $x \neq 0$

$x = 0$-ban $\nexists\ f'(0)$ (n páratlan) és $\nexists\ f'_+(0)$ (n páros).

Negatív egész kitevőjű hatványfüggvények

$\boxed{f(x) = \frac{1}{x^n}}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ (lásd: 4.6. ábra)

4.6. ábra. Negatív egész kitevőjű hatványfüggvények



Deriváltja a reciprokfüggvény $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ deriválási szabálya alapján:

$$\boxed{\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \left(x^{-n}\right)'} = -\frac{n\,x^{n-1}}{x^{2n}} = \boxed{-n\,x^{-n-1}}$$

Racionális kitevőjű hatványfüggvények

$\boxed{f(x) = x^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{x^p}}$ $\qquad (q > 0)$

Az összetett függvény differenciálási szabályával belátjuk, hogy most is

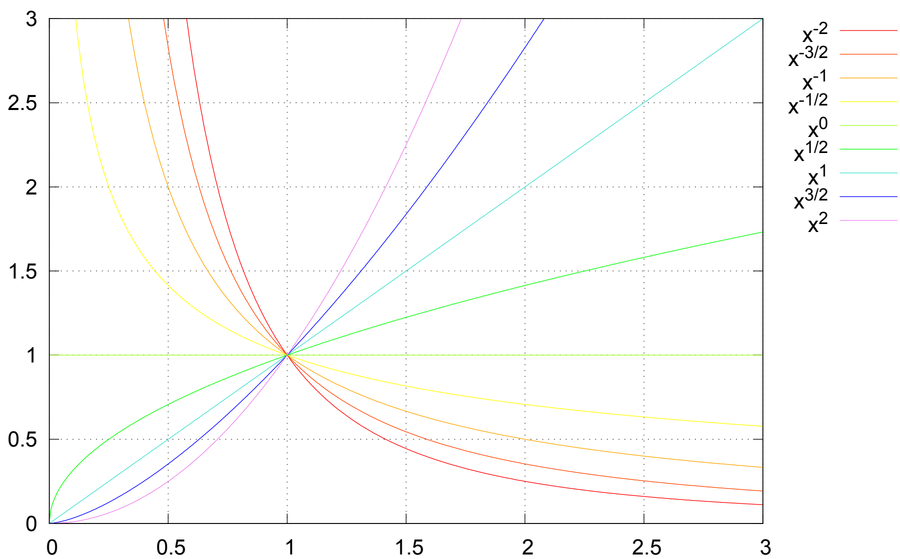
$$\boxed{\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \frac{p}{q}\, x^{\frac{p}{q}-1}}$$

Ugyanis

$$f'(x) = \frac{1}{q}\,(x^p)^{\frac{1}{q}-1}\cdot p\, x^{p-1} = \frac{p}{q}\, x^{\frac{p}{q}-p+p-1} = \frac{p}{q}\, x^{\frac{p}{q}-1}$$

Valós kitevőjű hatványfüggvények

4.7. ábra. Tetszőleges valós kitevőjű hatványfüggvények



$\boxed{f(x) = x^\alpha}$ $\qquad (\alpha$ valós, $x > 0)$.

A függvény definíciója:

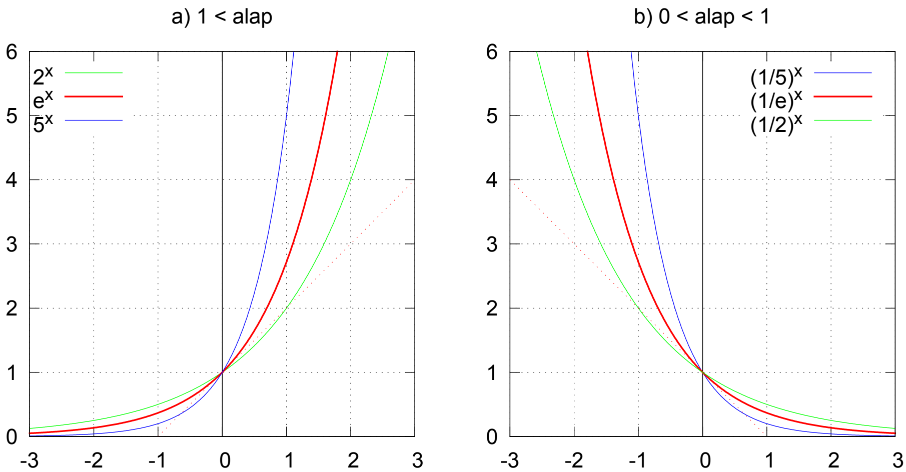
$$x^\alpha := e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$$

A függvény grafikonja különböző kitevők esetén a 4.7. ábrán látható.

Belátható, hogy most is $\qquad \boxed{(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}}$.

4.2.2. Exponenciális függvények

4.8. ábra. Különböző alapokhoz tartozó exponenciális függvények



$\boxed{f(x) = a^x}$ $\quad (a > 0\,,\ \ a \neq 1)$

Definiálása (vázlat):

Ha $x \in \mathbb{Z}^+$: $\quad a^x := \underset{1.}{a} \cdot \underset{2.}{a} \cdot \ \cdots\ \cdot \underset{x.}{a}$

$f(x) = a^x$-re igaz:

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} \tag{4.1}$$

$$\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2} \tag{4.2}$$

Ha $x = 0$: $\quad a^0 := 1$

Ha $x \in \mathbb{Z}^-$: $\quad a^x := \dfrac{1}{a^{-x}}$

Ha $x = \dfrac{p}{q}$; $\quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad q > 0$: $\quad a^x = a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}$

Ha x irracionális:

Felveszünk egy racionális értékeket felvevő pontsorozatot, mely az adott x-hez tart. Tehát

$$x_n \to x, \qquad x_n \in \mathbb{Q}$$

$$a^{x_n} \to A \text{ esetén :} \qquad a^x := A$$

Belátható, hogy A értéke független x_n választásától, csak x-től függ.

Az így definiált függvény tulajdonságai:

$$D_{a^x} = \mathbb{R}, \qquad\qquad R_{a^x} = (0, \infty),$$

$a > 1$ esetén (4.8.a ábra):

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty, \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0,$$

és a függvény szigorúan monoton nő és alulról konvex. Egy speciális exponenciális függvény: e^x, melynek meredeksége az origóban 1.

$0 < a < 1$ esetén (4.8.b ábra):

$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0, \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty,$$

és a függvény szigorúan monoton csökken és alulról konvex.

Deriválhatóság:

$$\boxed{(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x}$$

$x = 0$ - ra:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1}$$

Nevezetes határérték, ¬B.

$x \neq 0$ - ra:

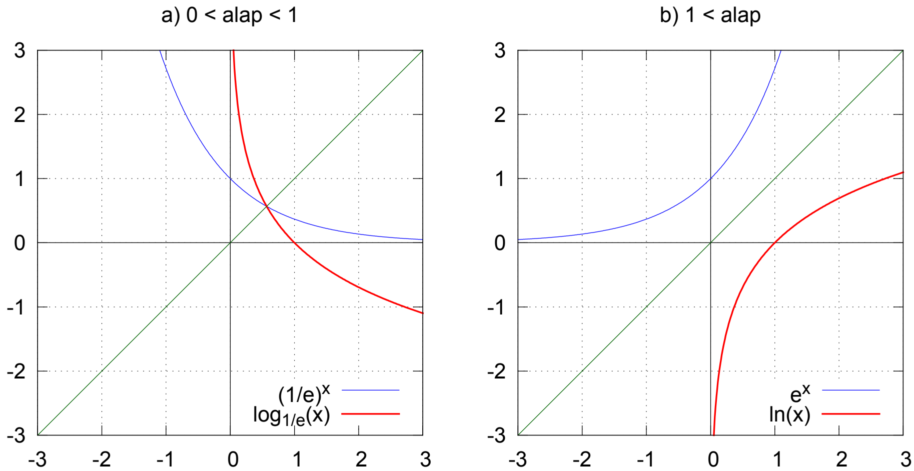
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\mathrm{e}^x}_{\downarrow \atop \mathrm{e}^x} \underbrace{\frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}}_{\downarrow \atop 1} = \mathrm{e}^x$$

4.2.3. Logaritmusfüggvények

$\boxed{f(x) = \log_a x}$ $\qquad (a > 0\,, \quad a \neq 1)$ $\qquad$ (a^x inverze, 4.9. ábra)

Ha $a = e$: $\ln x$ $\qquad$ (természetes alapú logaritmus).

4.9. ábra. A logaritmusfüggvények az exponenciális függvények inverzei



$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

az inverzfüggvény deriválási szabályával:

$$f(x) = \ln x, \qquad f^{-1}(u) = \mathrm{e}^u, \qquad f^{-1\,\prime}(u) = \mathrm{e}^u$$

$$f'(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^u|_{u=\ln x}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \ln a}$$

Ugyanis $\quad (a^x)' = (\mathrm{e}^{\ln a^x})' = \left(\mathrm{e}^{x \ln a}\right)' = \mathrm{e}^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x \ \ln a.$

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a}\,\frac{1}{x}} \qquad x > 0$$

Ugyanis $\quad (\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{\ln a}\,(\ln x)' = \dfrac{1}{\ln a}\,\dfrac{1}{x}.$

Pl. $\boxed{f(x) = 10^{2x^2+1}, \qquad f'(x) = ?}$

$$f'(x) = 10^{2x^2+1} \cdot \ln 10 \cdot (2x^2+1)' = \ln 10 \cdot 10^{2x^2+1} \cdot 4x$$

Pl. $\boxed{f(x) = \ln|x|\,, \qquad f'(x) = ?}$

$$f(x) = \begin{cases} \ln x\,, & \text{ha } x > 0 \\ \ln(-x)\,, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Ezért

$$f'(x) = \frac{1}{x}\,, \quad \text{ha } x \neq 0$$

(Ugyanis $\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}\,, \quad$ és $\quad (\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x}\,.$)

Pl. $\boxed{f(x) = \ln \dfrac{x^2+1}{x^4+3}\,, \qquad f'(x) = ?}$

$$f'(x) = \frac{1}{\dfrac{x^2+1}{x^4+3}} \cdot \left(\frac{x^2+1}{x^4+3}\right)' = \frac{x^4+3}{x^2+1}\;\frac{2x\,(x^4+3) - (x^2+1)\,4x^3}{(x^4+3)^2}$$

Egyszerűbben is eljuthattunk volna erre az eredményre. Ugyanis most

$$f(x) \equiv \ln(x^2+1) - \ln(x^4+3)\,.$$

(A két függvény értelmezési tartománya is azonos.)

Ennek felhasználásával

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}\,2x - \frac{1}{x^4+3}\,4x^3$$

4.2.4. Exponenciális hatványfüggvények

D Exponenciális hatványfüggvény definíciója:

$$\boxed{(f(x))^{g(x)} := \mathrm{e}^{\ln(f(x))^{g(x)}} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}}$$

Értelmezett, ha f és g értelmezett és $f(x) > 0$.

Deriválása ezen alak segítségével.

Pl.

$$(x^x)' = \left(\mathrm{e}^{\ln x^x}\right)' = \left(\mathrm{e}^{x\ln x}\right)' = \mathrm{e}^{x\ln x} \cdot (x\ln x)' = x^x\left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

Pl.

$$\left(\left(1+x^2\right)^{\sin 2x}\right)' = \left(\mathrm{e}^{\sin 2x \,\cdot \ln\left(1+x^2\right)}\right)' = \mathrm{e}^{\sin 2x \,\ln\left(1+x^2\right)} \cdot \left(\sin 2x \,\cdot \ln\left(1+x^2\right)\right)' =$$

$$= \left(1+x^2\right)^{\sin 2x} \left(\cos 2x \,\cdot 2 \cdot \ln\left(1+x^2\right) + \sin 2x \,\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

M A derivált meghatározásához felhasználhatjuk a **logaritmikus deriválást** is:

$$h(x) := (f(x))^{g(x)}$$

Mindkét oldalra alkalmazzuk az $\ln$ függvényt:

$$\ln h(x) = \ln\left(f(x)\right)^{g(x)} = g(x) \cdot \ln f(x)$$

Mindkét oldalt x szerint deriválva:

$$\frac{1}{h(x)}\, h'(x) = \left(g(x) \cdot \ln f(x)\right)' \quad \Longrightarrow \quad h'(x) = h(x) \cdot \left(g(x) \cdot \ln f(x)\right)'$$

Természetesen ugyanahhoz az eredményhez vezet ez a módszer is, mint az előző.

4.2.5. Trigonometrikus függvények és inverzeik (ciklometrikus vagy arcus függvények)

A szinuszfüggvény és inverze

$\boxed{f(x) = \sin x}$

Mindenütt folytonos. (4.10 ábra)

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x\,, \quad x \in \mathbb{R}}$$

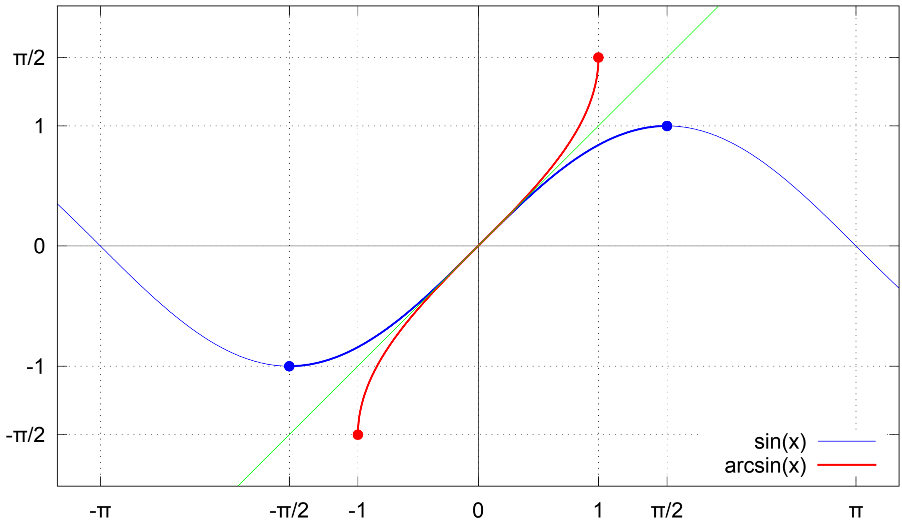
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin x \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} + \cos x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} = \cos x$$

Ugyanis:

4.10. ábra. A $\sin(x)$ és inverze, az $\arcsin(x)$ függvény



$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h\,-\,1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\ \sin^2\frac{h}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\ \sin\frac{h}{2}=-1\cdot 0=0$$

A $\sin(x)$ függvény a teljes értelmezési tartományban nem invertálható, mert végtelen sokrétű. Ezért szűkítjük az értelmezési tartományt:

$$f:\left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right]\mapsto[-1,1]\quad\text{szigorúan monoton}\implies\exists\, f^{-1}(x)$$

D $\quad f^{-1}(x)=\boxed{\arcsin x}$:
Jelenti azt a $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$-be eső radiánban mért szöget, melynek szinusza x (4.10. ábra).

Tulajdonságai:

$$D_{\arcsin x}=[-1,1]\,,\qquad\qquad R_{\arcsin x}=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

Szigorúan monoton nő, páratlan.

$$\boxed{(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\qquad |x|<1$$

$$f^{-1}(x)=\arcsin x,\qquad f(x)=\sin x,\qquad f^{-1\prime}(x)=\left.\frac{1}{f'(u)}\right|_{u=f^{-1}(x)}$$

Ennek alapján:

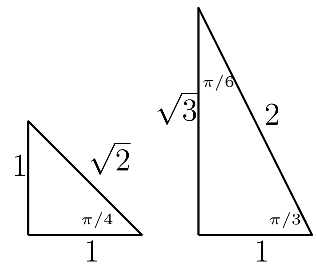
$$(\arcsin x)' = \left.\frac{1}{\cos u}\right|_{u=\arcsin x} = \left.\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\right|_{u=\arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Felhasználtuk, hogy

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1 \implies \cos u = +\sqrt{1-\sin^2 u} \qquad \text{és} \qquad \sin \arcsin x = x$$

(A megadott intervallumon $\cos u$ pozitív.)

A nevezetes szögek szögfüggvényei az alábbi két jól ismert háromszög segítségével számíthatók ki:



$$\arcsin 0 = 0$$
$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$
$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$
$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$
$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$
$$\sin \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\arcsin \sin \frac{2\pi}{3} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} \left(= \pi - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Néhány példa:

Pl. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = ?}$

1. megoldás:

Helyettesítéssel oldjuk meg:

$$u := \arcsin x \implies x = \sin u$$

Ha $x \to 0$, akkor $u \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin u} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{\sin u}{u}} = 1$$

2. megoldás:

Mivel az $\arcsin x$ függvény deriváltját az inverzfüggvény deriválási szabályával vezettük le, a derivált definícióját felhasználhatjuk a megoldáshoz:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - 0}{x - 0} = (\arcsin x)'|_{x=0} = \left.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right|_{x=0} = 1$$

Pl.

$$f(x) = \pi + 2\arcsin\left(x^2-1\right), \qquad g(x) = \arcsin\frac{1}{x^2}$$

a) Határozza meg a függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

b) Írja fel a deriváltfüggvényeket, ahol azok léteznek!

Megoldás.

a) f értelmezési tartománya:

$$-1 \le x^2-1 \le 1 \implies \underbrace{0 \le x^2}_{\forall\, x\text{-re igaz}} \le 2 \implies |x| \le \sqrt{2}$$

Tehát $D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

f értékkészlete:

Mivel $x^2-1 \in [-1, 1] \implies \arcsin\left(x^2-1\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\implies 2\arcsin\left(x^2-1\right) \in [-\pi, \pi] \implies R_f = [0, 2\pi]$$

g értelmezési tartománya:

$$\underbrace{0 \le \frac{1}{x^2}}_{\forall\, x\text{-re igaz}} \le 1 \implies x^2 \ge 1 \implies |x| \ge 1$$

Tehát $D_g = (-\infty, -1] \bigcup [1, \infty)$.

g értékkészlete:

Mivel $\frac{1}{x^2} \in (0, 1] \implies \arcsin\frac{1}{x^2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

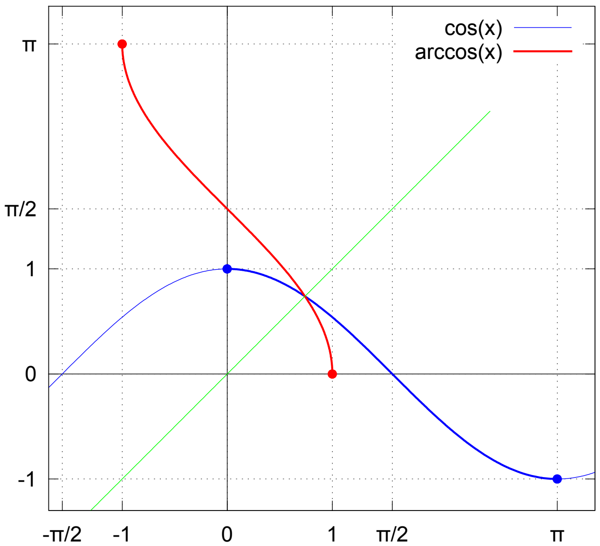
Így $R_f = \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

b) $$f'(x) = 2\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2-1\right)^2}}\;2x\,, \qquad |x| < \sqrt{2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}}\ \frac{-2}{x^3}\,, \qquad |x| > 1$$

A koszinuszfüggvény és inverze

4.11. ábra. A $\cos(x)$ és inverze, az $\arccos(x)$ függvény



$\boxed{f(x) = \cos x}$

Mindenütt folytonos. (4.11. ábra)

$\boxed{(\cos x)' = -\sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} - \sin x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} = -\sin x$$

Invertálás:

A $\cos(x)$ függvény a teljes értelmezési tartományban nem invertálható, mert végtelen sokrétű. Ezért szűkítjük az értelmezési tartományt:

$$f : [0\,,\,\pi] \mapsto [-1,1] \quad \text{szigorúan monoton} \implies \exists\, f^{-1}(x)$$

(D) $f^{-1}(x) \;=\; \boxed{\arccos x}$

Jelenti azt a $[0\,,\,\pi]$ -be eső radiánban mért szöget, melynek koszinusza x. (4.11. ábra)

Tulajdonságai:

$$D_{\arccos x} \;=\; [-1,1]\;, \qquad\qquad R_{\arccos x} \;=\; [0\,,\,\pi]$$

Szigorúan monoton csökken.

$$\boxed{(\arccos x)' \;=\; -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \quad |x|<1$$

Bizonyítása az inverzfüggvény deriválási szabályával:

$$f^{-1}(x) \;=\; \arccos x\,, \qquad f(u) \;=\; \cos u\,,\,, \qquad f'(u) \;=\; -\,\sin u$$

$$f^{-1\,\prime}(x) \;=\; \left.\frac{1}{f'(u)}\right|_{u=f^{-1}(x)}$$

Ennek alapján:

$$(\arccos x)' \;=\; \left.\frac{1}{-\sin u}\right|_{u=\arccos x} \;=\; \left.\frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 u}}\right|_{u=\arccos x} \;=\; \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(Pl.)

$$f(x) \;=\; 5\pi - 2\arccos(4x-1)$$

a) $D_f \;=?\,, \quad R_f \;=?$

b) Létezik-e inverze f -nek?
Ha igen, $f^{-1}(x) \;=?\,,\;\; D_{f^{-1}} \;=?\,,\;\; R_{f^{-1}} \;=?$

c) Írja fel a függvény $x_0 \;=\; \frac{1}{8}$ pontbeli érintő egyenesének egyenletét!

Megoldás.

a) ÉT.: $-1 \le 4x-1 \le 1 \implies 0 \le 4x \le 2 \implies 0 \le x \le \frac{1}{2}$

Tehát $D_f \;=\; \left[0, \frac{1}{2}\right]$

Mivel $(4x-1) \in [-1,1] \implies \arccos(4x-1) \in [0,\pi]$

$$\implies 2\arccos(4x-1) \in [0,2\pi] \quad \implies R_f = [3\pi, 5\pi]$$

b) f szigorúan monoton nő D_f-en:

Ugyanis, ha felveszünk az értelmezési tartományban két pontot:

$$0 \le x_1 < x_2 \le \frac{1}{2} \implies 4x_1 - 1 < 4x_2 - 1$$

$$\implies \arccos(4x_1-1) > \arccos(4x_2-1)$$

$$\implies -2\arccos(4x_1-1) < -2\arccos(4x_2-1)$$

$$\implies f(x_1) = 5\pi - 2\arccos(4x_1-1) < 5\pi - 2\arccos(4x_2-1) = f(x_2)$$

Mivel a függvény szigorúan monoton nő D_f-en, ezért $\exists\, f^{-1}(x)$.

$f^{-1}(x)$ meghatározása :

$$y = 5\pi - 2\arccos(4x-1)$$

$$\implies \quad \arccos(4x-1) = \frac{5\pi - y}{2} \quad \implies \quad 4x-1 = \cos\frac{5\pi-y}{2}$$

$$\implies \quad x = \frac{1}{4}\left(1 + \cos\frac{5\pi-y}{2}\right) \quad \underset{x\leftrightarrow y}{\implies} \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{5\pi-x}{2}\right)$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = [3\pi, 5\pi] \quad \text{és} \quad R_{f^{-1}} = D_f = \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

c) $f'(x) = -2 \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{1-(4x-1)^2}} \cdot 4$

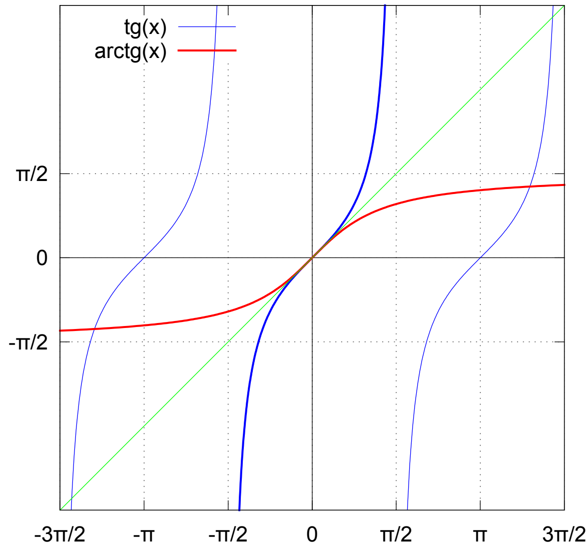
$\left(f'(x) = \dfrac{8}{\sqrt{\cdots}} > 0 :\right.$

Hamarosan látni fogjuk, hogy a szigorúan monoton növekedés ebből is következik.)

$$y_é = f\left(\frac{1}{8}\right) + f'\left(\frac{1}{8}\right)\left(x - \frac{1}{8}\right) = \frac{11\pi}{3} + \frac{16}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{8}\right), \text{ mert}$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = 5\pi - 2\underbrace{\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\frac{2\pi}{3}} = \frac{11\pi}{3} \quad \text{és} \quad f'\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

4.12. ábra. A $\mathrm{tg}(x)$ és inverze, az $\mathrm{arctg}(x)$ függvény



A tangens függvény és inverze

$$\boxed{f(x) = \mathrm{tg}\, x := \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ esetén folytonos. (4.12. ábra)

$$\boxed{(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}\,, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}$$

A hányadosfüggvény deriválási szabályát és a függvény definícióját használjuk fel.

$$\left(\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \right)$$

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x\, (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Invertálás:

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \mapsto (-\infty, \infty) \quad \text{szigorúan monoton} \implies \exists\, f^{-1}(x)$$

D $f^{-1}(x) = \boxed{\operatorname{arctg} x}$:

Jelenti azt a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-be eső radiánban mért szöget, melynek tangense x. (4.12. ábra)

Tulajdonságai:

$$D_{\operatorname{arctg} x} = \mathbb{R}\,, \qquad R_{\operatorname{arctg} x} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Páratlan függvény: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Most is az inverzfüggvény deriválási szabályával bizonyítunk:

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x\,, \qquad f(u) = \operatorname{tg} u\,, \qquad f'(u) = \frac{1}{\cos^2 u}$$

$$f^{-1\,\prime}(x) = \left.\frac{1}{f'(u)}\right|_{u=f^{-1}(x)}$$

Ennek alapján:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\left.\frac{1}{\cos^2 u}\right|_{u=\operatorname{arctg} x}} = \left.\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 u}\right|_{u=\operatorname{arctg} x} = \frac{1}{1+x^2}$$

Felhasználtuk az alábbi azonosságot:

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1 \quad |:\cos^2 u \qquad \Longrightarrow \qquad 1+\operatorname{tg}^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$$

Pl.

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2-x}{2+x}$$

a) $\lim\limits_{x\to -2\pm 0} f(x) = ?\,, \qquad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = ?$

b) $f'(x) = ?$, ha $x \neq -2$

c) $\lim\limits_{x\to -2} f'(x) = ?$

Létezik-e $f'(-2)$?

Megoldás.

a) $$\lim_{x\to -2+0} \operatorname{arctg} \underbrace{\left(\frac{\overbrace{2-x}^{\substack{-4\\ \uparrow}}}{\underbrace{2+x}_{\substack{\downarrow\\ 0+}}}\right)}_{\to -\infty} = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to -2-0} \operatorname{arctg} \frac{2-x}{\underbrace{2+x}_{\to +\infty}} = \frac{\pi}{2}$$

Mivel $$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{2-x}{2+x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{\frac{2}{x}-1}{\frac{2}{x}+1} = -1\,, \quad \text{ezért}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

b) Ha $x \neq -2$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^2} \left(\frac{2-x}{2+x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^2} \frac{-1\cdot(2+x)-(2-x)\cdot 1}{(2+x)^2} =$$

$$= \frac{-4}{(2+x)^2 + (2-x)^2}$$

c) $$\lim_{x\to -2} f'(x) = -\frac{1}{4}$$

$f'(-2) \nexists$, mert az f függvény nem folytonos $x=-2$-ben.

Így most láttunk arra példát , hogy hiába létezik az f' függvénynek határértéke -2-ben, mégsem létezik $f'(-2)$.

A kotangens függvény és inverze

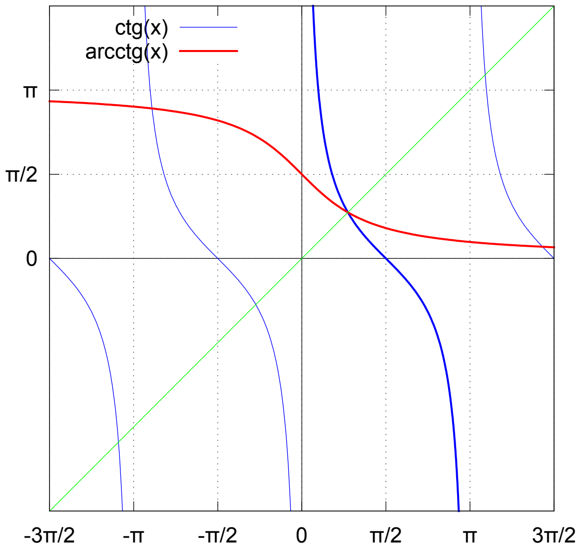
$$\boxed{f(x) = \operatorname{ctg} x := \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$x \neq k\pi$ esetén folytonos. (4.13. ábra)

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\,, \qquad x \neq k\pi}$$

Most is a hányadosfüggvény deriválási szabályát és a függvény definícióját használjuk fel.

4.13. ábra. A $\operatorname{ctg}(x)$ és inverze, az $\operatorname{arcctg}(x)$ függvény



$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad x \neq k\pi$$

Invertálás:

$f: (0, \pi) \mapsto (-\infty, \infty)$ szigorúan monoton $\Longrightarrow \exists f^{-1}(x)$

D $\quad f^{-1}(x) = \boxed{\operatorname{arcctg} x}$:

Jelenti azt a $(0, \pi)$-be eső radiánban mért szöget, melynek kotangense x. (4.13. ábra)

Tulajdonságai:

$$D_{\operatorname{arcctg} x} = \mathbb{R}, \qquad R_{\operatorname{arcctg} x} = (0, \pi)$$

$$\boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}} \quad x \in \mathbb{R}$$

Most is az inverzfüggvény deriválási szabályával bizonyítunk:

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x, \qquad f(u) = \operatorname{ctg} u, \qquad f'(u) = -\frac{1}{\sin^2 u}$$
$$f^{-1\,\prime}(x) = \left.\frac{1}{f'(u)}\right|_{u=f^{-1}(x)}$$

Ennek alapján:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{-\left.\frac{1}{\sin^2 u}\right|_{u=\operatorname{arcctg} x}} = -\left.\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 u}\right|_{u=\operatorname{arcctg} x} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Felhasználtuk az alábbi azonosságot:

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1 \quad | : \sin^2 u \qquad \Longrightarrow \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 u = \frac{1}{\sin^2 u}$$

Ⓜ Vigyázat!

$$\frac{\arcsin x}{\arccos x} \neq \operatorname{arctg} x\ ; \quad \arcsin^2 x + \arccos^2 x \neq 1 \quad \text{stb.}$$

Ellenőrzés nélkül ne próbálják a trigonometrikus azonosságokat általánosítani az arkusz függvényekre!

Pl. Fejezzük ki $\operatorname{arctg} x$ segítségével $\arcsin x$, $\arccos x$ és $\operatorname{arcctg} x$ értékét! (A programozási nyelvekben beépített függvényként általában csak az $\operatorname{arctg} x$ szerepel.)

$$y = \arcsin x$$

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} \arcsin x = \frac{\sin \arcsin x}{\cos \arcsin x} = \frac{x}{\sqrt{1-\sin^2 \arcsin x}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad y = \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

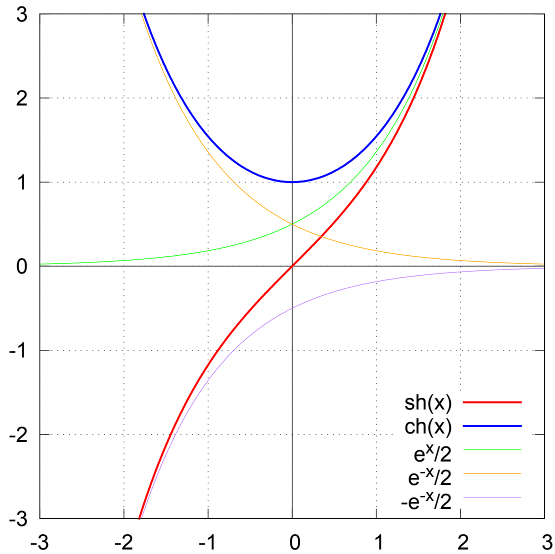
Hasonlóan megmutatható, hogy

$$\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ ; \qquad \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

4.2.6. Hiperbolikus függvények és inverzeik

A szinusz hiperbolikusz és a koszinusz hiperbolikusz függvény

4.14. ábra. Az $\operatorname{sh} x$ és $\operatorname{ch} x$ függvény



D

$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad\qquad \operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{(láncgörbe)}$$

(Szinusz hiperbolikusz, illetve koszinusz hiperbolikusz függvények, 4.14. ábra.)

Tulajdonságok:

$\boxed{\operatorname{sh} x \text{ páratlan, } \operatorname{ch} x \text{ páros.}}$

Ugyanis

$$\operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \operatorname{ch} x$$

$$\boxed{(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \quad ; \qquad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x}$$

Ugyanis

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

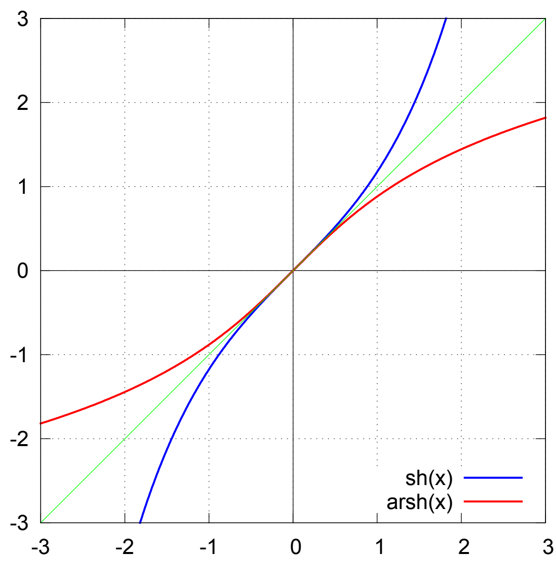
$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$$

Azonosságok:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1 \\
\operatorname{sh}(x \pm y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \\
\operatorname{ch}(x \pm y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \\
\operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \\
\operatorname{ch} 2x &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \\
\operatorname{ch}^2 x &= \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} \\
\operatorname{sh}^2 x &= \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}
\end{aligned}$$

Az area szinusz hiperbolikusz és az area koszinusz hiperbolikusz függvény

4.15. ábra. A $\operatorname{sh} x$ és inverze, az $\operatorname{arsh} x$ függvény



D $\boxed{f(x) = \operatorname{arsh} x}$: az $\operatorname{sh} x$ függvény inverze (4.15. ábra)

Az $f(x) = \operatorname{sh} x$ függvény szigorúan monoton a teljes értelmezési tartományban, ezért $\exists$ az inverze, melynek jelölése: $f^{-1}(x) = \operatorname{arsh} x$ (area szinusz hiperbolikusz).

Érdekesség: a függvény kifejezhető az ln függvény segítségével az alábbi módon:

$$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Ugyanis:

$$y = \operatorname{arsh} x \implies \operatorname{sh} y = x \implies \frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{2} = x \implies (\mathrm{e}^y)^2 - 2x\,\mathrm{e}^y - 1 = 0$$

Ez e^y-ra másodfokú egyenlet.

$$\implies \mathrm{e}^y = \frac{2x + \sqrt{4x^2+4}}{2} = x + \sqrt{x^2+1} > 0$$

A másik gyök negatív, így nem jöhet szóba e^y értékére, mely mindig pozitív.

$$\implies y = \operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\boxed{(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Az inverzfüggvény deriválási szabályával:

$$(\operatorname{arsh} x)' = \left.\frac{1}{\operatorname{ch} u}\right|_{u=\operatorname{arsh} x} = \left.\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}}\right|_{u=\operatorname{arsh} x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Felhasználtuk, hogy

$$\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1 \quad \text{miatt} \quad \operatorname{ch} u = +\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} \quad (\operatorname{ch} u > 0)\,.$$

D $\boxed{f(x) = \operatorname{arch} x}$: a $\operatorname{ch} x$ függvény inverze $x \geq 0$-ra. (4.16. ábra)

$f(x) = \operatorname{ch} x$ függvény a $[0,\infty)$ intervallumon szigorúan monoton $\implies \exists\, f^{-1}(x)$ ezen az intevallumon, melyet $arch\, x$ módon jelölünk és area koszinusz hiperbolikusz (röviden: area ch) függvénynek nevezünk.

Ez a függvény is megadható az ln függvény segítségével:

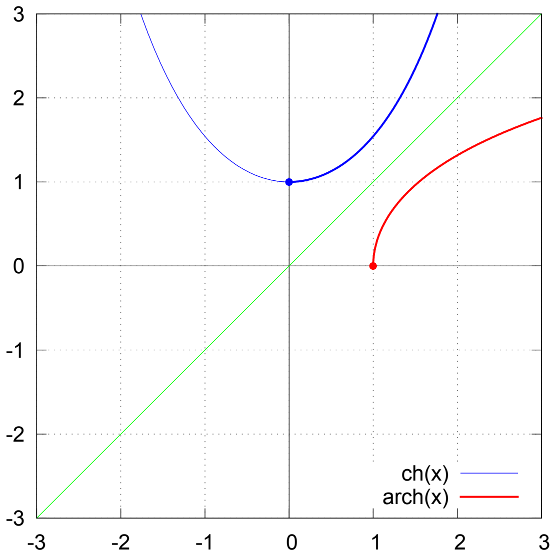
$$\operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad (\neg\mathrm{B})$$

Deriválhatóság:

$$\boxed{(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}} \qquad x > 1$$

Most is az inverzfüggvény deriválási szabályával dolgozunk:

4.16. ábra. A $\operatorname{ch} x$ és inverze, az $\operatorname{arch} x$ függvény



$$(\operatorname{arch} x)' = \left.\frac{1}{\operatorname{sh} u}\right|_{u=\operatorname{arch} x} = \left.\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 u \ - 1}}\right|_{u=\operatorname{arch} x} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Felhasználtuk, hogy

$$\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1 \quad \text{miatt} \quad \operatorname{sh} u = +\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 u}$$

(A vizsgált intervallumon $\operatorname{sh} u > 0$) .

A tangens hiperbolikusz, kotangens hiperbolikusz függvény és inverzük

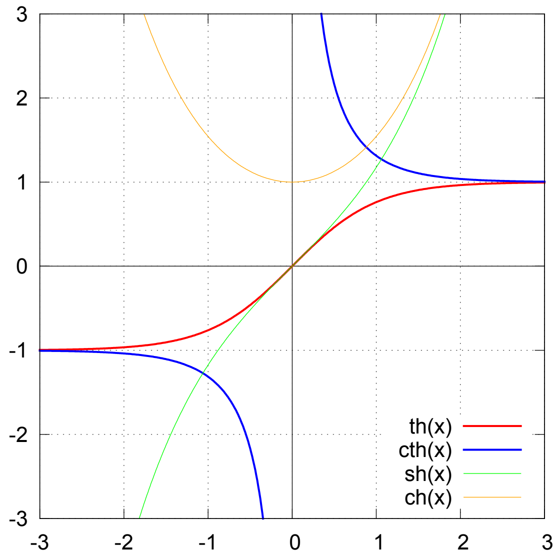
$\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ és inverzeik $\operatorname{arth} x$, $\operatorname{arcth} x$ függvények

(tangens hiperbolikusz, kotangens hiperbolikusz, area tangens hiperbolikusz és area kotangens hiperbolikusz)

D $\operatorname{th} x := \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ (páratlan függvény, 4.17. ábra)

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{th} x = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{e^x}{e^x}}_{=1} \frac{1 - \overbrace{e^{-2x}}^{\substack{0\\ \uparrow}}}{1 + \underbrace{e^{-2x}}_{\substack{\downarrow\\ 0}}} = 1$$

4.17. ábra. A $\operatorname{th} x$ és a $\operatorname{cth} x$ függvény



$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

D $\operatorname{cth} x := \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \quad x \neq 0$ (páratlan, 4.17. ábra)

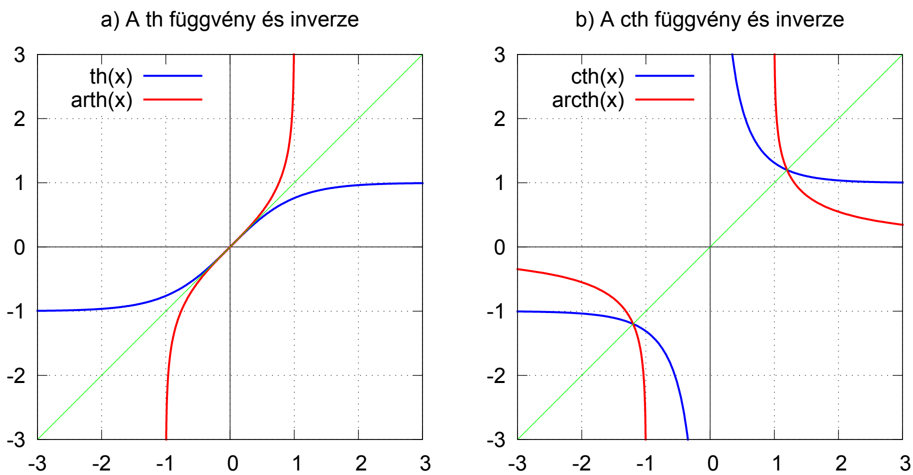
$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

Mindkettő a teljes értelmezési tartományban invertálható, mert a leképezés kölcsönösen egyértelmű (4.18. ábra).

Belátható, hogy

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \qquad |x| < 1$$
$$(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \qquad |x| > 1$$

4.18. ábra. A $\mathrm{th}(x)$, $\mathrm{arth}(x)$, valamint a $\mathrm{cth}(x)$ és az $\mathrm{arcth}(x)$ függvények



Deriválttáblázat

$f(x)$	$f'(x)$	D_f
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$(0,+\infty)$
a^x	$a^x \ln a$	$(-\infty,+\infty)$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$	$(0,+\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	$(-\infty,+\infty)$
$\cos x$	$-\sin x$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(0,\pi)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$(0,+\infty)$
$\operatorname{arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(1,+\infty)$

$\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $a \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$

4.2.7. Néhány összetett példa az előző anyagrészhez

Pl.

$$f(x) = |(x^2+1)(x^3-x^2)| \qquad f'(x) = ?$$

Megoldás.

$$f(x) = (x^2+1)\,x^2\,|x-1| = (x^4+x^2)\,|x-1| = \begin{cases} (x^4+x^2)(x-1)\,, & \text{ha } x \ge 1 \\ -(x^4+x^2)(x-1)\,, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

$g(x) := (x^4+x^2)(x-1)$: mindenütt deriválható.

A szorzatfüggvény deriválási szabályával:

$$g'(x) = (4x^3+2x)(x-1) + (x^4+x^2)\cdot 1$$

Ennek felhasználásával:

$$f(x) = \begin{cases} g'(x)\,, & \text{ha } x > 1 \\ -g'(x)\,, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

$x = 1$-ben a definícióval dolgozunk:

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^4+x^2)\,|x-1| - 0}{x-1}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1+0} \underbrace{\frac{(x^4+x^2)(x-1)}{x-1}}_{=x^4+x^2} = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1-0} \underbrace{\frac{(x^4+x^2)\,(-(x-1))}{x-1}}_{=-(x^4+x^2)} = -2 \neq f'_+(1)$$

$$\Longrightarrow \quad f'(1) \nexists$$

Pl.

$$f(x) = \begin{cases} (\operatorname{ch} 5x)^2\,, & \text{ha } x \le 0 \\ \dfrac{\sin 4x}{x}\,, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

Hol folytonos és hol differenciálható az f függvény?

$$f'(x) = ? \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = ?$$

Megoldás.

Ha $x \neq 0$, akkor f folytonos, mert folytonos függvények összetétele.
Vizsgálandó az $x = 0$ pontbeli viselkedés:

$f(0-0) = f(0) = (\operatorname{ch} 0)^2 = 1$ és

$$f(0+0) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4$$

Mivel $f(0-0) \neq f(0+0)$, tehát $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nem létezik, így a függvény nem folytonos $x = 0$-ban, ezért nem is deriválható itt, tehát $f'(0)$ nem létezik.

$x \neq 0$-ra a függvény deriválható és

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot (\operatorname{ch} 5x) \cdot (\operatorname{sh} 5x) \cdot 5\,, & \text{ha } x < 0 \\ \dfrac{(4 \cdot \cos 4x) \cdot x - (\sin 4x) \cdot 1}{x^2}\,, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \cdot \underbrace{\sin 4x}_{\text{korlátos}} = 0$$

Pl.

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x}\,, \qquad h(x) = 2x^2 + \alpha x + \beta$$

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\,, & \text{ha } x \geq 0 \\ h(x)\,, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Megválasztható-e α és β értéke úgy, hogy f mindenütt differenciálható legyen?

Megoldás.

Mivel g, h mindenütt deriválható, ezért $x \neq 0$ esetén f is deriválható.

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x}\,, & \text{ha } x > 0 \\ h'(x) = 4x + \alpha\,, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Így csak $x = 0$-át kell vizsgálni.

A differenciálhatóság szükséges feltétele a folytonosság. Ehhez teljesülnie kell, hogy $f(0+0) = f(0) = g(0) = 1$, megegyezzen $f(0-0) = h(0) = \beta$ értékével, tehát $\underline{\underline{\beta = 1}}$.

Mivel

$$f'_+0 = g'(0) = 2\ ,$$
$$f'_-0 = h'(0) = \alpha\ ,$$

Így a deriválhatósághoz $\underline{\underline{\alpha = 2}}$ választás kell.

Pl. $f(x) = \pi - \arccos\sqrt{\dfrac{1}{x} - 1}$

1. $D_f = ?$ $R_f = ?$
2. Írja fel az $x_0 = \dfrac{4}{5}$ pontbeli érintő egyenes egyenletét!
3. Mutassa meg, hogy f-nek létezik az inverze és határozza meg! $(f^{-1}(x) = ?)$

Megoldás.

1. $0 \le \dfrac{1}{x} - 1 \le 1 \implies 1 \le \dfrac{1}{x} \le 2 \implies \dfrac{1}{2} \le x \le 1:\quad D_f = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$

   Itt $0 \le \arccos\sqrt{\dfrac{1}{x} - 1} \le \dfrac{\pi}{2} \implies \dfrac{\pi}{2} \le \pi - \arccos\sqrt{\dfrac{1}{x} - 1} \le \pi:\quad R_f = \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$

2. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)}} \quad \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{x} - 1}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$x_0 = \frac{4}{5};\quad f\left(\frac{4}{5}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3};$$

$$f'\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{-5^2}{4^2} = \frac{-25}{8\sqrt{3}}$$

$$y_é = f\left(\frac{4}{5}\right) + f'\left(\frac{4}{5}\right)\left(x - \frac{4}{5}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{25}{8\sqrt{3}}\left(x - \frac{4}{5}\right)$$

3. $\frac{1}{2} \leq x_1 < x_2 \leq 1$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$ megmutatható (HF.) $\implies$ f szigorúan monoton csökken $\implies$ $\exists\, f^{-1}$ D_f-en
(Vagy:
$f' < 0$ $D_f = I$-n $\implies$ f szigorúan monoton csökken $\implies$ $\exists\, f^{-1}$ D_f-en)

$$y = \pi - \arccos\sqrt{\frac{1}{x} - 1} \quad\implies\quad \arccos\sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \pi - y$$

$$\implies \quad \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \cos(\pi - y) \quad\implies\quad \frac{1}{x} - 1 = \cos^2(\pi - y)$$

$$\implies \quad \frac{1}{x} = 1 + \cos^2(\pi - y) \quad\implies\quad x = \frac{1}{1 + \cos^2(\pi - y)} \qquad (x \leftrightarrow y)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{1 + \cos^2(\pi - x)} = \frac{1}{1 + \cos^2 x}$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]; \qquad R_{f^{-1}} = D_f = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Pl. Legyen

$$f(x) = -\frac{\pi x}{3} + \arcsin\left(\frac{2}{x}\right), \quad x \in (2, \infty)$$

1. $f'(x) = ?$
2. Indokolja meg, hogy a függvénynek létezik az inverze! Határozza meg az inverz függvény értelmezési tartományát!

   Ellenőrizze, hogy f^{-1} grafikonja átmegy a $\left(-\frac{7\pi}{6}, 4\right)$ ponton!
3. Írja fel az inverz függvénynek ezen a ponton áthaladó érintő egyenese egyenletét!

Megoldás.

1. $f'(x) = -\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{x}\right)^2}}\,\dfrac{-2}{x^2} = -\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{2}{x\sqrt{x^2 - 4}}$, ha $x > 2$.
2. $2 < x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$ megmutatható (HF.) $\implies$ f szigorúan monoton csökken $\implies$ $\exists\, f^{-1}$ D_f-en
(Vagy:

$$x > 2\text{-re } f'(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ szigorúan monoton csökken} \quad \Longrightarrow \quad \text{invertálható})$$

$$x \in (2, \infty)\text{-re} \quad \frac{2}{x} \in (0,1) \quad \Longrightarrow \quad \arcsin\frac{2}{x} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad R_f = \left(-\infty,\ \frac{-2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \left(-\infty,\ \frac{-\pi}{6}\right) = D_{f^{-1}}$$

Mivel $f(4) = -\dfrac{4\pi}{3} + \arcsin\dfrac{1}{2} = -\dfrac{4\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{7\pi}{6} \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}\left(-\dfrac{7\pi}{6}\right) = 4$

3. Az érintő egyenes egyenlete:

$$f^{-1\prime}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)} = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{-\frac{\pi}{3} - \frac{2}{4\sqrt{4^2-4}}} = -\frac{12}{4\pi + \sqrt{3}}$$

$$y = \underbrace{f^{-1}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}_{=4} + f^{-1\prime}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\left(x - \left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right) = 4 + \frac{-12}{4\pi+\sqrt{3}}\left(x + \frac{7\pi}{6}\right)$$

Pl. $\qquad f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\arcsin(2x-5)}{3}\right)$

Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Mutassa meg, hogy a teljes értelmezési tartományban létezik az inverze, és írja fel az inverz függvényt!

Megoldás.

$D_f = \{x :\ |2x-5| \le 1\} = [2,3]$, mert akkor $\left|\dfrac{\arcsin(2x-5)}{3}\right| \le \dfrac{\pi}{6}$ miatt tg is értelmezett.

D_f-en $\dfrac{\arcsin(2x-5)}{3}$ értékkészlete $\left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right] \quad \Longrightarrow \quad R_f = \left[-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Mivel $2x-5$, arcsin és tg is szigorúan monoton növő, ezért f is az D_f-en $\Longrightarrow$ D_f-en $\exists\, f^{-1}$

$$y = \operatorname{tg}\underbrace{\frac{\arcsin(2x-5)}{3}}_{\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{arctg} y = \frac{\arcsin(2x-5)}{3} \quad \Longrightarrow \quad 2x - 5 = \sin(3\operatorname{arctg} y)$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sin(3\operatorname{arctg} y)$$

Tehát

$$f^{-1}(x) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sin(3\operatorname{arctg} x)\,; \qquad D_{f^{-1}} = R_f = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\ ; \qquad R_{f^{-1}} = D_f = [2,3]$$

Pl. $f(x) = \sqrt[3]{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x\right)}$

Adja meg az $x = 5$ pontot tartalmazó legbővebb intervallumot, amelyen a függvény invertálható, és írja fel itt az inverz függvényt!

$D_{f^{-1}} = ?$ $R_{f^{-1}} = ?$

Megoldás.

$x \in (4,6)$ esetén $\frac{\pi}{4}x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \implies \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x \in (0,\infty) = D_{\ln}$

Tehát $f : (4,6) \to (-\infty,\infty)$ egy-egyértelmű, mert az összetételben szereplő függvények mindegyike szigorúan monoton nő az érintett intervallumon $\implies$ f szigorúan monoton nő $\implies$ $\exists\, f^{-1}$.

Az inverz:

$$y = \sqrt[3]{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x\right)} \implies y^3 = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x\right) \implies \mathrm{e}^{(y^3)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}x\right) = \operatorname{tg}\Big(\underbrace{\frac{\pi}{4}x - \pi}_{\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}\Big)$$

$$\implies \operatorname{arctg}\mathrm{e}^{(y^3)} = \frac{\pi}{4}x - \pi \implies x = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\mathrm{e}^{(y^3)} + 4$$

Tehát

$$f^{-1}(x) = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\mathrm{e}^{(x^3)} + 4\,; \qquad D_{f^{-1}} = (-\infty,\infty)\,; \qquad R_{f^{-1}} = (4,6)$$

●●●

4.3. A differenciálszámítás középértéktételei

4.3.1. Szükséges feltétel lokális szélsőérték létezésére

(Differenciálható függvényre, az értelmezési tartomány belső pontjában)

D f-nek lokális maximuma (minimuma) van az értelmezési tartomány belső x_0 pontjában, ha $\exists\ K_{x_0,\delta} :\ f(x) \le f(x_0)\ \ (f(x) \ge f(x_0))$, ha $x \in K_{x_0,\delta}$.

T *Ha f az x_0 helyen differenciálható és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$. $(K_{x_0,\delta} \subset D_f)$*

B Pl. lokális maximumra (4.19.a ábra):

$$\lim_{h\to 0-} \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\ominus} = \underbrace{f'_-(x_0) = f'(x_0)}_{\text{deriválhatóság miatt}} \ge 0$$

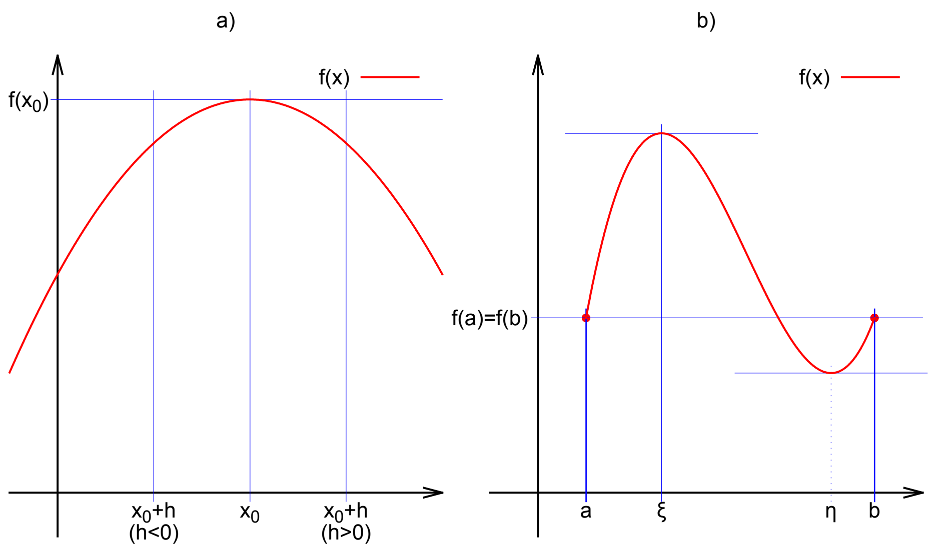
$$\lim_{h\to 0+} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\frac{-}{+}} = f'_+(x_0) = f'(x_0) \leq 0$$

■

$\Longrightarrow \quad f'(x_0) = 0 \quad$ (vízszintes érintő)

(A $\frac{-}{-}$, illetve a $\frac{-}{+}$ szimbólumokban a + és − jel a tört számlálójának és nevezőjének előjelére utal.)

4.19. ábra. *a*) Deriválható függvény lokális szélsőértékének szükséges feltétele a vízszintes érintő *b*) Magyarázó ábra a Rolle-tételhez



4.3.2. A differenciálszámítás középértéktételei

Ⓣ ***Rolle-tétel:*** *(4.19.b ábra)*
Ha f folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n és $f(a) = f(b)$, akkor

$$\exists\ \xi \in (a, b): \quad f'(\xi) = 0$$

Ⓑ Weierstrass II. tétele értelmében f-nek van minimuma és maximuma. Ha mindkettőt a végpontokban veszi fel, akkor $f(a) = f(b)$ miatt $f(x) \equiv$ konst. és így $\forall\, \xi \in (a, b)$-re $f'(\xi) = 0$. Ha valamelyiket az intervallum belsejében veszi fel, akkor ott az előző tétel értelmében $f'(\xi) = 0$ (ξ a szélsőértékhely).

Megjegyezzük, hogy ξ nem mindig egyértelmű, a 4.19.b ábrán például $f'(\xi) = f'(\eta) = 0$.

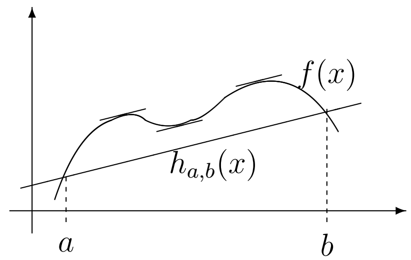
(T) *Lagrange-féle középértéktétel:*
Ha f folytonos $[a,b]$-n és differenciálható (a,b)-n, akkor $\exists\ \xi \in (a,b)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(B)

$$h_{a,b}(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = h(x)$$

$g(x) := f(x) - h(x) \qquad g(a) = g(b) = 0;$
g folytonos $[a,b]$-n, differenciálható (a,b)-n



$$\overset{\text{Rolle-t.}}{\Longrightarrow} \quad \exists \xi \in (a,b):\ g'(\xi) = f'(\xi) - \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{h'(\xi)} = 0$$

(T) *Cauchy-féle középértéktétel:*
Ha f és g folytonos $[a,b]$-n, differenciálható (a,b)-n és $g'(x) \neq 0$, ha $x \in (a,b)$, akkor $\exists\ \xi \in (a,b)$:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

(B)

$$h(x) := (f(b)-f(a))\ g(x) - (g(b)-g(a))\ f(x)$$

$$h(a) = (f(b)-f(a))\ g(a) - (g(b)-g(a))\ f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$
$$h(b) = (f(b)-f(a))\ g(b) - (g(b)-g(a))\ f(b) = -f(a)g(b) + f(b)g(a)$$

h folytonos $[a,b]$-n, differenciálható (a,b)-n és
$h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b) \quad \overset{\text{Rolle-t.}}{\Longrightarrow} \quad \exists \xi \in (a,b):\ h'(\xi) = 0$, vagyis

$$(f(b)-f(a))\ g'(\xi) - (g(b)-g(a))\ f'(\xi) = 0 \qquad \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy $g(b) - g(a) \neq 0$, ellenkező esetben $g(a) = g(b)$ miatt g-re alkalmazható lenne a Rolle-tétel és akkor $\exists\ \xi \in (a,b)$, melyre $g'(\xi) = 0$ lenne. Így rendezéssel megkapjuk az állítást.

Ⓜ A Lagrange-féle középértéktétel a Cauchy-féle középértéktétel speciális esete $(g(x) = x)$, a Rolle-tétel pedig a Lagrange speciális esete.

Ⓣ *Ha f folytonos $[a, b]$-n, differenciálható (a, b)-n és ott $f'(x) \equiv 0$, akkor*

$$f(x) \equiv c \qquad x \in [a, b]\text{-re}$$

Ⓑ A Lagrange-féle középértéktétel miatt $\forall\, [x_1, x_2] \subset [a, b]$-re $\exists\, \xi \in (x_1, x_2)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \qquad \xi \in (a, b)$$

De mivel $f'(\xi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2) \quad \forall\, x_1 \neq x_2$-re $\quad \Longrightarrow \quad f(x) \equiv$ konst. ■

Ⓣ ***Az integrálszámítás I. alaptétele:***
Ha f folytonos $[a, b]$-n, differenciálható (a, b)-n és

$$f'(x) = g'(x), \qquad \text{ha } \ x \in (a, b),$$

akkor $\exists\, C \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = g(x) + C \qquad \forall\, x \in [a, b]$$

Tehát csak egy állandóban különböznek.

Ⓑ $h(x) := f(x) - g(x)$-re kell alkalmazni az előző tételt.

4.3.3. Feladatok

1. Alkalmazható-e az
$$f(x) = x \cdot \sin \sqrt[3]{x^2}$$
függvényre a Lagrange-féle középértéktétel a $[-1, 1]$ intervallumon?

2. Alkalmazható-e a Rolle-tétel az
$$f(x) = |\operatorname{arctg} x|$$
függvényre a $[-1, 1]$ intervallumon?

3. Alkalmazható-e f-re a Lagrange-féle középértéktétel?
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} + \dfrac{1}{(x-1)^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \qquad -1 \leq x \leq 0$$
Ha igen, $\xi = ?$

4. Határozza meg a deriválás elvégzése nélkül a

$$p(x) = (x-2{,}1)(x-2{,}3)(x-2{,}5)(x-2{,}7)$$

polinom deriváltjának gyökeit 0,1-nél kisebb hibával!

5. Bizonyítsa be, hogy

   a) $|\sin a - \sin b| \le |a-b|\,, \quad$ ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$.

   b) $\dfrac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \dfrac{b-a}{\cos^2 b}\,, \quad$ ahol $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$

   c) $\operatorname{tg} x - 1 > 2x - \dfrac{\pi}{2}\,, \quad$ ha $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$

   d) $\operatorname{arsh}(1+x^2) < 1 + \operatorname{arsh} x^2$

   e) $\sin x \le \left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,; \qquad \dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

6. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{\pi}{4}(x-1), & x \ne 1 \\ b, & x = 1 \end{cases}$

   a) Adja meg b értékét úgy, hogy f-re a $[0,1]$ intervallumon alkalmazható legyen a Rolle-féle középértéktétel!

   b) Keressen egy olyan értéket, amely a Rolle-tétel értelmében létezik!

4.4. L'Hospital-szabály

($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ alakra alkalmazható közvetlenül.)

T ***L'Hospital-szabály:***
Legyen f és g differenciálható $\dot{K}_{\alpha,\delta}$-ban és itt $g(x) \ne 0$, $g'(x) \ne 0$ és

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$$

Ha $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta\,,$ *akkor* $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$.
(Itt $\alpha = x_0,\ x_0+0,\ x_0-0,\ +\infty,\ -\infty$ lehet, $\quad \beta = b,\ +\infty, -\infty$ lehet).

B $\alpha = x_0$-ra bizonyítjuk.
$f(x_0) := 0,\ g(x_0) := 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad \text{(Cauchy-féle k.é.t.)} \qquad \xi \in (x, x_0) \qquad (\text{ill. } \xi \in (x_0, x))$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$ ha ez utóbbi létezik (véges vagy ∞)

Hasonló tétel bizonyítható $\frac{\infty}{\infty}$ alakra is.

Határozatlan alakok:

$\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$: L'H közvetlenül alkalmazható.

$0\cdot\infty$: átalakítás után: $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \vee \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ alakkal próbálkozunk.

$\infty-\infty$: $h(x):=\dfrac{1}{f(x)},\ k(x):=\dfrac{1}{g(x)},\quad f(x)-g(x)=\dfrac{1}{h(x)}-\dfrac{1}{k(x)}=\dfrac{k(x)-h(x)}{h(x)\,k(x)}\qquad\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$0^0, 1^\infty, \infty^0$: $\quad (f(x))^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$

$g(x)\cdot\ln f(x)$ határozatlan alakra már a megismert módon dolgozhatunk.

Példák:

Pl. $$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

Pl. $$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}\overset{\text{L'H}}{=}\dots\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0\qquad(n\text{ lépés})$$

Pl. $$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{x-\frac{\pi}{2}}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x(-\sin x)}{1}=0$$

Pl. $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-xe^{\cos x}}{-1-\sin x+\cos x}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x-e^{\cos x}+xe^{\cos x}\sin x}{-\cos x-\sin x}=\frac{3-e}{-1}$$

Pl. $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x-x}{x^3}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x-1}{3x^2}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{6x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x}{6}=\frac{1}{6}$$

Pl. $$\boxed{\lim_{x\to 1}(\ln x)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\cdot\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$$

Pl. $$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \frac{1}{2}$$

Pl. $$\boxed{\lim_{x\to 0}(\cos 5x)^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos 5x)^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos 5x} = ?$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 5x}{x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5\sin 5x}{\cos 5x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-25}{2}\cdot\underbrace{\frac{\sin 5x}{5x}}_{\substack{\downarrow\\ 1}}\cdot\frac{1}{\cos 5x} = -\frac{25}{2}$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{x\to 0}(\cos 5x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{25}{2}}$$

Pl. $$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{3}{\operatorname{ctg} x}} = ?}$$

$$(1+\cos x)^{\frac{3}{\operatorname{ctg} x}} = e^{\ln(1+\cos x)^{\frac{3}{\operatorname{ctg} x}}} = e^{\frac{3\ln(1+\cos x)}{\operatorname{ctg} x}} \xrightarrow[\substack{\downarrow\\ \frac{\pi}{2}}]{x} e^{3\cdot 1} = e^3\text{, mert}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+\cos x)}{\operatorname{ctg} x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{1+\cos x}\cdot(-\sin x)}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{1+\cos x} = 1$$

Pl. Legyen $f(x) = (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}}$, ha $x\in(0,1]$, $\qquad f(0)=b$.

1. $f'(x) = ?$, ha $x\in(0,1)$
2. $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = ?$
3. Megválasztható-e b értéke úgy, hogy f-re alkalmazható legyen a Lagrange-féle középértéktétel a $[0,1]$ intervallumon?

   (Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt!)

Megoldás.

1. $f(x) = e^{\frac{1}{x^4}\ln\cos x^2}$

$$f'(x) = (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}}\left(\frac{\ln\cos x^2}{x^4}\right)' =$$

$$= (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}} \quad \frac{\frac{1}{\cos x^2}(-\sin x^2)\cdot 2x\cdot x^4 - (\ln\cos x^2)\cdot 4x^3}{x^8}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln\cos x^2}{x^4} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\dfrac{1}{\cos x^2}(-\sin x^2)\cdot 2x}{4x^3} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{-1}{2\cos x^2}\underbrace{\dfrac{\sin x^2}{x^2}}_{\substack{\downarrow\\ 1}} = -\dfrac{1}{2}$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x^4}\cdot\ln\cos x^2} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

3. Ha $f(0) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, azaz $b = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, akkor f folytonos $[0,1]$-ben és differenciálható $(0,1)$-ben, így alkalmazható a Lagrange-féle középértéktétel.

Pl. A derivált definíciója alapján mutassa meg, hogy az
$$f(x) = \sqrt{\operatorname{ch}\sqrt{x}}$$
függvénynek az $x = 0$-ban létezik a jobb oldali deriváltja!
Írja fel az $x = 0$ pontbeli jobb oldali érintő egyenesének egyenletét!

Megoldás.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{\operatorname{ch}\sqrt{x}}-1}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch}\sqrt{x}}}\operatorname{sh}\sqrt{x}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}\sqrt{x}}}\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4},$$

mert $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} u}{u} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} u}{1} = 1$, és most $u = \sqrt{x} \to 0$.

$$y_{\text{é}} = f(0) + f'_+(0)(x-0) = 1 + \frac{1}{4}x, \qquad x \geq 0$$

4.5. Nyílt intervallumon differenciálható függvények tulajdonságai

M A nyílt intervallum $I = (a,b)$ lehet $(-\infty,\infty)$ is.

Néhány definíció:

Ⓓ f monoton nő I-n: $\forall\, x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2:\ f(x_1) \le f(x_2)$.

Ⓓ f szigorúan monoton nő I-n: $\forall\, x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2:\ f(x_1) < f(x_2)$.

Ⓓ f monoton csökken I-n: $\forall\, x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2:\ f(x_1) \ge f(x_2)$.

Ⓓ f szigorúan monoton csökken I-n: $\forall\, x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2:\ f(x_1) > f(x_2)$.

Ⓓ f alulról konvex I-n, ha $\forall\, x_1, x_2 \in I$-re $f(x) \le h_{x_1,x_2}(x)$, ha $x \in (x_1, x_2)$.
((h_{x_1,x_2} az x_1-en és x_2-n áthaladó húr.)

Ⓓ f alulról konkáv I-n, ha $\forall\, x_1, x_2 \in I$-re $f(x) \ge h_{x_1,x_2}(x)$, ha $x \in (x_1, x_2)$.
((h_{x_1,x_2} az x_1-en és x_2-n áthaladó húr.)

Ⓓ f-nek x_0-ban inflexiós pontja van, ha f az x_0-ban folytonos, és itt konvex és konkáv szakaszok találkoznak.

T₁ *Ha f differenciálható I-n:*

1. f *monoton nő* $\iff$ $f'(x) \ge 0$

   f *szigorúan monoton nő* $\Longleftarrow$ $f'(x) > 0$

2. f *monoton csökken* $\iff$ $f'(x) \le 0$

   f *szigorúan monoton csökken* $\Longleftarrow$ $f'(x) < 0$

Ⓑ A megértést segíti a 4.20. ábra.

1. $\Longrightarrow$:

$$f \text{ monoton nő} \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ge 0 \qquad \left(\frac{+}{+} \text{ vagy } \frac{-}{-}\text{alakú}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \ge 0$$

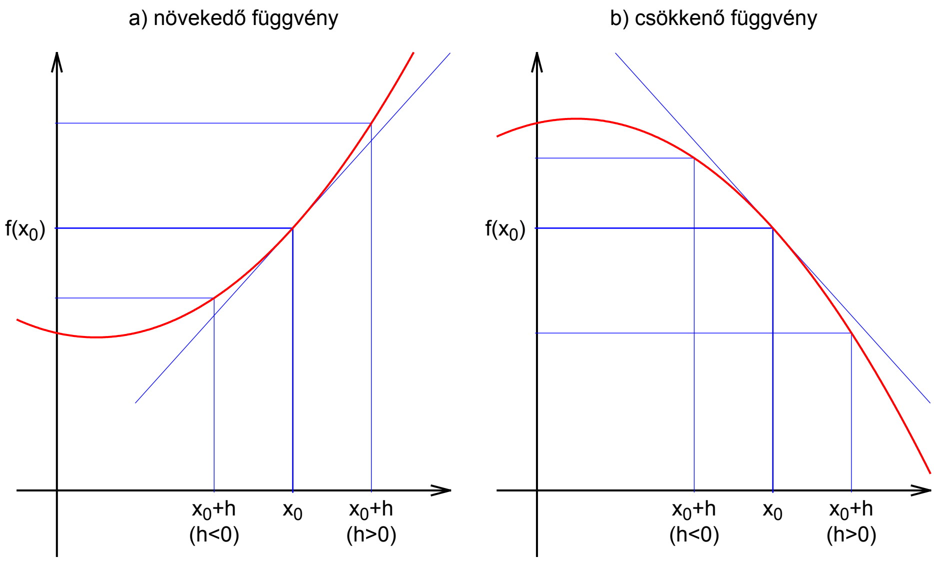
$\Longleftarrow$:

$x_1, x_2 \in I$ és $x_1 < x_2$: $[x_1, x_2]$-ben alkalmazható a Lagrange középértéktétel:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) \ge 0 \ \text{(a feltétel miatt)} \quad \xi \in (x_1, x_2).$$

Mivel $x_2 - x_1 > 0$, ezért $f(x_2) - f(x_1) \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) \ge f(x_1)$.

4.20. ábra. A derivált előjelének és a monotonitásnak a kapcsolata



2. Bizonyítása lényegében megegyezik az előzővel.

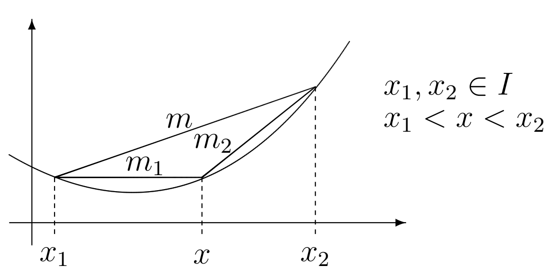
   Itt $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$-ból következik, hogy $f(x_2) > f(x_1)$. Tehát szigorúan monoton. ■

T₂ *Ha f differenciálható I-n:*

1. f' monoton nő $\iff$ f konvex

2. f' monoton csökken $\iff$ f konkáv

B



1. Csak $\Longleftarrow$ irányban bizonyítjuk. Az ábra alapján a konvexitásból következik, hogy $\forall\, x \in (x_1, x_2)$-re:

$$m_1 \le m \le m_2.$$

Így $\lim\limits_{x\to x_1} m_1 = f'(x_1) \le m \le f'(x_2) = \lim\limits_{x\to x_2} m_2$, vagyis $f'(x_1) \le f'(x_2)$, tehát f' monoton nő.

2. A második állítás bizonyítása az elsőhöz hasonló. ■

M

$$f'(x_1) \leq m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

Ebből

$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \quad \forall\, x_1 < x_2$-re, ill.

$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \quad \forall\, x_1 < x_2$-re.

Tehát konvex görbe az érintője felett halad az érintési pontot kivéve.
(Konkáv görbe pedig az érintője alatt halad az érintési pontot kivéve.)

T_3 *Ha f kétszer differenciálható I-n:*

1. $f''(x) \geq 0 \iff f$ *konvex*

2. $f''(x) \leq 0 \iff f$ *konkáv*

B

1. $f''(x) \geq 0 \overset{\mathrm{T_1\ miatt}}{\Longrightarrow} f'$ monoton nő $\overset{\mathrm{T_2\ miatt}}{\Longrightarrow} f$ konvex

   $f''(x) \geq 0 \overset{\mathrm{T_1\ miatt}}{\Longleftarrow} f'$ monoton nő $\overset{\mathrm{T_2\ miatt}}{\Longleftarrow} f$ konvex ■

M Az állítások igazak maradnak, ha I zárt és f a zárt intervallumban folytonos, nyíltban differenciálható.

Példák

Pl. $\boxed{f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{7}{2}x^2 + 6x}$

$$f'(x) = x^2 - 7x + 6 = (x-6)(x-1) \qquad f''(x) = 2x - 7$$

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 6)$	6	$(6\,, \infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

$f(1) = \dfrac{17}{6} \qquad f(6) = -18$

x	$(-\infty, \frac{7}{2})$	$\frac{7}{2}$	$(\frac{7}{2}, \infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	infl. pont	$\cup$

$$f\left(\frac{7}{2}\right) < 0$$

Pl. $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (4x+1)$

1. Adja meg azokat a nyílt intervallumokat, amelyeken f monoton növekedő, illetve fogyó.
2. Adja meg azokat a nyílt intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv.

Megoldás.

$$f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{2x} = 2 \quad \Longrightarrow \quad 2x = \ln 2 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$$

x	$(-\infty, \ln\sqrt{2})$	$\ln\sqrt{2}$	$(\ln\sqrt{2}, \infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$f''(x) = 4\mathrm{e}^{2x} > 0$

f monoton csökken $(-\infty, \ln\sqrt{2})$-n, monoton nő $(\ln\sqrt{2}, \infty)$-en.
f konvex $(-\infty, \infty)$-en.

Pl. Legyen

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x - 1}$$

Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol f monoton nő, f monoton csökken, f konvex, f konkáv!

Megoldás.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Nem intervallum!)

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1) - (\mathrm{e}^x - 2)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} > 0$$

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x\ (\mathrm{e}^x - 1)^2 - \mathrm{e}^x\ 2(\mathrm{e}^x - 1)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^4} = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^4}\ (1 - \mathrm{e}^{2x})$$

$f'(x) > 0$: f szigorúan monton nő a $(-\infty, 0)$ és a $(0, \infty)$ intervallumon.
$f''(x) > 0$, ha $x < 0$: $(-\infty, 0)$ intervallumon f konvex
$f''(x) < 0$, ha $x > 0$: $(0, \infty)$ intervallumon f konkáv

4.6. Differenciálható függvények lokális tulajdonságai

D f x_0-ban lokálisan növekedő, ha $\exists\, K_{x_0,\delta}$:
$x \in (x_0-\delta, x_0)$-ra $f(x) \le f(x_0)$ és $x \in (x_0, x_0+\delta)$-ra $f(x_0) \le f(x)$.

D f x_0-ban lokálisan csökkenő, ha $\exists\, K_{x_0,\delta}$:
$x \in (x_0-\delta, x_0)$-ra $f(x) \ge f(x_0)$ és $x \in (x_0, x_0+\delta)$-ra $f(x_0) \ge f(x)$.

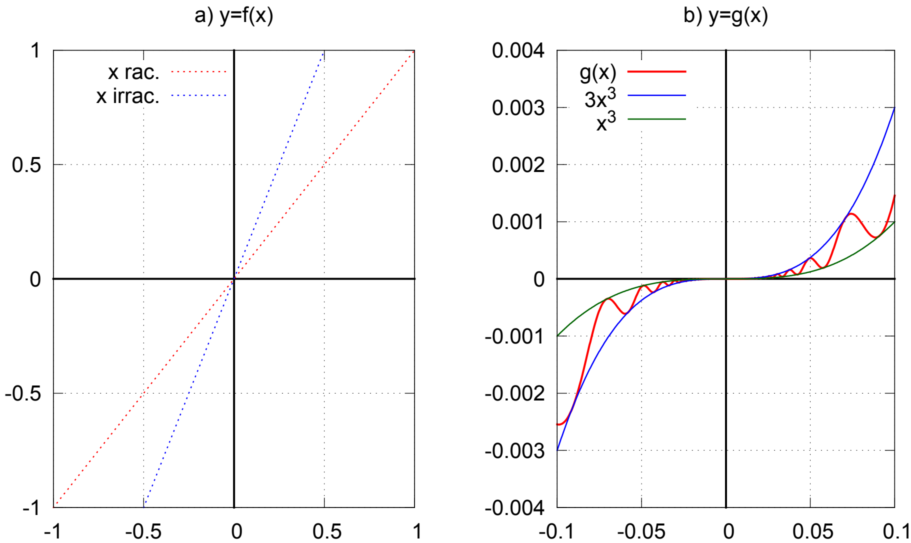
A következő példában két olyan függvényt mutatunk, melyek az origóban lokálisan növekedőek, mégsincs az origónak olyan környezete, melyben a függvény növekedő lenne.

Pl.

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{ha } x\in\mathbb{Q} \text{ (racionális)};\\ 2x, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ (irracionális)};\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x^3\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & \text{ha } x\ne 0;\\ 0, & \text{ha } x=0;\end{cases}$$

A 4.21. ábráról látható, hogy mindkét függvény lokálisan növekedő az origóban, de nem létezik olyan $\delta>0$, melyre a függvények a $(-\delta,\delta)$ nyílt intervallumon monoton növekedőek lennének.

4.21. ábra. *a)* Az $f(x)$ függvény vázlatos grafikonja *b)* A $g(x)$ függvény grafikonja



Ⓣ *Ha f differenciálható x_0-ban és*

1. *f lokálisan nő x_0-ban* $\Longrightarrow$ $f'(x_0) \geq 0$
2. *f lokálisan nő x_0-ban* $\Longleftarrow$ $f'(x_0) > 0$

Ⓑ

1. $$\lim_{h\to -0} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\overset{-}{=}} = f'_-(x_0) = f'(x_0) \geq 0$$

$$\lim_{h\to +0} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\overset{+}{+}} = f'_+(x_0) = f'(x_0) \geq 0$$

2. $$\underbrace{f'(x_0)}_{A} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\circledast} > 0 \qquad \left(A-\varepsilon < \circledast < A+\varepsilon, \quad \varepsilon := \frac{f'(x_0)}{2}\right)$$

$$0 < \frac{f'(x_0)}{2} < \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} < \frac{3}{2}f'(x_0)\,, \quad \text{ha } |h| < \delta(\varepsilon).$$

Tehát $K(x_0,\delta)$-ban $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ lokálisan nő x_0-ban.

Ⓣ $K(x_0,\delta) \subset D_f$ *(belső pont);* $K(x_0,\delta) \subset D_{f'}$
Differenciálható függvény esetén lokális szélsőérték létezésének

1. *szükséges feltétele:* $f'(x_0) = 0$
2. *elégséges feltétele:*
   a) *$f'(x_0) = 0$ és f' előjelet vált x_0-ban (tehát f' lokálisan csökken vagy lokálisan nő x_0-ban)*
   b) *Ha f kétszer differenciálható x_0-ban: $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \neq 0$ ($f''(x_0) > 0$: lok. min.; $f''(x_0) < 0$: lok. max.)*

Ⓑ

1. a Rolle-tétel előtt volt
2. a) f' lokálisan csökken:

	$(x_0-\delta, x_0)$	x_0	$(x_0, x_0+\delta)$
f'	$+\ (\geq 0)$	0	$-\ (\leq 0)$
f	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

f' lokálisan nő:

	$(x_0-\delta, x_0)$	x_0	$(x_0, x_0+\delta)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

b) $f''(x_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f'$ lok. nő x_0-ban és $f'(x_0) = 0 \Longrightarrow$ lok. min.
$f''(x_0) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f'$ lok. csökken x_0-ban és $f'(x_0) = 0 \Longrightarrow$ lok. max. ∎

Ⓜ A tétel második pontja csak elégséges feltételt ad, ezt mutatja az alábbi példa:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Az $f(x)$ függvény grafikonja a 4.22 ábrán látható. A függvény mindenütt deriválható. Az origóban a definícióval kell dolgoznunk.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \quad \underbrace{\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)}_{\text{korlátos}} = 0$$

Tehát a szükséges feltétel teljesül.
De f' nem vált előjelet $x_0 = 0$-ban, mert annak minden jobb és bal oldali környezetében is felvesz $+$ és $-$ értékeket is annak megfelelően, hogy minden ilyen környezetben vannak f-nek szigorúan monoton növekedő és csökkenő szakaszai. Mégis van lokális szélsőértéke $x_0 = 0$-ban, sőt abszolút minimuma van itt.

Ⓣ $K(x_0, \delta) \subset D_{f''}$
Kétszer differenciálható függvény esetén inflexiós pont létezésének

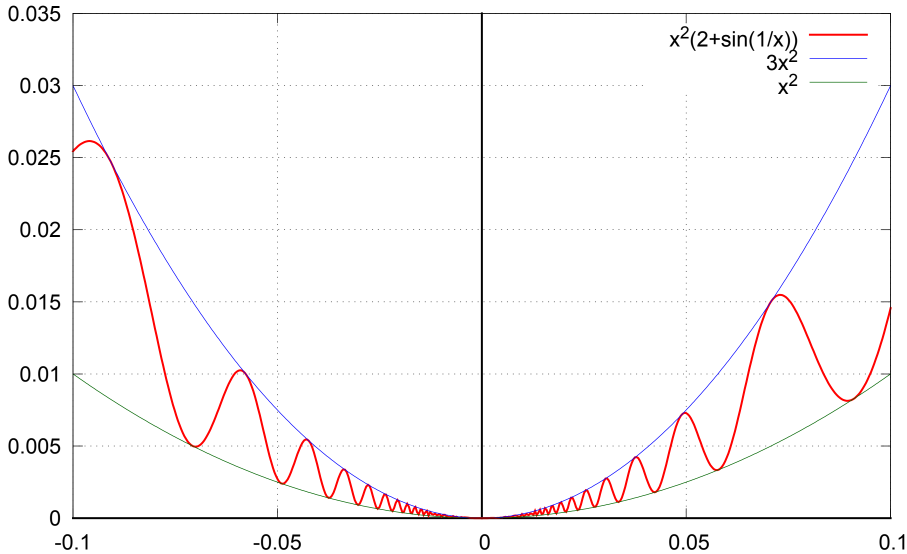
1. *szükséges feltétele:* $f''(x_0) = 0$

2. *elégséges feltétele:*

   a) $f''(x_0) = 0$ *és* f'' *előjelet vált* x_0*-ban (*f'' *lokálisan nő vagy lokálisan csökken* x_0*-ban)*

   b) $f''(x_0) = 0$ *és* $f'''(x_0) \neq 0$

4.22. ábra. Az $f(x)$ függvény grafikonja



Ⓑ

1. Az inflexiós pont konvex és konkáv szakaszokat választ el.
Ha f konvex, akkor f' monoton nő. Ha f konkáv, akkor f' monoton csökken. Tehát f'-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van, hiszen $\nearrow\searrow$ vagy $\searrow\nearrow$ típusú $\Longrightarrow$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f'\Big|_{x_0} = f''(x_0) = 0$$

2. a)

	$(x_0-\delta, x_0)$	x_0	$(x_0, x_0+\delta)$
f''	$+$	0	$-$
f	$\cup$	infl. pont	$\cap$

	$(x_0-\delta, x_0)$	x_0	$(x_0, x_0+\delta)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	infl. pont	$\cup$

b) Ha $f'''(x_0) > 0 \Longrightarrow f''$ növekedően halad át x_0-on, tehát a 2. táblázat igaz.
Ha $f'''(x_0) < 0 \Longrightarrow f''$ csökkenően halad át x_0-on, tehát az 1. táblázat igaz. ■

Pl. Igaz-e , hogy $g'(x_0) = 0$ esetén g-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van vagy inflexiója?

Megoldás.
Nem igaz. Például

$$g(x) = \begin{cases} x^3\left(2+\sin\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0\,, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

A 4.21. ábrán látható a függvény (b) ábra).

g mindenütt deriválható, $x = 0$-ban a definícióval:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{x^2}_{\downarrow \atop 0} \quad \underbrace{\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)}_{\text{korlátos}} = 0$$

Ennek ellenére a függvénynek sem lokális szélsőértéke, sem inflexiója nincs az origóban.

De kimondható a következő tétel:

T *Ha f x_0-ban legalább n-szer differenciálható és*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots\ f^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \quad \text{de} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0\,,$$

akkor

f-nek inflexiós pontja van $x = 0$-ban, ha n páratlan,

f-nek lokális szélsőértéke van $x = 0$-ban, ha n páros ($f^{(n)}(x_0) > 0$ esetén lokális minimum, $f^{(n)}(x_0) < 0$ esetén lokális maximum).

(A tételt nem bizonyítjuk.)

Példák

Pl. $f(x) = (x-1)^3(x+3)^2$ Keresse meg a függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás.

$$f'(x) = 3(x-1)^2(x+3)^2 + (x-1)^3 \cdot 2(x+3) =$$
$$= (x-1)^2(x+3)(3(x+3)+2(x-1)) = (x-1)^2(x+3)(5x+7)$$

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-\frac{7}{5})$	$-\frac{7}{5}$	$(-\frac{7}{5},1)$	1	$(1,\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$		$\nearrow$

Pl. Határozza meg az $f(x) = \cos^3 x - 3\cos x$ függvény inflexiós pontjait!

Megoldás.
$f'(x) = 3\cos^2 x(-\sin x) + 3\sin x = -3\cos^2 x \sin x + 3\sin x$
$f''(x) = 6\cos x \sin^2 x - 3\cos^3 x + 3\cos x = 3\cos x\,(2\sin^2 x \underbrace{-\cos^2 x + 1}_{=\sin^2 x}) = 3^2 \cos x \sin^2 x$

$f''(x) = 0$:

1. $\cos x = 0: \; x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ inflexiós helyek, mert f'' előjelet vált ($k \in \mathbb{Z}$).
2. $\sin x = 0: \; x = k\pi$ pontokban nincs inflexió, mert f'' nem vált előjelet.

Pl.

$$f(x) = \frac{x-4}{(x+2)^3}$$

a) Hol és milyen típusú szakadása van a függvénynek?

b) Adja meg azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, melyeken f szigorúan monoton nő, illetve szigorúan monoton csökken!
Hol és milyen jellegű lokális szélsőértéke van?

Megoldás.

a) ÉT.: $x \neq -2$ (Egyébként a függvény folytonos.)

$$f(-2+0) = \lim_{x\to -2+0} \frac{\overbrace{x-4}^{\substack{-6\\ \uparrow}}}{\underbrace{(x+2)^3}_{\substack{\downarrow\\ +0}}} = -\infty\,, \qquad f(-2-0) = \lim_{x\to -2-0} \frac{\overbrace{x-4}^{\substack{-6\\ \uparrow}}}{\underbrace{(x+2)^3}_{\substack{\downarrow\\ -0}}} = \infty$$

Tehát $x = -2$-ben másodfajú szakadás van.

b) $$f'(x) = \frac{1\cdot(x+2)^3 - (x-4)\cdot 3(x+2)^2}{(x+2)^6} = \frac{x+2 - 3(x-4)}{(x+2)^4} =$$

$$= \frac{-2x+14}{(x+2)^4} = \frac{2\,(7-x)}{(x+2)^4}$$

Az értelmezési tartományban ($x \neq -2$) a nevező a páros kitevőnek köszönhetően mindig pozitív, így elég a számláló jeltartását vizsgálni.

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,7)$	7	$(7,\infty)$
f'	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	szak.hely	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

Tehát f szigorúan monoton nő: $(-\infty,-2)$ és $(-2,7)$ intervallumokon,

f szigorúan monoton csökken: $(7,\infty)$-en.

$x = 7$-ben lokális maximum van, mert f növekvőből csökkenőbe megy át.

Pl. Vizsgálja meg az $f(x) = \sqrt[x]{x}$ függvényt $(x > 0)$ monotinitás szempontjából, határozza meg a függvény lokális szélsőértékeit, valamint az origóban és a végtelenben vett határértékét!

Megoldás.

$$f(x) = x^{1/x} = e^{\ln x^{1/x}} = e^{\frac{1}{x}\,\ln x} \quad\Longrightarrow\quad D_f = (0\,,\,\infty)$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}\,\ln x} = \lim_{u\to -\infty} e^{u} = 0$$

(A kitevő $-\infty\cdot\infty$ alakú, így $-\infty$-hez tart.)

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\,\ln x} = e^{0} = 1\ , \text{ mert}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\frac{\infty}{\infty}\text{ alakú}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$f'(x) = \left(e^{\frac{\ln x}{x}}\right)' = e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \sqrt[x]{x}\,\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x\cdot 1}{x^2} = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}\,(1-\ln x)$$

$$f'(x) = 0\,, \quad\text{ha}\quad 1-\ln x = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = e$$

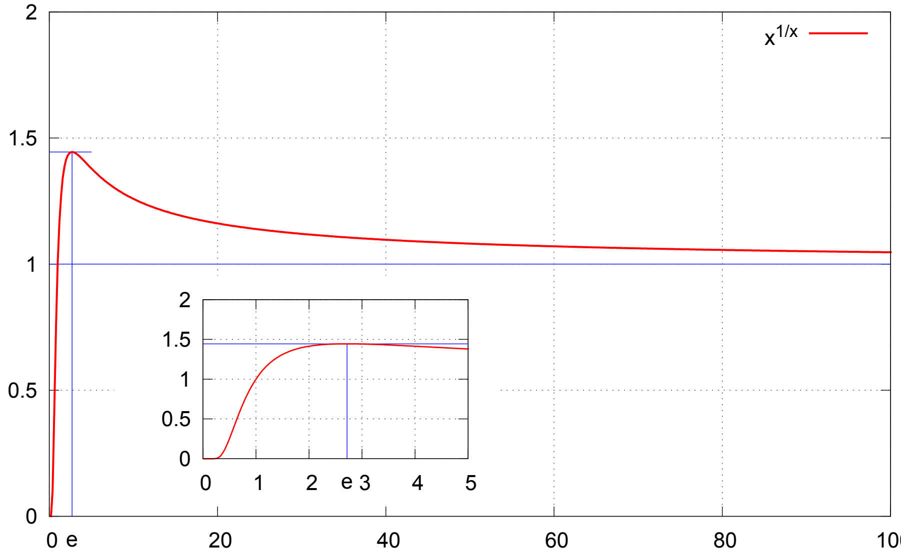
x	$(0,e)$	e	(e,∞)
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

A függvény grafikonja a 4.23. ábrán látható.

Pl. Határozza meg az $a_n = \sqrt[n]{n}$ sorozat legnagyobb elemét!

Az előző példában vázlatosan ábrázoltuk az $f(x) = \sqrt[x]{x}$ függvényt. Látható, hogy a maximális függvényérték az $f(e) = \sqrt[e]{e}$ szám $\Longrightarrow$, a sorozat legnagyobb eleme $\sqrt{2}$ és $\sqrt[3]{3}$ közül a nagyobbik.

4.23. ábra. Az $f(x) = \sqrt[x]{x}$ függvény grafikonja



Tehát a sorozat legnagyobb eleme: $\sqrt[3]{3}$

Ⓣ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Ⓑ

$f(x) := \sqrt[x]{x}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ \ln x} = e^0 = 1 \text{ , mert}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln x = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\frac{\infty}{\infty}\text{ alakú}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Az átviteli elv miatt tetszőleges $x_n \to \infty$ pontsorozat esetén $f(x_n) \to 1$.

Így $x_n = n$ választással adódik, hogy $f(x_n) = \sqrt[n]{n} \to 1$.

4.7. Implicit megadású függvények deriválása

Vizsgáljunk két mennyiséget, x-et és y-t, melyekről tudjuk, hogy valamilyen jól meghatározott módon függnek egymástól. Két lehetőség van e függés megadására. Az első, ha az egyik változót, például y-t megadjuk, mint x függvényét $y = f(x)$ alakban. Ilyenkor *explicit* függvénymegadásról beszélünk. Sokszor azonban nincs mód erre, ilyenkor egy

$\Phi(x, y) = 0$ összefüggést adunk meg, mely jellemzi az összetartozó x és y értékeket. Ilyenkor *implicit* kapcsolatmegadásról beszélünk.

Felmerül a kérdés, hogy explicit megadás hiányában elő lehet-e állítani a $\frac{dy}{dx}$ differenciálhányadost. Meglepő módon a kérdésre igenlő választ adhatunk, ha csak egy ismert (x_0, y_0) helyen keressük a differenciálhányadost. Sőt, egy rögzített pontban elvben tetszőleges magasabb rendű derivált is megkapható az úgynevezett *implicit deriválás* módszerével. A módszert a következő példákon mutatjuk be:

Pl. A deriválható $y = y(x)$ függvény kielégíti a

$$(2x+1)\ \ln(2-y^2) + \frac{x}{y} + x^2 = 0$$

implicit függvénykapcsolatot, $y(-1) = 1$.
Írja fel ezen függvény $x_0 = -1$ pontbeli érintőegyenesének egyenletét!

Megoldás.
Ellenőrizzük, hogy a $(-1, 1)$ pont kielégíti-e az adott egyenletet!

$$-1 \cdot \ln 1 + \frac{-1}{1} + 1 = 0 \qquad \text{valóban teljesül.}$$

Az érintőegyenes egyenlete: $y_é = \underbrace{y(-1)}_{=1} + \underbrace{y'(-1)}_{=\,?}(x-(-1))$

A deriváltat a

$$(2x+1)\ \ln\big(2-y^2(x)\big) + \frac{x}{y(x)} + x^2 = 0$$

egyenlet x szerinti deriválásával kaphatjuk meg.

$$2 \cdot \ln\big(2-y^2(x)\big) + (2x+1) \cdot \frac{1}{2-y^2(x)}\ (-2\,y(x)\ y'(x)) + \frac{1 \cdot y(x) - x \cdot y'(x)}{y^2(x)} + 2x = 0$$

Elvégezve az $x = -1$ helyettesítést és figyelembe vesszük, hogy $y(-1) = 1$:

$$2 \cdot \ln 1 + (-1)\,\frac{1}{2-1}\ (-2 \cdot 1 \cdot y'(-1)) + \frac{1-(-1)y'(-1)}{1^2} + 2(-1) = 0$$

$$2\,y'(-1) + 1 + y'(-1) - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'(-1) = \frac{1}{3}$$

Így az érintőegyenes egyenlete: $y_é = 1 + \dfrac{1}{3}\,(x+1)$

Pl. Az $y = y(x)$ kétszer folytonosan differenciálható függvény grafikonja átmegy az $x = 0,\ y = 1$ ponton és kielégíti az

$$y + x \ln y + 2x^2 - x + \ln(1 + x) = 1$$

implicit egyenletet, ha $x > -1$.

Milyen lokális tulajdonsága van f-nek az $x = 0$-ban?

Megoldás.
Mindkét oldalt x szerint deriválva:

$$y'(x) + \ln(y(x)) + x\frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) + 4x - 1 + \frac{1}{1 + x} = 0$$

$x = 0,\ y(0) = 1$-et behelyettesítve:
$y'(0) + \ln 1 + 0 + 0 - 1 + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'(0) = 0 \quad$ lok. szé. lehet.
Ismét deriválva:

$$y''(x) + \frac{1}{y(x)}y'(x) + 1 \cdot \frac{1}{y(x)}y'(x) + x\frac{-y'(x)}{y^2(x)}y'(x) + x\frac{1}{y(x)} \cdot y''(x) + 4 - \frac{1}{(1 + x)^2} = 0$$

Behelyettesítve:
$y''(0) + 4 - 1 = 0\,, \quad y''(0) = -3 \quad \Longrightarrow \quad$ lok. max. van $x = 0$-ban (értéke $y(0) = 1$).
Mivel $y''(0) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ nincs inflexiós pont itt.

Pl. Milyen lokális tulajdonsága van az f függvénynek az $x_0 = 0$ pontban, ha f kétszer folytonosan differenciálható és az $y = f(x)$ egyváltozós függvény kielégíti az

$$x \operatorname{sh} x - y \operatorname{ch} y = 0$$

implicit függvénykapcsolatot?

Megoldás.
$0 \cdot \operatorname{sh} 0 - y_0 \operatorname{ch} y_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_0 = 0 = f(0)$

$$\operatorname{sh} x + x \cdot \operatorname{ch} x - y' \operatorname{ch} y - y(\operatorname{sh} y) \cdot y' = 0$$

$0 + 0 - y' - 0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'(0) = 0$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x - y'' \operatorname{ch} y - y'(\operatorname{sh} y)y' - y'(\operatorname{sh} y)y' - y(\operatorname{ch} y)y'y' - y(\operatorname{sh} y)y'' = 0$$

$1 + 1 + 0 - y''(0) - 0 - 0 - 0 - 0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y''(0) = 2$ és $y'(0) = 0$, tehát lokális minimuma van.

4.8. Egyenes aszimptota $\pm\infty$-ben

D A $g(x) = Ax + B$ egyenes az f függvény lineáris aszimptotája a $+\infty$-ben ($-\infty$-ben), ha

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = 0 \qquad (\lim_{x\to-\infty}(f(x) - g(x)) = 0)$$

Pl. $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x}$-nek $g(x) = x + 2$ lineáris aszimptotája $\pm\infty$-ben.

Ha $\exists\ +\infty$-ben aszimptota:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - Ax - B) = \lim_{x\to\infty}\Bigg(\underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{x} \cdot \left(\frac{f(x)}{x} - A - \frac{B}{x}\right)\Bigg) = 0 \ \text{ miatt}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - A - \frac{B}{x}\right) = 0\text{-nak fenn kell állnia.}$$

Vagyis $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = A$ szükséges feltétele az aszimptota létezésének.
De nem elégséges, mert még kell, hogy ezzel az A-val:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - Ax - B) = 0 \iff \lim_{x\to\infty}(f(x) - Ax) = B$$

($x \to -\infty$-re hasonlóan).

Tehát $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = A,\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - Ax) = B \iff \exists$ lineáris aszimptota.

Pl. $f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}$ Van-e lineáris aszimptotája $+\infty$-ben?

Megoldás.

$$A = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}{x} = \lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{2}{x}} = 1$$

$$B = \lim_{x\to\infty}\left(x\mathrm{e}^{\frac{2}{x}} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \underset{h:=\frac{2}{x}}{=} \lim_{h\to 0+}\frac{\mathrm{e}^h - 1}{\frac{1}{2}\cdot h} = 2$$

$$\left(\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1 \text{ nevezetes határérték}\right)$$

(L'H-lal is megoldható, de hogyan?) Tehát $g_a = x + 2$.

4.9. Függvényvizsgálat

Teendők:

1. D_f; nullahelyek (ha megállapítható); periodicitás; paritás; határértékek: $+\infty$-ben, $-\infty$-ben (ha van értelme), a szakadási pontokban, határpontokban.

2. f' vizsgálata ($\nearrow$, $\searrow$, lok. szé.).
3. f'' vizsgálata ($\cap$, $\cup$, infl. pont)
4. Lineáris aszimptoták.
5. f ábrázolása, R_f meghatározása.

4.9.1. Folytonos függvények zárt intervallumbeli szélsőértékei (abszolút szélsőértékek)

Zárt intervallumban folytonos függvénynek van minimuma és maximuma (Weierstrass II. tétele). Lehetséges helyek:

- ahol a függvény nem deriválható
- deriválható és lokális szélsőértékhely (elég a szükségességet vizsgálni)
- az intervallum végpontjaiban

Végül a szóbajövő értékek közül kell kiválasztani a legnagyobbat és a legkisebbet.

Példák:

Pl. Milyen méretezésű legyen az az 1 liter űrtartalmú konzervdoboz, amelyet minimális anyagfelhasználással akarunk elkészíteni?

Megoldás.

$T(r,h) = r^2\,\pi\,h \;=\; 1\ \mathrm{dm}^3$ és $F(r,h) = 2\,r^2\,\pi \;+\; 2r\pi\;h$

Az első egyenletből kifejezve h-t

$$h = \frac{1}{r^2\,\pi}$$

és behelyettesítve a második egyenletbe:

$$f(r) := F(r, \frac{1}{r^2\,\pi}) \;=\; 2\,r^2\,\pi \;+\; 2r\pi\,\frac{1}{r^2\,\pi} \;=\; 2\,r^2\,\pi \;+\; \frac{2}{r}\,, \qquad r > 0\,.$$

Így egy egyváltozós függvény szélsőérték feladatához jutottunk.

$$f'(r) \;=\; 4r\pi \;-\; \frac{2}{r^2} \;=\; 2\,\frac{2r^3\pi - 1}{r^2} \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

r	$\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}, \infty\right)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

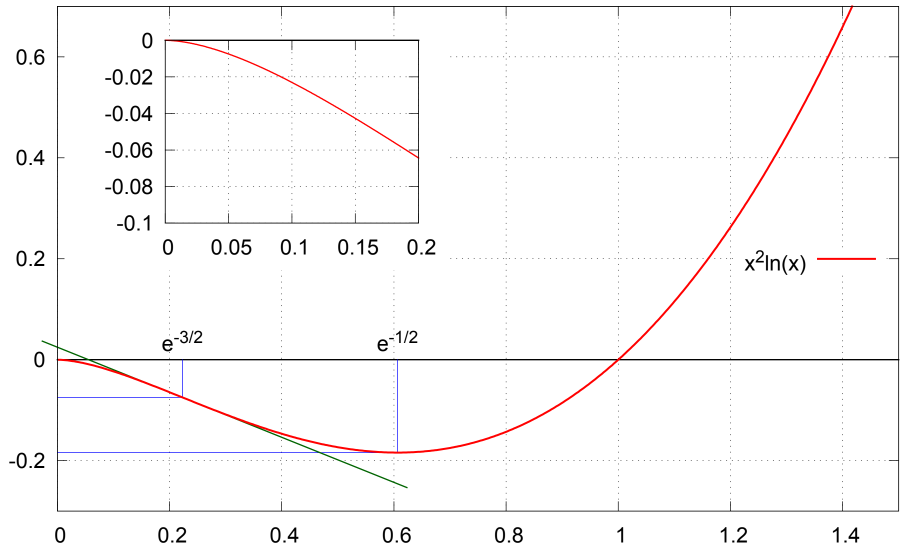
A lokális minimum egyben abszolút minimum is.

Tehát a minimális anyagfelhasználáshoz:

$$r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\ \mathrm{dm}, \qquad h = \left.\frac{1}{r^2\,\pi}\right|_{r=\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}\ \mathrm{dm}$$

Pl. $f(x) = x^2 \ln x$ Végezzen függvényvizsgálatot!

4.24. ábra. Az $y = x^2 \ln x$ függvény grafikonja



Megoldás.

$D_f = (0, \infty)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to+0} -\frac{1}{2}x^2 = 0$$

Nullahely: $\ln x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$

$$f'(x) = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ln x = -\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

x	$\left(0, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, \infty\right)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

$$f''(x) = 2\ln x + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$$

x	$\left(0, \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$	$\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$	$\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}, \infty\right)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	infl. pont	$\cup$

$$f\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2\mathrm{e}} \qquad f\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{3}{2\mathrm{e}^3} \qquad R_f = \left[-\frac{1}{2\mathrm{e}}, \infty\right)$$

Aszimptota: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x\ln x = \infty \quad \Longrightarrow \quad$ nincs egyenes aszimptota.

A függvény grafikonja a 4.24. ábrán látható.

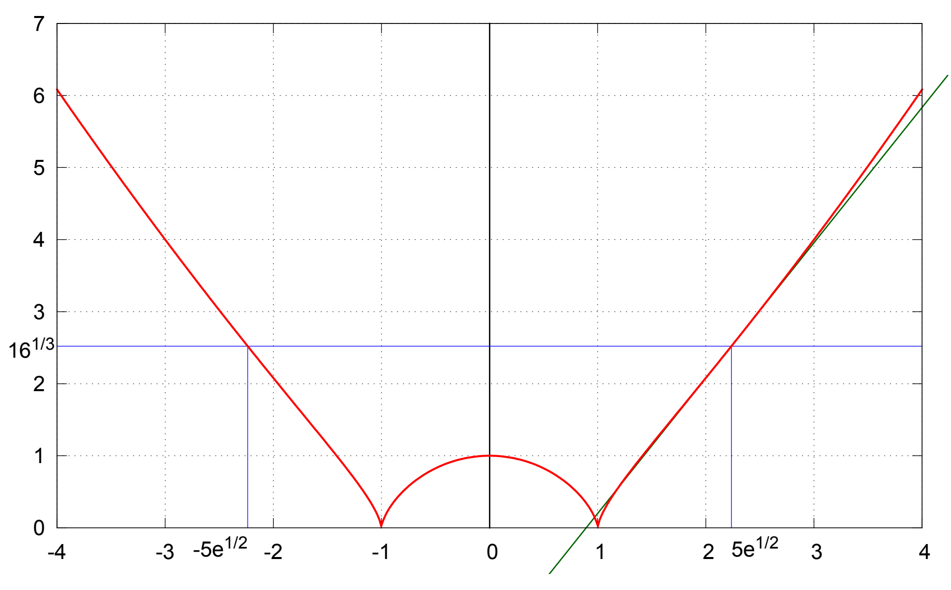
HF. Hány valós gyöke van az $x^2 \ln x - a = 0$ egyenletnek? $(a \in \mathbb{R})$

Pl. Legyen

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$$

Végezzen teljes függvényvizsgálatot, és ábrázolja a függvényt! Van-e a függvénynek egyenes aszimptotája a $+\infty$-ben?

4.25. ábra. Az $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ függvény grafikonja



Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$ Nullahelyek: $x = \pm 1$

Páros függvény, ezért elég $x \geq 0$-ra vizsgálni és tükrözni az y tengelyre.

Van-e lineáris aszimptota $+\infty$-ben?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{x^4}{x^3}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}=\infty$$

Nincs lineáris aszimptota.

$f'(x)=\dfrac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2x=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^3}}=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2}{x-1}}=\nexists$

x	$\cdots$ $(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\nearrow$	lok, max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

$f(0)=1,\qquad f(1)=0$

$$f''(x)=\frac{4}{3}\,\frac{\sqrt[3]{x^2-1}-x\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\cdot 2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}=\frac{4}{3}\,\frac{(x^2-1)-\frac{2}{3}x^2}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}=\frac{4}{9}\,\frac{x^2-5}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

x	$[0,1)$	1	$(1,\sqrt{5})$	$\sqrt{5}$	$(\sqrt{5},\infty)$
f''	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\cap$		$\cap$	infl. pont	$\cup$

$f(\sqrt{5})=\sqrt[3]{16},\qquad f'(\sqrt{5})=\dfrac{4}{3}\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{4}}\qquad\qquad R_f=[0,\infty)$

A függvény grafikonja a 4.25. ábrán látható.

Pl. $\qquad f(x)=\sqrt[3]{2x-8}-\dfrac{2}{3}x+3$

Keresse meg f szélsőértékeit a $\left[0,\dfrac{9}{2}\right]$ intervallumon!

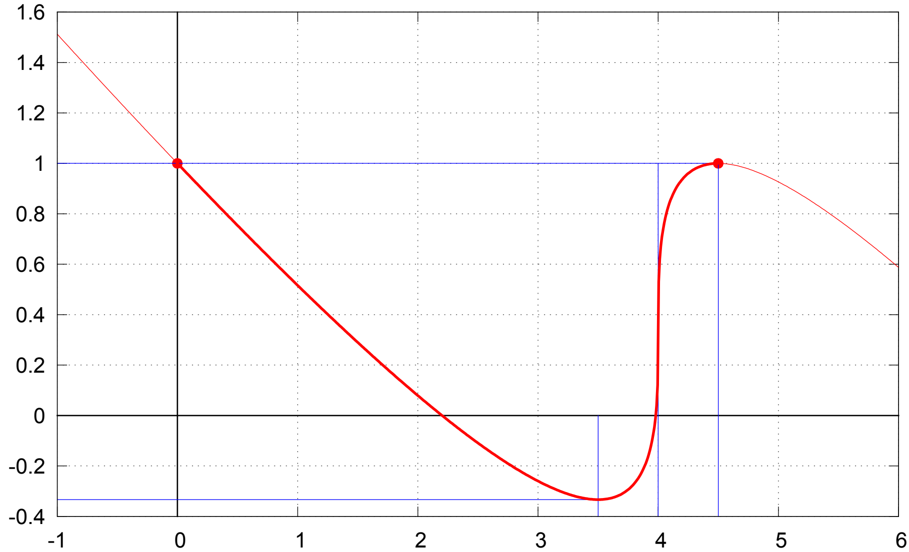
Megoldás.

f folytonos $\left[0,\dfrac{9}{2}\right]$-en $\quad\overset{\text{W. II. t.}}{\Longrightarrow}\quad \exists$ min. és max.

Ahol nem deriválható: $x=4\in I:\quad f(4)=\dfrac{1}{3}$

Az intervallum végpontjai: $f(0)=1,\quad f\left(\dfrac{9}{2}\right)=1$

4.26. ábra. Az $f(x)=\sqrt[3]{2x-8}-\frac{2}{3}x+3$ függvény grafikonja



Ahol differenciálható és lokális szélsőértéke lehet: $f'(x)=\dfrac{1}{3}(2x-8)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2-\dfrac{2}{3}=0 \implies (2x-8)^{-\frac{2}{3}}=1 \implies 2x-8=\pm 1 \implies x=\dfrac{9}{2},\dfrac{7}{2} \qquad f\left(\dfrac{7}{2}\right)=-\dfrac{1}{3}$

A függvény grafikonja a 4.26. ábrán látható.

Tehát a fenti értékek közül kiválasztva, a maximum $x=0$-ban, ill. $x=\dfrac{9}{2}$-ben van, értéke: 1, a minimum pedig $x=\dfrac{7}{2}$-ben, értéke: $-\dfrac{1}{3}$.

4.10. Paraméteres megadású görbék

Sok alkalmazásnál valamely görbe egyenlete nem $y=f(x)$ alakban van megadva, hanem az x és y koordináta egy harmadik változó, az ún. paraméter függvényében van megadva, tehát egy paraméteres egyenletrendszerrel:

$$x=x(t)\,, \qquad y=y(t).$$

Ha pl. t idő, akkor az $(x(t)\,,\,y(t))$ egy mozgó pont t időpontbeli helyzete. Ugyanannak a görbének végtelen sok paraméterezése lehetséges.

Ha a görbe $y=f(x)$ alakban adott, akkor mindig van paraméteres előállítás:

$$x:=t$$
$$y=f(t)$$

Ha a görbe $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I$ paraméteres egyenletrendszerrel adott, akkor nem biztos, hogy létezik $y = f(x)$ előállítása. Pl. az

$$x = 3\,, \quad y = t\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

egyenes nem írható le $y = f(x)$ alakban.
A következő tétel elégséges feltételt ad arra, hogy a paraméteresen megadott görbének legyen $y = f(x)$ előállítása is.

T

$$x = x(t) \qquad\qquad t_1 < t < t_2$$
$$y = y(t)$$

Ha $x(t)$ szigorúan monoton, akkor a görbének létezik $y = f(x)$ előállítása.

Tehát a feltétel teljesülése esetén ez a görbeszakasz megadható az $y = f(x)$ egyváltozós függvény grafikonjaként is.

M $x(t)$ szigorúan monoton például, ha az intervallumon a deriváltja jeltartó, vagy legfeljebb véges sok pontban lehet az értéke 0, egyébként mindenütt + vagy −.

B

A szigorú monotonitás miatt $x = x(t)$ -nek létezik inverze: $t = t(x)$

Így a keresett függvény:

$$f(x) = y(t)\big|_{t=t(x)} = y(t(x))$$ ■

Néhány példa paraméteres megadásra:

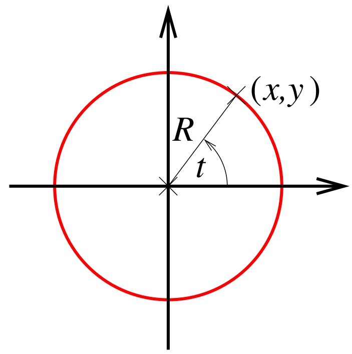
1. $x^2 + y^2 = R^2$, $y \ge 0$ paraméteres megadása pl.:
$$x := t\,, \quad y = \sqrt{R^2 - t^2}\,, \quad t \in [-R\,, R]$$

2. $x^2 + y^2 = R^2$, $x \le 0$ paraméteres megadása pl.:
$$y := t\,, \quad x = -\sqrt{R^2 - t^2}\,, \quad t \in [-R\,, R]$$

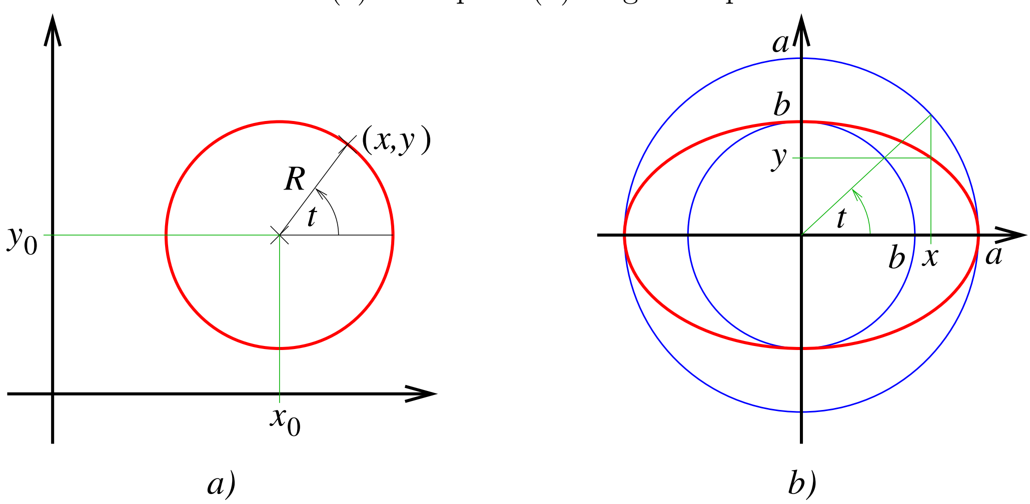
3. Origó középpontú teljes kör: $x^2 + y^2 = R^2$
Most nem járunk eredménnyel, ha x -et vagy y -t akarjuk paraméterül választani. Helyette az x tengely + felével bezárt szöget választjuk paraméterül és jelöljük t -vel (4.27 ábra). Ekkor:
$$x = R\,\cos t$$
$$y = R\,\sin t\,, \qquad t \in [0\,, 2\pi)$$

4. Általános helyzetű kör (4.28.a ábra): $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
$$x = x_0 + R\,\cos t$$
$$y = y_0 + R\,\sin t\,, \qquad t \in [0\,, 2\pi)$$

4.27. ábra. Origó középpontú kör megadása paraméteresen



4.28. ábra. Kör (a) és ellipszis (b) megadása paraméteresen



5. Ellipszis: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

   Az ellipszis egy pontjának megszerkesztése: megrajzolunk egy a és egy b sugarú kört és húzunk egy félegyenest, melynek az x tengely pozitív felével bezárt szöge: t (4.28.b ábra). Ahol ez a félegyenes metszi az a sugarú kört, abban a pontban az y tengellyel húzunk párhuzamos egyenest. A félegyenes és a b sugarú kör metszéspontjában az x tengellyel párhuzamos egyenest rajzolunk be. Az így kapott két egyenes metszéspontja adja meg az ellipszis t paraméterű pontját. Ennek megfelelően a paraméteres egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x &= a\ \cos t \\ y &= b\ \sin t\,, \qquad t \in [0\,,\,2\pi) \end{aligned}$$

T *Legyen a G görbe paraméteres egyenlete:*

$$x = x(t)\ , \quad y = y(t)\ , \quad t_1 < t < t_2$$

$x(t)$ szigorúan monoton,

$x(t)$, $y(t)$ deriválható $t_0 \in (t_1\,,\, t_2)$ -ben és $\dot{x}(t_0) \neq 0$.

a) Ekkor az $f(x) = y(t(x))$ függvény deriválható a megfelelő $x_0 = x(t_0)$ pontban és

$$f'(x_0) = \left.\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right|_{t=t_0} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$$

b) Ha az előző feltételeken túl létezik $\ddot{x}(t_0)$, $\ddot{y}(t_0)$ is :

$$f''(x_0) = \left.\frac{\ddot{y}\,\dot{x} - \dot{y}\,\ddot{x}}{\dot{x}^3}\right|_{t_0}$$

B

a) A feltétel miatt $x(t)$-nek létezik a $t(x)$ inverze és az deriválható. Az összetett függvény és az inverzfüggvény deriválási szabályát felhasználva:

$$f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{d\,y(t(x))}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{d\,y}{dt}\right|_{t_0} \left.\frac{d\,t}{dx}\right|_{x_0} =$$

$$= \dot{y}(t_0) \quad \frac{1}{\left.\dfrac{d\,x}{dt}\right|_{t_0}} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$$

b)
$$f''(x_0) = \left.\frac{d}{dx}\,f'(x)\right|_{x_0} = \left.\frac{d}{dx}\,\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right|_{x_0} = \left.\frac{d}{dt}\,\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right|_{t_0} \left.\frac{d\,t}{dx}\right|_{x_0} =$$

$$= \left.\frac{\ddot{y}\,\dot{x} - \dot{y}\,\ddot{x}}{\dot{x}^2}\right|_{t_0} \quad \frac{1}{\left.\dfrac{d\,x}{dt}\right|_{t_0}} = \left.\frac{\ddot{y}\,\dot{x} - \dot{y}\,\ddot{x}}{\dot{x}^3}\right|_{t_0}$$

■

Pl.

$$x(t) = \mathrm{e}^{2t} + t^2$$
$$y(t) = \operatorname{ch} 3t + 2t^2$$

a) Mutassa meg, hogy a fenti paraméteres egyenletrendszer a $t_0 = 0$ pareméterű x_0 pont egy környezetében meghatároz egy $y = f(x)$ függvényt!

b) Milyen lokális tulajdonsága van ennek az f függvénynek az x_0 pontban?

Megoldás.

a) $\dot{x}(t) \;=\; 2\,\mathrm{e}^{2t} \;+\; 2t$

$\dot{x}(0) = 2 > 0$ és $x(t)$ folytonos, ezért $\exists\ (-\delta\,,\,\delta)$ intervallum, ahol $\dot{x}(t) > 0$

$\Longrightarrow$ itt $x(t)$ szigorúan monoton nő

$\Longrightarrow$ $\exists$ inverze : $t = t(x)$ és így $\exists\ f(x) = y(t(x))$.

b) $\dot{y}(t) \;=\; 3\,\mathrm{sh}\,3t \;+\; 4t$, $\quad \dot{y}(0) = 0$ és $x_0 = x(0) = 1$

$$f'(1) = \frac{\dot{y}(0)}{\dot{x}(0)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokális szélsőérték lehet itt.}$$

$\ddot{x}(t) = 4\,\mathrm{e}^{2t} \;+\; 2$, $\quad \ddot{x}(0) = 6$

$\ddot{y}(t) = 9\ \mathrm{ch}\,3t \;+\; 4$, $\quad \ddot{y}(0) = 13$

$$f''(1) = \left.\frac{\ddot{y}\,\dot{x} - \dot{y}\,\ddot{x}}{\dot{x}^3}\right|_0 = \frac{13\cdot 2 - 0}{2^3} = \frac{13}{4}$$

$f'(1) = 0$ és $f''(1) > 0$ $\Longrightarrow$ f -nek lokális minimuma van $x_0 = 1$ -ben.

4.10.1. Görbék megadása síkbeli polárkoordinátákkal

<u>**Polárkoordináták :**</u> r , φ

A polár koordinátarendszer a pólusból (O) és a polártengelyből áll. A sík tetszőleges P pontja jellemezhető a pont pólustól való távolságával: r $(r \geq 0)$ és az OP szakasz polártengellyel bezárt szögével: φ . Ha $\varphi \in [0\,,\,2\pi)$, akkor a póluson kívül minden pont egyértelműen jellemzett (4.29 ábra).

Egy síkgörbe egyenletét néha célszerű úgy megadni, hogy megmondjuk, hogy r hogyan függ a φ -től, tehát megadjuk az $r = r(\,\varphi\,)$ polárkoordinátás egyenletet.

Kapcsolat a polárkoordináták és a Descartes koordináták között

A polár koordinátarendszert úgy vesszük fel, hogy a polártengely az x tengely $+$ felével essen egybe.

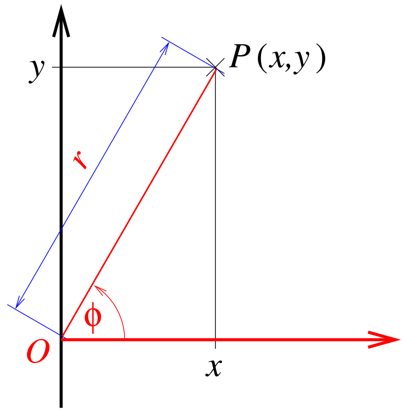
Ha r , φ adott, akkor

$$x = r\cdot\cos\varphi$$
$$y = r\cdot\sin\varphi$$

Ha x , y adott, akkor

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{és} \quad \varphi \ \text{ olyan, melyre fennáll, hogy}$$

4.29. ábra. A P pont síkbeli polárkoordinátái: r és φ



$$\sin\varphi = \frac{y}{r} \qquad \text{és} \qquad \cos\varphi = \frac{x}{r}$$

Ha egy görbe $r = r(\varphi)$ módon adott, akkor

$$x = r(\varphi)\cdot\cos\varphi$$
$$y = r(\varphi)\cdot\sin\varphi$$

Így megkaptuk a görbe egy paraméteres egyenletrendszerét.

4.11. Feladatok

1. Keresse meg az alábbi határértékeket!

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$

   b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$

   c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} x}$

   d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} ax}{\operatorname{arctg} bx}$

   e) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-x}{x^2+x+1}$

   f) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{x^3-x}{x^2+x+1}$

2. Határozza meg az
$$y = \frac{\pi}{2} + \arcsin 2x$$
értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét!

3. A derivált definíciója alapján vizsgálja meg, hogy differenciálható-e a 0-ban az
$$f(x) = \sqrt[3]{x\cdot\sin 2x\cdot\arcsin 3x}$$
függvény?

4. $f(x) = 3\pi - \arccos(1-x)$

   a) $D_f = ?$ Írja fel az $x_0 = \dfrac{1}{2}$ pontbeli érintő egyenesének egyenletét!

   b) Invertálható-e f? $\quad f^{-1}(x) = ?\quad D_{f^{-1}} = ?$

5. $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x} \quad x_0 = -\dfrac{1}{2}$ pontbeli érintő egyenese?

6. Ábrázolja az
$$f(x) = \arcsin x + \arccos x$$
függvényt!

7. $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}; \qquad g(x) = x^2 \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$

   a) Tegye folytonossá a 0 helyen az f és g függvényeket!

   b) $f'(0) = ?, \quad g'(0) = ?$

8. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1+x}{1-x}, & \text{ha } x \neq 1 \\ 0, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$

   $f'(1) = ? \quad \lim\limits_{x \to 1} f'(x) = ?$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x} + 2e^{3x} + 1}{2e^{2x} + 3e^{3x} + 1} = ? \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x} + 2e^{3x} + 1}{2e^{2x} + 3e^{3x} + 1} = ?$

10. Határozza meg az
$$f(x) = 1 + \ln(x^3 + 1)$$
függvény inverzét (ha létezik), az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

11. $$f(x) = \ln\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$
Adja meg a fenti függvény

   a) értelmezési tartományát, értékkészletét,

   b) inverzét, amennyiben és ahol az létezik.

12. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x\right)$

   a) $D_f = ?, \quad R_f = ?$

   b) $f^{-1}(x); \quad D_{f^{-1}} = ?; \quad R_{f^{-1}} = ?$

13. $f'(x) = ?$

a) $f(x) = (\ln x)^x$

b) $f(x) = (\sin x)^{\cos x^2}$

c) $f(x) = \sqrt[x]{x}$

d) $f(x) = (\sin^2 x)^{\sqrt{x+1}}$

e) $f(x) = (\operatorname{arctg} 2x)^x$

f) $f(x) = x^x$

14. Írja fel a megadott ponton átmenő $y = f(x)$ függvény érintő egyenesének egyenletét, ha a függvény kielégíti a megadott implicit kapcsolatot!

a) $2x^3 - x^2y^2 - 3x + y + 7 = 0; \qquad x_0 = 1; \quad y_0 = -2$

b) $x \sin y + y \sin x = \dfrac{\pi}{3}\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\pi}{4}\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \qquad x_0 = \dfrac{\pi}{3}; \quad y_0 = \dfrac{\pi}{4}$

c) $8(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2); \qquad x_0 = 3; \quad y_0 = 1$

d) $y^2 \sin \pi y + x \cos \pi x + y = 1; \qquad P_0(1, 2)$

e) $x \ln y + y \ln x = 1; \qquad P_0(\mathrm{e}, 1)$

f) $(x^2 + y^2)^3 - 26x^2y^2 = -18; \qquad P_0(-1, 1)$

15. Milyen lokális tulajdonsága van az $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $y_0 = 0$ pontban az

$$x^2 \sin y + y + \sin x = 1$$

implicite adott függvénynek?

16. $$(x-2)^3(1-x) = y^3 + y; \qquad x_0 = 2, \quad y_0 = 0$$
Van-e a fenti implicit megadású görbének lokális szélsőértéke, ill. inflexiója az (x_0, y_0) pontban?

17. Milyen lokális tulajdonságai vannak az

$$x \cos \pi y + y^2 x + y \cos \pi x = 0$$

egyenlet által definiált $y(x)$ függvénynek az $x = 0$ pontban?

18. A kétszer folytonosan differenciálható $y = y(x)$ függvény kielégíti az

$$y^3 - x^5 + x^2 - y^2 = 4$$

implicit egyenletet és $y(1) = 2$.

a) $y'(1) = ? \quad y''(1) = ?$

b) Van-e 1-nek olyan környezete, amelyben a fenti $y = y(x)$ függvény alulról konvex vagy alulról konkáv? (Vigyázat! Ez nem nem lokális tulajdonság.)

19. $$f(x) = x - 1 + \operatorname{arctg} x^3$$

a) $f'(x) = ?$ Invertálható-e D_f-en?

b) Írja fel az f^{-1} függvény $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ pontbeli érintőjének egyenletét!

20. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{th} x = ?$ (Indokoljon!)

b) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{th} \dfrac{x-1}{x+2}, & x \neq -2 \\ b, & x = -2 \end{cases}$

Megválasztható-e b értéke úgy, hogy f mindenütt folytonos legyen? Hol létezik $f'(x)$?

c) Az inverzfüggvény meghatározása nélkül számítsa ki $f^{-1\prime}(0)$ értékét!

21. Vizsgáljuk meg, hogy $0 \le \varepsilon < 1$ esetén invertálható-e az

$$y = x - \varepsilon \cdot \sin x$$

ún. Kepler-egyenletnek eleget tevő függvény! Ha invertálható, határozzuk meg az inverz deriváltját is.

Megoldás:

$y' = 1 - \varepsilon \cos x \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.

Mivel $\varepsilon \in [0,1) \implies y' > 0 \implies y$ szigorúan monoton nő $\implies$ invertálható (mivel y folytonos is, az inverz is folytonos). Mivel az inverzfüggvényt nem tudjuk explicite előállítani, csak az implicit függvény deriválása végezhető el. Az inverzfüggvényre vonatkozó implicit egyenlet ($x \leftrightarrow y$):

$$x = y - \varepsilon \cdot \sin y$$

Ezt x szerint deriválva:

$$1 = y'(x) - \varepsilon\,(\cos y)\; y'(x)$$

$$y'(x) = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y(x)}$$

22. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & \text{ha } x \le 1 \\ \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1-x}, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$

a) Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken a függvény szigorúan monoton!

b) $\sup\limits_{x\in\left[-\frac{1}{2},2\right]} \{f(x)\} = ?$ $\qquad \inf\limits_{x\in\left[-\frac{1}{2},2\right]} \{f(x)\} = ?$

$\max\limits_{x\in\left[-\frac{1}{2},2\right]} \{f(x)\} = ?$ $\qquad \min\limits_{x\in\left[-\frac{1}{2},2\right]} \{f(x)\} = ?$

c) Tekintsük az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon áthaladó húrokat, ahol $1 < a < b < 2$. Van-e köztük vízszintes?

d) Legyen $g(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1-x}$ és $D_g = (1, \infty)$.
Határozzuk meg a g^{-1} inverz függvényt! $D_{g^{-1}} = ?$

23. Keresse meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$; $\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$; $\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P_n(x)}{e^x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arcsin(x-1)}{\operatorname{tg}(x-1)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$

d) $\lim\limits_{x\to +0} x^n \ln x$; $\qquad n \in \mathbb{N}^+$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$; $\qquad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x \cdot \sin x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\sin x}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

k) $\lim\limits_{x\to +0} x^x$

l) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\operatorname{tg} x}$

m) $\lim\limits_{x\to +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$

n) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

o) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

p) $\lim\limits_{x\to +0} (1 + \arcsin 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x}}$

q) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} \cdot \ln \dfrac{e^x - 1}{x}\right)$

r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{tg} 2x}$

s) $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

t) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n^k}$, $\qquad k \in \mathbb{N}^+$

24. Mutassa meg, hogy az alábbi esetekben a L'Hospital-szabály alkalmazása nem vezet célhoz a határértékek kiszámításánál, és számítsuk ki a keresett határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \cos x}{\sin 2x + 2x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\operatorname{tg} x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad \left(= \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{th} x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sh}(x+5)}{\operatorname{ch}(x-1)}$

25. Határozza meg a és b értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^{x \cdot \sin x}, & \text{ha } x > 0 \\ ax + b, & \text{ha } x \le 0 \end{cases}$$

függvény differenciálható legyen $\mathbb{R}$-en!

26. $f(x)=\begin{cases}(1+x^2)^{x^{-2}}, & \text{ha } x\neq 0\\ b, & \text{ha } x=0\end{cases}$

    a) Határozza meg b értékét úgy, hogy f folytonos legyen!

    b) Írja fel az $x_0=1$ pontbeli érintő egyenletét!

27. $f(x)=\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)^{\frac{1}{1-x}}$

    a) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=?$

    b) $f'(x)=?\,,\quad$ ha $x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$.

28. $f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}};\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

    a) $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=?$

    b) $f'(x)=?$

29. $f(x)=\begin{cases}(x^2)^{x^2}, & \text{ha } x\neq 0\\ b, & \text{ha } x=0\end{cases}$

    a) Határozza meg b értékét úgy, hogy f folytonos legyen!

    b) Bizonyítsa be, hogy ekkor f differenciálható is a 0 pontban!

    c) Írja fel a 0 pontbeli érintő egyenes egyenletét!

30. $f(x)=\begin{cases}x^2\ln|x|, & \text{ha } x\neq 0\\ a, & \text{ha } x=0\end{cases}$

    a) Válassza meg a értékét úgy, hogy f folytonos legyen $x=0$-ban!

    b) $f'(x)=?$

31. Legyen $f(x)=|x|3^{-|x|}$

    a) Létezik-e $f'(0)$?

    b) Határozza meg f legnagyobb és legkisebb értékét $\mathbb{R}$-en, amennyiben ezek léteznek.

    c) $\min\limits_{x\in[1,\infty]}\{f(x)\}=?,\qquad \inf\limits_{x\in[1,\infty]}\{f(x)\}=?$

32. a) Vázolja az $f(x)=x^3-6x^2+9x$ függvényt az első derivált vizsgálata alapján. (Konvexitást, aszimptotát nem kérdezzük.)

    b) Adja meg az $x^3-6x^2+9x=C$ egyenlet különböző valós gyökeinek számát a C valós szám függvényében!

33. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(x^2-1)}{x} = ?$

b) Végezzen teljes függvényvizsgálatot és ábrázolja az

$$f(x) = x + \ln(x^2-1)$$

függvényt! (A függvény zérushelyét nem kell meghatározni!)

34. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} + x^2 \sin\dfrac{1}{x}$

Van-e lineáris aszimptotája $\pm\infty$-ben?

35. $f(x) = \sqrt{x^2-x+1}$

Van-e lineáris aszimptotája $-\infty$-ben?

36. $x(t) = \dfrac{\sin t}{t^2+1}; \quad y(t) = \sqrt{2+\cos t} + 2t$

a) $\dot{x}(t) = ? \quad \dot{y}(t) = ?$

b) Írja fel a görbe $t_0 = 0$ pontbeli érintőjének egyenletét Descartes koordinátákkal!

37. $x(t) = \mathrm{e}^{2t} + t^2; \quad y(t) = \operatorname{ch} 3t + 2t$

a) Mutassa meg, hogy a fenti paraméteres egyenletrendszer a $t_0 = 0$ paraméterű x_0 pont egy környezetében meghatároz egy $y = f(x)$ függvényt!

b) Milyen lokális tulajdonsága van ennek az f függvénynek az x_0 pontban?

38. Milyen lokális tulajdonsága van az

$$x = t^2 + 2\cos\frac{\pi}{2}t, \qquad y = \sin\pi t + \frac{\pi}{2}t^2$$

által meghatározott $y = f(x)$ függvénynek a $t_0 = 1$ paraméterű $x_0 = x(t_0)$ pontban?

4.12. Néhány kidolgozott feladat

Pl. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} + x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ $\quad \pm\infty$-ben van-e lineáris aszimptota?

Megoldás.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\Bigg(\underset{\substack{\downarrow\\ \frac{\text{korl.}}{\infty}\to 0}}{\frac{\sin x}{x^2}}+\underbrace{x\cdot\sin\frac{1}{x}}_{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\to 1}\Bigg)=1=A$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-Ax)=\lim_{x\to\pm\infty}\Bigg(\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{\sin x}{x}}+\underbrace{x^2\sin\frac{1}{x}-x}_{\infty\cdot 0-\infty}\Bigg)=\lim_{x\to\pm\infty}\underbrace{x^2\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)}_{\infty\cdot 0}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{1}{2}\,\frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\text{L'H}}{=}$$

$$\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=0=B$$

$g_a=x$: aszimptota a $\pm\infty$-ben.

Pl. $\boxed{f(x)=\sqrt{x^2-x+1}\quad\text{aszimptota } -\infty\text{-ben?}}$

Megoldás.

$$A=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=-1$$

$$B=\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)\underset{u:=-x}{=}$$

$$=\lim_{u\to\infty}\left(\sqrt{u^2+u+1}-u\right)\frac{\sqrt{u^2+u+1}+u}{\sqrt{u^2+u+1}+u}=\lim_{u\to\infty}\frac{u+1}{\sqrt{u^2+u+1}+u}=$$

$$=\lim_{u\to\infty}\frac{u\left(1+\frac{1}{u}\right)}{\sqrt{u^2}\sqrt{1+\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}}+u}=\lim_{u\to\infty}\frac{u}{u}\,\frac{1+\frac{1}{u}}{\sqrt{1+\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

$g_a=-x+\dfrac{1}{2}$

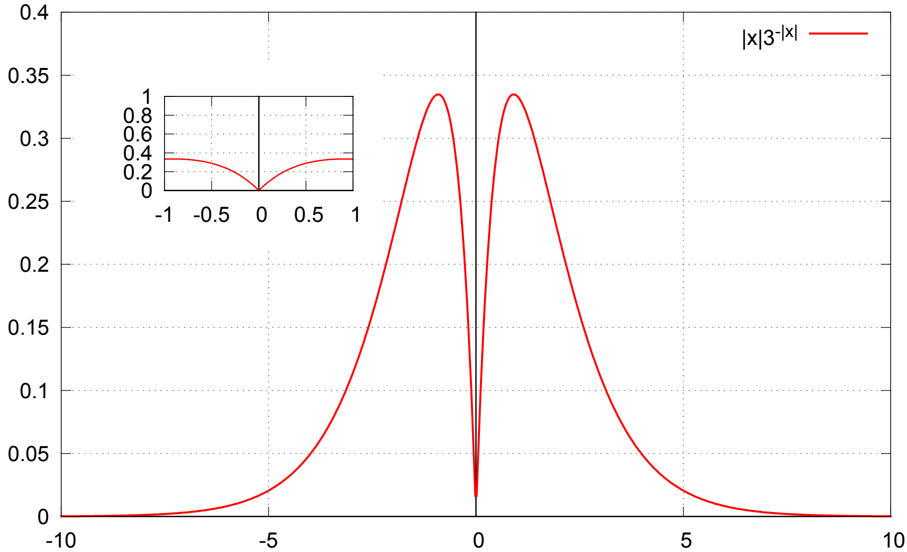
Pl. Legyen $f(x)=|x|3^{-|x|}$.

1. Létezik-e $f'(0)$?

2. Határozza meg f legnagyobb és legkisebb értékét $\mathbb{R}$-en (amennyiben ezek léteznek)!

3. $\min\limits_{x\in[1,\infty)} f(x) = ?$ $\quad\quad$ $\inf\limits_{x\in[1,\infty)} f(x) = ?$

4.30. ábra. Az $f(x) = |x|3^{-|x|}$ függvény grafikonja



Megoldás.

1. $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{|x|3^{-|x|}}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{|x|3^{-|x|}}{x} = -1 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$-ban nem differenciálható

2. f páros, $x \geq 0$ esetén $f(x) = x\,3^{-x}$

   $f(0) = 0, \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{3^x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{3^x \ln 3} = 0$

   $f'(x) = 3^{-x} - \ln 3 \cdot x\,3^{-x} = 3^{-x}(1 - \ln 3 \cdot x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{1}{\ln 3}$

x	$\left(0, \frac{1}{\ln 3}\right)$	$\frac{1}{\ln 3}$	$\left(\frac{1}{\ln 3}, \infty\right)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

$\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0 \qquad \max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{1}{\ln 3}\, 3^{-\frac{1}{\ln 3}}$

3. $\dfrac{1}{\ln 3} < 1 \quad (\text{mert } \ln 3 > 1)$

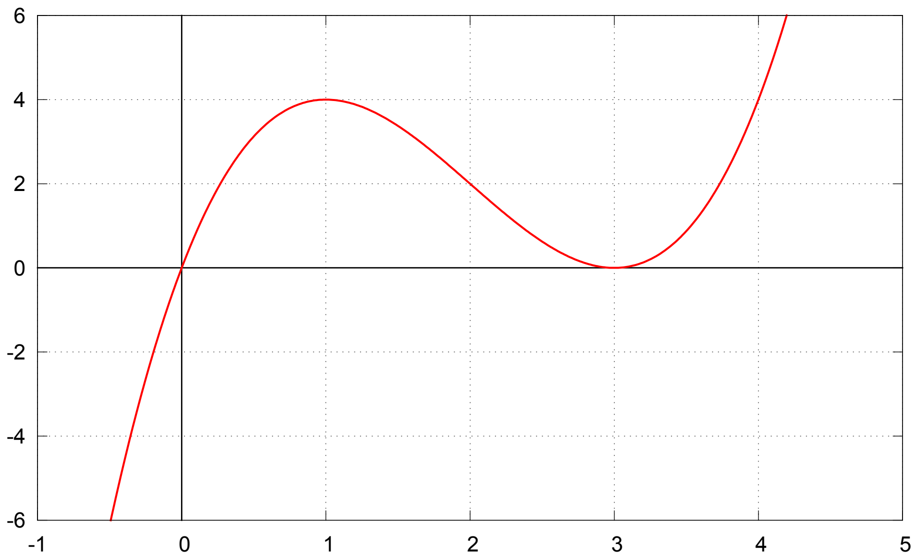
   $\min\limits_{[1,\infty)} f(x)$ nem létezik, $\quad \inf\limits_{[1,\infty)} f(x) = 0$

A függvény grafikonja a 4.30. ábrán látható.

Pl.

1. Vázolja az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ függvényt az első derivált vizsgálata alapján (konvexitást, aszimptotát nem kérdezzük).
2. Adja meg az $x^3 - 6x^2 + 9x = C$ egyenlet különböző valós gyökeinek számát a C valós szám függvényeként. Válaszát indokolja.

4.31. ábra. Az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ függvény grafikonja



Megoldás.

1. $f(x) = x(x-3)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0,\ x = 3$
   $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 3$
   $f(1) = 4,\ f(0) = 0$
2. $f(x) = C$ egyenlet megoldásainak a száma: $R_f = \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$-re van metszéspontja az $y = f(x)$ és $y = C$ görbéknek.
$c < 0$: 1 megoldás; $c = 0$: 2 megoldás; $0 < c < 4$: 3 megoldás; $c = 4$: 2 megoldás; $c > 4$: 1 megoldás.

A függvény grafikonja a 4.31. ábrán látható.

Pl.

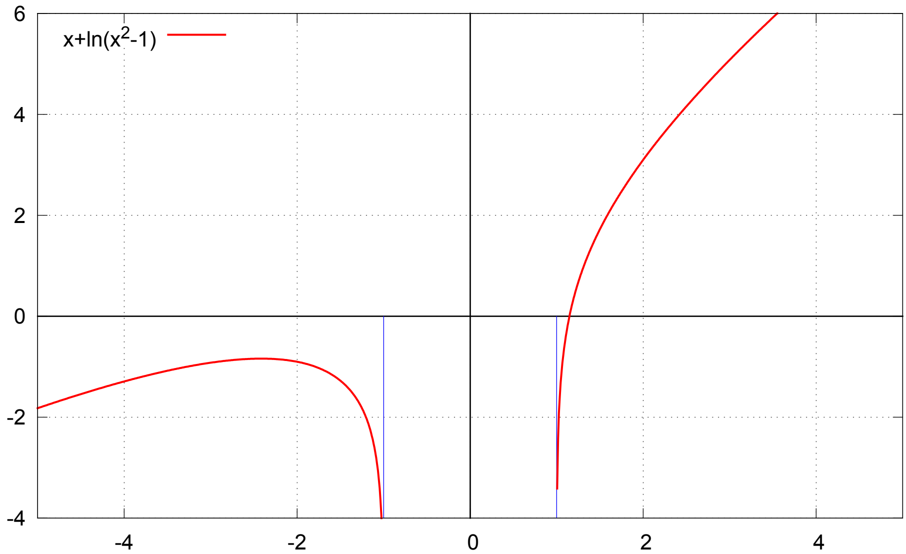
1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(x^2-1\right)}{x} = ?$

2. Végezzen teljes függvényvizsgálatot és ábrázolja az

$$f(x) = x + \ln\left(x^2-1\right)$$

függvényt! (A függvény zérushelyét nem kell meghatározni!)

4.32. ábra. Az $f(x) = x + \ln(x^2-1)$ függvény grafikonja



Megoldás.

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(x^2-1\right)}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x}{1} = 0$

2. $D_f:\ |x|>1 \qquad \lim\limits_{x\to -1\pm 0} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(x + \ln\left(x^2-1\right)\right) = \lim_{x\to -\infty} x\Bigg(1 + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}}\Bigg) = -\infty$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{x^2+2x-1}{x^2-1} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 = -1-\sqrt{2}\,, \quad x_2 = -1+\sqrt{2} \notin D_f$$

f $(-\infty, -1-\sqrt{2}]$-ben és $(1,\infty)$-ben monoton nő, $[-1-\sqrt{2}, -1)$-ben monoton csökken.

$f(-1-\sqrt{2}) < 0$: itt lok. max.

$$f''(x) = -\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} < 0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ konkáv}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}\right) = 1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(x^2-1\right) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \text{csak } x = \pm 1 \text{ aszimptota}$$

A függvény grafikonja a 4.32. ábrán látható.

5. fejezet

Egyváltozós valós függvények integrálása

5.1. Primitív függvény, határozatlan integrál

Ⓓ f-nek F az I intervallumon primitív függvénye, ha $\forall x \in I$-re:

$$F'(x) = f(x).$$

Pl. $$f(x) = \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$F(x) = \frac{\sin^2 x}{2}, \qquad G(x) = -\frac{\cos 2x}{4}$$

Az $I = (-\infty, \infty)$ intervallumon F és G primitív függvények, mert

$$F'(x) = G'(x) = f(x)\,, \text{ sőt } (F(x)+C)' = (G(x)+C)' = f(x)$$

Ⓣ *Ha f-nek F és G primitív függvénye I-n, akkor $\exists\, C \in \mathbb{R}$:*

$$F(x) = G(x) + C, \quad x \in I$$

Tehát a primitív függvények csak egy állandóban különböznek.

Ⓑ Már volt. Ez az integrálszámítás I. alaptétele. ∎

Ⓓ f határozatlan integrálja I-n: a primitív függvények összessége.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{H : \; H'(x) = f(x) \quad x \in I\text{-re}\} = F(x) + C$$

[1]lásd Thomas 05-ös bemutató 5. fejezet (49-53. oldal).

Pl. $\int x \, \mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2} + C$

M

$$\varphi(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{ha } x > 0 \\ 4 + \ln(-x), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 3 + \ln x, & \text{ha } x > 0 \\ -2 + \ln(-x), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$\varphi'(x) = \psi'(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = H$$

Tehát a H halmazon mindkettő primitív függvénye $\dfrac{1}{x}$-nek, de nem csak egy konstansban különböznek. Ui.:

$$\varphi(x) - \psi(x) = \begin{cases} -3, & \text{ha } x > 0 \\ 6, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

De most nem is intervallumon dolgoztunk!

Fontos! Az integrálszámítás alaptétele csak intervallumra igaz!

Ennek ellenére használjuk a következő jelölést:

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

Jelentése: $\ln x + C$, ha $I \subset (0, \infty)$ és $\ln(-x) + C$, ha $I \subset (-\infty, 0)$.

A határozatlan integrál néhány tulajdonsága :

(A definíció és a deriválási szabályok következményei)

$$\int (f(x) + g(x)) \, \mathrm{d}x = \int f(x) \, \mathrm{d}x + \int g(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\int c \, f(x) \, \mathrm{d}x = c \int f(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, \mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C \,, \qquad \text{ha } \int f(x) \, \mathrm{d}x = F(x) + C$$

$$\int f'(x) \cdot f^{\alpha}(x) \, \mathrm{d}x = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C \qquad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

$$\int f'(x) \mathrm{e}^{f(x)} \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{f(x)} + C$$

5.1.1. Példák

$$\boxed{\int \sin 8x \, \mathrm{d}x} = -\frac{\cos 8x}{8} + C$$

$$\boxed{\int \cos \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$\boxed{\int \mathrm{e}^{3x} \, \mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} + C$$

$$\boxed{\int \frac{7\mathrm{e}^{x} + 8\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{2x}} \, \mathrm{d}x} = \int \left(7\mathrm{e}^{-x} + 8\mathrm{e}^{x}\right) \, \mathrm{d}x = -7\mathrm{e}^{-x} + 8\mathrm{e}^{x} + C$$

$$\boxed{\int (1+\mathrm{e}^{x})^2 \, \mathrm{d}x} = \int (1 + 2\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{2x}) \, \mathrm{d}x = x + 2\mathrm{e}^{x} + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + C$$

$$\boxed{\int \underbrace{\mathrm{e}^{x} (1+\mathrm{e}^{x})^5}_{f'\,f^5 \ \text{alakú}} \, \mathrm{d}x} = \frac{(1+\mathrm{e}^{x})^6}{6} + C$$

$$\boxed{\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x} = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x = -\int \underbrace{\frac{-\sin x}{\cos x}}_{f'/f \ \text{alakú}} \, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

$$\boxed{\int \operatorname{tg}^2 x \, \mathrm{d}x} = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + C$$

$$\boxed{\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x} = \int \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \operatorname{tg} x}_{f'\,f^1 \ \text{alakú}} \, \mathrm{d}x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C$$

$$\boxed{\int \underbrace{\cos x \ \sin^2 x}_{f'\,f^2 \ \text{alakú}} \, \mathrm{d}x} = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$\boxed{\int x^3 \cos x^4 \, \mathrm{d}x} = \frac{1}{4} \int 4x^3 \cos x^4 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \sin x^4 + C$$

$$\boxed{\int \frac{5}{3x} \, \mathrm{d}x} = \frac{5}{3} \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{5}{3} \ln|x| + C$$

Vagy: $\displaystyle \frac{5}{3} \int \frac{3}{3x} \, \mathrm{d}x = \frac{5 \ln|3x|}{3} + C$ (csak egy állandóban különböznek)

$$\boxed{\int \frac{5}{1+3x} \, \mathrm{d}x} = \frac{5}{3} \int \frac{3}{1+3x} \, \mathrm{d}x = \frac{5}{3} \ln|1+3x| + C$$

$$\boxed{\int \frac{5}{(1+3x)^2}\,\mathrm{d}x} = 5\cdot\frac{1}{3}\int \underbrace{3\,(1+3x)^{-2}}_{f'\,f^{-2}\ \text{alakú}}\ \mathrm{d}x = \frac{5}{3}\frac{(1+3x)^{-1}}{-1} + C$$

$$\boxed{\int \frac{5}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x} = 5\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{3}x\right)^2}\,\mathrm{d}x = 5\,\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{3}x}{\sqrt{3}} + C$$

$$\boxed{\int \frac{5x}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x} = 5\cdot\frac{1}{6}\int \underbrace{\frac{6x}{1+3x^2}}_{f'/f\ \text{alakú}}\ \mathrm{d}x = \frac{5}{6}\ \ln\left(1+3x^2\right) + C$$

$$\boxed{\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + C$$

$$\boxed{\int x\mathrm{e}^{2x^2}\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{4}\int 4x\ \mathrm{e}^{2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x^2} + C$$

$$\boxed{\int \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x} \neq \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} + C : \qquad \left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}\right)' = \frac{\mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x\cdot 2x - \mathrm{e}^{x^2}\cdot 2}{(2x)^2}$$

$f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$-nek van primitív függvénye (később tudjuk megindokolni), de nem tudjuk előállítani zárt alakban.

$$\boxed{\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x} = -\int \frac{-2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\ln\left(1+\cos^2 x\right) + C$$

$$\boxed{\int \frac{-\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x} = \operatorname{arctg}\cos x + C$$

$$\boxed{\int \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}}\,\mathrm{d}x} = \int |\sin x|\cos^{-\frac{3}{2}} x\,\mathrm{d}x = \int -\sin x\cos^{-\frac{3}{2}} x\,\mathrm{d}x = \frac{\cos^{-\frac{1}{2}} x}{-\frac{1}{2}} + C$$

$$I = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

•••

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x} = \int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\arcsin 2x}{2} + C$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{2-8x^2}}\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\arcsin 2x}{2} + C = \alpha$$

$$\boxed{\int \frac{x}{\sqrt{2-8x^2}}\,\mathrm{d}x} = \frac{-1}{16}\int -16x(2-8x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{16}\frac{(2-8x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \beta$$

$$\boxed{\int \frac{4+3x}{\sqrt{2-8x^2}}\,\mathrm{d}x} = 4\int \frac{1}{\sqrt{2-8x^2}}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{x}{\sqrt{2-8x^2}}\,\mathrm{d}x = 4\alpha + 3\beta$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x} = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x+1)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\arcsin\frac{x+1}{2}}{\frac{1}{2}} + C = \gamma$$

$$\boxed{\int \frac{4x+2}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x} = -2\int \frac{-2-2x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -2\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{\frac{1}{2}} - 2\gamma + C$$

Foglaljuk össze az előző példák tanulságait!

$$\boxed{\int \frac{\alpha\, x+\beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x \quad \text{típusú integrálok megoldása}}$$

$f(x) := ax^2+bx+c$

Az alábbi átalakítással dolgozunk:

$$\int \frac{\alpha\, x+\beta}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x = k_1 \int f'(x)\, f^{-1/2}(x)\,\mathrm{d}x + k_2 \int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= k_1\,\frac{f^{1/2}(x)}{1/2} + k_2 \int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x$$

A megmaradt határozatlan integrál kiszámítása:

A nevezőben teljes négyzetté kiegészítés és esetleges kiemelés után a következő esetek egyikét kapjuk:

$$\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x = k_3 \int \frac{1}{\sqrt{1-(...)^2}}\,\mathrm{d}x = k_3\,\frac{\arcsin(...)}{(...)'} + C$$

Vagy:

$$\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x = k_3 \int \frac{1}{\sqrt{1+(...)^2}}\,\mathrm{d}x = k_3\,\frac{\operatorname{arsh}(...)}{(...)'} + C$$

Vagy:

$$\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x = k_3 \int \frac{1}{\sqrt{(...)^2-1}}\,\mathrm{d}x = k_3\,\frac{\operatorname{arch}(...)}{(...)'} + C$$

Itt $(...)$: $x-$nek lineáris függvénye, tehát deriváltja konstans.

●●●

$\boxed{\displaystyle\int \frac{1}{x^2+6x+1}\,\mathrm{d}x}$: A nevezőnek vannak valós gyökei, ilyenkor részlettörtekre bontással dolgozunk (lásd később).

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4}} = \int \frac{1}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot(x+2)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{(x+2)^{-1}}{-1} + C$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+6x+12}} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3+(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{9}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C = \delta$$

$$\boxed{\int \frac{6x+6}{3x^2+6x+12}\,\mathrm{d}x} = \ln\left(3x^2+6x+12\right) + C = \varepsilon$$

$$\boxed{\int \frac{6x+8}{3x^2+6x+12}\,\mathrm{d}x} = \int \frac{6x+6}{3x^2+6x+12}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{3x^2+6x+12}\,\mathrm{d}x = \varepsilon + 2\delta$$

Összefoglalva az előző példák tanulságait:

$$\boxed{\int \frac{\alpha\, x+\beta}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x \quad \text{típusú integrálok megoldása}}$$

$f(x) := ax^2+bx+c\,, \qquad D := b^2-4ac$

$D \geq 0$ esetén részlettörtekre bontással dolgozunk. (Ezt később vesszük.)
$D < 0$ esetén az alábbi átalakítással dolgozunk:

$$\int \frac{\alpha\, x+\beta}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = k_1\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x + k_2\int \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x = k_1\,\ln|f(x)| + k_2\int \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

A megmaradt határozatlan integrál kiszámítása:

A nevezőben teljes négyzetté kiegészítés és esetleges kiemelés után a következő alakot kapjuk:

$$\int \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x = k_3\int \frac{1}{1+(...)^2}\,\mathrm{d}x = k_3\frac{\operatorname{arctg}(...)}{(...)'} + C$$

Itt (...) : $x-$nek lineáris függvénye, így a nevezőbe konstans került.

5.2. Határozott integrál

5.2.1. Jelölések, definíciók

A továbbiakban feltesszük, hogy $a < b$.
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ és f korlátos $[a,b]$-n.

Néhány definíció

Ⓓ Osztópontok: $x_k;\ k = 0, 1, \ldots, n;\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b$

Ⓓ A k-adik részintervallum: $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, hossza: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$.

Ⓓ $[a,b]$ egy felosztása: $F = \{I_k :\ k = 1, 2, \ldots, n\}$ (= P-vel is jelöljük)

Ⓓ Alsó közelítő összeg (vagy alsó összeg): (a rögzített F felosztáshoz tartozik)

$$s_F = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \qquad m_k = \inf_{x \in I_k} \{f(x)\} \quad (\exists, \text{Dedekind})$$

Ⓓ Felső közelítő összeg (vagy felső összeg): (a rögzített F felosztáshoz tartozik)

$$S_F = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \qquad M_k = \sup_{x \in I_k} \{f(x)\} \quad (\exists, \text{Dedekind})$$

Ⓓ Az F felosztás finomsága: $\Delta F = \max\limits_{k} \Delta x_k$

Ⓓ Az $[a,b]$ intervallum (F_n) felosztásainak sorozatát minden határon túl finomodónak (m.h.t.f.f.s.) nevezzük, ha

$$\lim_{n \to \infty} \Delta F_n = 0$$

[2]lásd Thomas 05-ös bemutató 1., 2. és 3. fejezet (3-36. oldal).

Az alsó és felső összeg tulajdonságai:

T₁ $\boxed{s_F \leq S_F}$

B $m_k \leq M_k$-ból következik.

T₂ *F^* : F-ből egy új osztópont elhelyezésével származik. Ekkor*

$$s_F \leq s_{F^*} \leq S_{F^*} \leq S_F$$

Tehát a felosztás finomításával az alsó közelítő összeg (a.k.ö.) nem csökkenhet, a felső közelítő összeg (f.k.ö.) nem nőhet.

B $s_F \leq s_{F^*}$-ot bizonyítjuk. Az új osztópont kerüljön I_k-ba.

$$s_{F^*} - s_F = m'_k\,(x^* - x_{k-1}) + m''_k\,(x_k - x^*) - m_k\,(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \underbrace{(m'_k - m_k)}_{\geq 0}\,\underbrace{(x^* - x_{k-1})}_{>0} + \underbrace{(m''_k - m_k)}_{\geq 0}\,\underbrace{(x_k - x^*)}_{>0} \geq 0$$

■

T₃ $s_{F_1} \leq S_{F_2}$, *F_1, F_2 tetszőleges. Tehát bármely a.k.ö. $\leq$ bármely f.k.ö.-nél.*

B Az egyesített felosztás segítségével:

$$s_{F_1} \underset{T_2 \text{ miatt}}{\leq} s_{F_1 \cup F_2} \underset{T_1 \text{ miatt}}{\leq} S_{F_1 \cup F_2} \underset{T_2 \text{ miatt}}{\leq} S_{F_2}$$

■

T₄ $\boxed{\exists\ \sup\{s_F\} = h \ \ \text{és}\ \ \inf\{S_F\} = H}$

$h = \int\limits_{\bar{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ *Darboux-féle alsó integrál,* $H = \int\limits_{a}^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$ *Darboux-féle felső integrál*

B $\{s_F\}$ felülről korlátos számhalmaz, hiszen bármely f.k.ö. felső korlát.
$\underset{\text{Dedekind t.}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ szuprémuma.
$\{S_F\}$-re hasonlóan bizonyítható.

T₅ $\boxed{h \le H}$

B $s_{F_1} \le S_{F_2} \quad \forall\, F_1\text{-re} \quad \Longrightarrow \quad h \le S_{F_2} \quad \forall\, F_2\text{-re} \quad \Longrightarrow \quad h \le H$

A határozott integrál definíciója:

D Legyen $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.
Azt mondjuk, hogy az f függvény az $[a,b]$ intervallumon Riemann szerint integrálható, ha $h = H = I$. Ezt a közös I számot az f függvény $[a,b]$-beli határozott integráljának nevezzük és

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f$$

módon jelöljük. (f: integrálandó függvény vagy integrandusz.)

Pl. $\boxed{f(x) \equiv c \in \mathbb{R} \qquad \int_a^b c\,\mathrm{d}x = ?}$

$$s_F = \sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} c\cdot\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = c\,(b-a) \quad \forall\, F\text{-re.}$$

$$S_F = \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} c\cdot\Delta x_k = c\,(b-a) \quad \forall\, F\text{-re.}$$

$h = \sup\{s_F\} = c\,(b-a) = \inf\{S_F\} = H$
Tehát

$$\boxed{\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c\,(b-a)}$$

Pl. $\boxed{f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \qquad \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = ?}$

$$s_F = \sum_{k=1}^{n} 0\cdot\Delta x_k = 0 \quad \forall\, F\text{-re} \quad \Longrightarrow \quad h = 0$$

$$S_F = \sum_{k=1}^{n} 1\cdot\Delta x_k = b-a = 2-1 \quad \forall\, F\text{-re} \quad \Longrightarrow \quad H = 1 \ne h$$

$\Longrightarrow \quad \nexists \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \qquad$ (Más intervallumon sem integrálható!)

D Jelölés:
$R_{[a,b]}$ vagy $\sum_{[a,b]}$ az $[a,b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvények halmaza.

5.3. A Riemann-integrálhatóság szükséges és elégséges feltételei

Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.

Segédtétel:

T *Ha (F_n) m.h.t.f.f.s., akkor s_{F_n} és S_{F_n} konvergensek és*

$$\lim_{n\to\infty} s_{F_n} = h; \quad \lim_{n\to\infty} S_{F_n} = H. \qquad (\neg B)$$

T₁

1. *Ha* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \exists \implies \forall F_n$ *m.h.t.f.f.s-ra:* $\lim\limits_{n\to\infty} s_{F_n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{F_n} = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
2. *Ha* $\exists F_n$ *m.h.t.f.f.s., melyre* $\lim\limits_{n\to\infty} s_{F_n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{F_n} = I \implies \exists \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *és* $= I$.

B

1. A Segédtétel miatt: $s_{F_n} \to h \ \wedge \ S_{F_n} \to H$

   De az integrálhatóság miatt: $h = H = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. A Segédtétel miatt: $s_{F_n} \to h \ \wedge \ S_{F_n} \to H$

   A feltétel miatt azonban $h = H (:= I) \implies \exists \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ és $= I$. ∎

D Az F felosztáshoz tartozó oszcillációs összeg:

$$0 \le O_F := S_F - s_F = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k$$

T₂

$$\exists \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \iff \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists F: \quad O_F < \varepsilon$$

B

1. $\Longrightarrow \quad \varepsilon \to \dfrac{\varepsilon}{2}$

   $\dfrac{\varepsilon}{2}$-höz $\exists\, F^*$ és F^{**}, hogy $h - s_{F^*} < \dfrac{\varepsilon}{2} \;\wedge\; S_{F^{**}} - H < \dfrac{\varepsilon}{2}$

   $F := F^* \cup F^{**}$ (egyesített felosztás)

   Tudjuk: $s_{F^*} \le s_F \le S_F \le S_{F^{**}}$ Ebből:

$$0 \le O_F = S_F - s_F \le S_{F^{**}} - s_{F^*} = \underbrace{S_{F^{**}} - H}_{\ge 0} + \underbrace{h - s_{F^*}}_{\ge 0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. $\Longleftarrow$

   Mivel $s_F \le h \le H \le S_F$ mindig fennáll:

$$0 \le H - h \le S_F - s_F = O_F < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0\text{-ra} \quad \Longrightarrow \quad H = h,$$

vagyis f Riemann-integrálható $[a, b]$-n. ■

D Az f függvény F felosztáshoz tartozó integrálközelítő összege:

$$\sigma_F = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}),$$

ahol $\xi_k \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$: reprezentáns pont,
$f(\xi_k)$: reprezentáns függvényérték.

M₁ Geometriai tartalom: a függvénygörbe alatti (előjeles) terület közelítő értéke.

M₂ $s_F \le \sigma_F \le S_F$ mindig fennáll.
Ugyanis minden részintervallumon teljesül, hogy $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$. Ebből már következik az állítás.

T₃

1. *$\exists \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I \quad \Longrightarrow \quad \forall F_n$ m.h.t.f.f.s-ra a reprezentáns pontok választásától függetlenül a σ_{F_n} integrálközelítő összeg sorozatra fennáll, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{F_n} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I$$

2. $\exists \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I \quad \Longleftarrow \quad \exists F_n$ *m.h.t.f.f.s., hogy a reprezentáns pontok választásától függetlenül* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{F_n} = I$.

Ⓑ

1. Nyilvánvaló T_1-ből, ugyanis $\underset{\substack{\downarrow \\ I}}{s_{F_n}} \le \sigma_{F_n} \le \underset{\substack{\downarrow \\ I}}{S_{F_n}} \quad \Longrightarrow \quad \sigma_{F_n} \to I.$

2. $\neg$B ■

Ⓜ Fontos, hogy a határérték a reprezentáns pontok választásától függetlenül létezzen. Pl. a Dirichlet-függvényre tetszőleges F_n m.h.t.f.f.s-ra:

ξ_k rac. esetén: $\quad \sigma_{F_n} = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = \Delta x_1 + \cdots + \Delta x_n = b - a \to b - a$

ξ_k irrac. esetén: $\quad \sigma_{F_n} = \sum\limits_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0 \to 0.$

Ezért a Dirichlet-függvény egyetlen intervallumon sem integrálható.

5.4. Elégséges tételek Riemann-integrálhatóságra

T_1 *$f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos és monoton* $\quad \Longrightarrow \quad f \in R_{[a,b]}$

Ⓑ f legyen monoton növő!

$\Delta x_k := \dfrac{b-a}{n}$ (egyenletes felosztás; ekvidisztáns alappontok)

$$O_F = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) =$$

$$= \frac{b-a}{n}(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + f(x_3) - f(x_2) + \cdots + f(x_n) - f(x_{n-1})) =$$

$$= \frac{b-a}{n}(f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon, \text{ ha } n > \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$$

Tehát $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, F:\ \ O_F < \varepsilon$

(F : I-t n egyenlő részre osztjuk, az $n > \dfrac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$ feltétel teljesülése mellett.)

T₂ $f \in C^0_{[a,b]} \quad \Longrightarrow \quad f \in R_{[a,b]}$

B Belátjuk, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, F: \quad O_F < \varepsilon$.

$\varepsilon > 0$ legyen tetszőleges. $f \in C^0_{[a,b]} \quad \Longrightarrow \quad f$ egyenletesen folytonos $[a,b]$-n, vagyis

$$\forall\, \varepsilon^* := \frac{\varepsilon}{b-a} > 0\text{-hoz } \exists\, \delta(\varepsilon^*):$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon^*, \text{ ha } \quad |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon^*); \quad x_1, x_2 \in [a,b]$$

F_n legyen egy minden határon túl finomodó felosztás sorozat, tehát $\Delta F_n \xrightarrow[\infty]{n} 0$.
Ezért $\exists\, n_0: \ \Delta F_{n_0} < \delta(\varepsilon^*) = \delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$. Erre az F_{n_0} felosztásra igaz:

$$O_{F_{n_0}} = S_{F_{n_0}} - s_{F_{n_0}} = \sum_{k=1}^{n_0} (M_k - m_k)\Delta x_k =$$

A folytonosság miatt f felveszi szuprémumát, ill. infimumát (Weierstrass II. tétele)

$$= \sum_{k=1}^{n_0} \left(f\left(\xi'_k\right) - f\left(\xi''_k\right)\right)\Delta x_k <$$

$|\xi'_k - \xi''_k| \le \Delta x_k < \delta(\varepsilon^*)$, így az egyenletes folytonosság miatt $0 \le f(\xi'_k) - f(\xi''_k) < \varepsilon^*$

$$< \sum_{k=1}^{n_0} \varepsilon^* \Delta x_k = \varepsilon^* \sum_{k=1}^{n_0} \Delta x_k = \varepsilon^*(b-a) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

■

Tehát $F = F_{n_0}$.

T₃ *f korlátos és egy pont kivételével folytonos $[a,b]$-n* $\quad \Longrightarrow \quad f \in R_{[a,b]}$

B Belátjuk, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, F: \ O_F < \varepsilon$.

Az intervallumot 3 részre osztjuk. (f az x_0 pontban nem folytonos)

1. Vizsgálat

   $$O_{II} = (M_{II} - m_{II}) \cdot 2\delta \underset{|f(x)| \le K}{\le} 2K \cdot 2\delta < \frac{\varepsilon}{3}$$

   Feltétel: $\delta < \dfrac{\varepsilon}{12K}$ $\quad (\varepsilon, K$ adott). Ilyen δ-t választva $O_{II} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

2. $[a, x_0 - \delta]$-n f folytonos $\implies$ $\exists F^{(1)}:\ O_I = O_{F^{(1)}} < \dfrac{\varepsilon}{3}$

3. $[x_0 + \delta, b]$-n f folytonos $\implies$ $\exists F^{(2)}:\ O_{III} = O_{F^{(2)}} < \dfrac{\varepsilon}{3}$ ■

F: a 3 felosztás egyesítése:

$$O_F = O_I + O_{II} + O_{III} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

A következő tételeket bizonyítás nélkül közöljük.

T *Ha f korlátos és véges sok pont kivételével folytonos $[a, b]$-n, akkor integrálható $[a, b]$-n.*

T *Egy Riemann-integrálható függvény értékét véges sok pontban megváltoztatva a függvény integrálható marad, és az integrál értéke is ugyanaz.*

T *Ha $f \in R_{[-a,a]}$ és*

f páratlan: $$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

f páros: $$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.5. Newton–Leibniz-tétel

T ***Newton–Leibniz-tétel***

Ha $f \in R_{[a,b]}$ és itt létezik primitív függvénye (F), azaz $x \in [a, b]$-re $F'(x) = f(x)$, akkor

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

[3]lásd Thomas 05-ös bemutató 4. fejezet (37-48. oldal).

B F_n: m.h.t.f.f.s.

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1}))$$

Ugyanis

$$\sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) = (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + (F(x_3) - F(x_2)) +$$
$$+ \ldots + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + (F(x_n) - F(x_{n-1})) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)$$

Másrészt az $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ intevallumon az F függvényre alkalmazható a Lagrange-féle középértéktétel, miszerint

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = F'(\xi_k)\,\Delta x_k$$

Ezért

$$\sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} F'(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sigma_{F_n}^{f}$$

Vagyis

$$F(b) - F(a) = \sigma_{F_n}^{f}$$

Mindkét oldal limeszét véve:

$$\lim_{n\to\infty} (F(b) - F(a)) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{F_n}^{f}$$

A bal oldal határértéke önmaga, hiszen független n-től, a jobb oldalon f integrál közelítő összege az integrálhatósági feltétel miatt az integrálhoz tart. Tehát

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

■

Pl. $\boxed{\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x} = \left.\dfrac{x^4}{4}\right|_0^1 = \dfrac{1}{4}$

Pl. $\boxed{\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x} = -\cos x\big|_0^{2\pi} = -1 - (-1) = 0$

Pl. $\boxed{\int\limits_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x} = -\cos x|_0^\pi = 1 - (-1) = 2$

M Mindkét feltétel fontos a Newton–Leibniz-tételben. Az alábbi példák mutatják, hogy egyik sem hagyható el.

Pl. $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

($x = 0$-ban a definícióval kell számolni.)

$\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \nexists$, mert f nem korlátos, de $\exists$ primitív függvény.

Pl. $\int\limits_0^5 \operatorname{sgn}(x^2 - 5x + 6)\,\mathrm{d}x \,\exists$, mert f 2 pont kivételével folytonos. De $F \nexists$, mert egy deriváltfüggvénynek (f lenne) nem lehet elsőfajú szakadása.

5.6. A Riemann-integrál tulajdonságai

D $f \in R_{[a,b]}$ $(b > a)$ $\qquad \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

D $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0$ (az előzővel összhangban)

T *Ha* $f \in R_{[a,c]}$ *és* $f \in R_{[c,b]}$ $(a < c < b)$ $\implies$ $f \in R_{[a,b]}$ *és*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\neg B)$$

T *Ha* $f \in R_{[a,b]}$ $\implies$ $f \in R_{[a,c]}$, *ha* $c \in [a,b]$ $\qquad (\neg B)$

T *Ha* $f, g \in R_{[a,b]} \implies f+g \in R_{[a,b]}$ *és* $c \cdot f \in R_{[a,b]}$ *és*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

$$\text{és} \quad \int_a^b c\,f(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Tehát $R_{[a,b]}$ *lineáris tér (vektortér).*

B Pl. $f+g$-re:

F_n: m.h.t.f.f.s.; reprezentáns pontok: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

$$\sigma_{F_n}^f = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I_1$$

$$\sigma_{F_n}^g = \sum_{k=1}^n g(\xi_k)\Delta x_k \to \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = I_2$$

a reprezentáns pontok választásától függetlenül.

$$\implies \quad \sigma_{F_n}^{f+g} = \sum_{k=1}^n (f+g)(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^n g(\xi_k)\Delta x_k \to I_1 + I_2$$

D $\Phi:\ H \to \mathbb{R}$ leképezés (operátor) funkcionál, ha
H: tetszőleges halmaz, $\mathbb{R}$: a valós számok halmaza.

D $\Phi:\ H \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, ha
H: lineáris tér a valós számok teste felett, $\mathbb{R}$: a valós számok halmaza.
Φ lineáris operátor, tehát $\Phi(cx) = c\Phi(x)$, $\Phi(x_1+x_2) = \Phi(x_1)+\Phi(x_2)$.

Pl. $\Phi(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\quad \Phi:\ R_{[a,b]} \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál.
Ui. igaz: $\Phi(cf) = c\Phi(f)$ (homogén), $\Phi(f+g) = \Phi(f)+\Phi(g)$ (additív).

T *Ha* $f \in R_{[a,b]}$ *és* $f(x) \geq 0\,,$ *ha* $x \in [a,b] \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

B $\sigma_F^f \geq 0\ \forall F$-re $\implies \lim\limits_{\Delta F \to 0} \sigma_F^f \geq 0$

Ⓣ *Ha* $f, g \in R_{[a,b]}$ *és* $f(x) \le g(x)$ $x \in [a,b]$ *-ben* $\Longrightarrow$ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Ⓑ $h(x) := g(x) - f(x) \ge 0$ + előző tételek.

Tehát

$$\begin{array}{ll} f \ge 0: & \Phi(f) \ge 0 \\ f \le g: & \Phi(f) \le \Phi(g) \quad \text{(monotonitás)} \end{array}$$

5.7. Az integrálszámítás középértéktétele

Ⓓ Integrálközép: $$\varkappa := \frac{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} \qquad (b > a)$$

Ⓣ

1. Ha $f \in R_{[a,b]}$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$, *akkor* $m \le \varkappa \le M$.

2. Ha $f \in C^0_{[a,b]}$, *akkor* $\exists\, \xi \in [a,b]$, *hogy* $f(\xi) = \varkappa$.

Ⓑ

1. Mivel $m \le f(x) \le M$, az integrál monotonítása miatt:

$$m(b-a) = \int_a^b m\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b M\,\mathrm{d}x = M(b-a)$$

   Innen $(b-a)$-val való osztással adódik az állítás.

2. Weierstrass II. tétele miatt f felveszi m-et és M-et, tehát

$$\exists\, \xi_1, \xi_2 \in [a,b], \text{ hogy } \quad f(\xi_1) = m \text{ és } f(\xi_2) = M$$

   $[\xi_1, \xi_2]$-re (ill. $[\xi_2, \xi_1]$-re) alkalmazható a Bolzano-tétel. Mivel $m \le \varkappa \le M$, a Bolzano-tétel értelmében

$$\exists\, \xi \in [\xi_1, \xi_2] \text{ (ill. } \xi \in [\xi_2, \xi_1]), \text{ hogy } f(\xi) = \varkappa$$ ■

D Az f függvény f^+ pozitív részét és f^- negatív részét a következőképpen definiáljuk:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{ha } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x) \leq 0 \\ 0, & \text{ha } f(x) > 0 \end{cases}$$

M Könnyen látható, hogy $f = f^+ + f^-$ és $|f| = f^+ - f^-$.

T *Ha* $f \in R_{[a,b]}$, *ahol* $a < b$, *akkor*

1. $f^+ \in R_{[a,b]}$, $f^- \in R_{[a,b]}$ *és* $|f| \in R_{[a,b]}$

2. $\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

B

1. Az oszcillációs összegekre vonatkozó szükséges és elégséges tételből következik, mivel $O_P^{f^+} \leq O_P^f < \varepsilon$ és $O_P^{f^-} \leq O_P^f < \varepsilon$, ezért f^+, illetve f^- Riemann-integrálható, valamint különbségük $|f| \in R_{[a,b]}$.

2. Mivel
$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|\,,$$
ezért az integrál monotonitása miatt
$$-\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$
amit bizonyítani kellett. ■

M Ha nem tesszük fel, hogy $a < b$, akkor a 2. tétel állítása
$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\right|$$
alakú lesz.

Pl. Az alábbi függvény példa arra, hogy ha $|f| \in R_{[a,b]}$, akkor $f \in R_{[a,b]}$ nem feltétlenül teljesül.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -1, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

$|f(x)| \equiv 1$ folytonos $\implies |f| \in R_{[a,b]}$, de $f \notin R_{[a,b]}$

5.7.1. Feladatok

1. $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -3, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$

   Léteznek-e az alábbi integrálok?

   a) $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

   b) $\int\limits_0^2 |f(x)|\,\mathrm{d}x$

   c) $\int\limits_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$

2. A középértéktétel felhasználásával becsülje meg az

$$\int\limits_0^3 \sqrt{1+\cos^2 x}\ \ \mathrm{d}x$$

   integrál értékét!

3. Határozza meg az

$$f(x) = \cos^3 x$$

   függvény $[0, \pi]$ intervallumbeli integrálközepét!

4. Adjon 0-tól különböző alsó, illetve felső becslést az

$$\int\limits_0^1 \frac{1-x^2}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

   integrál értékére!

5. Mutassa meg, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség!

   a) $0 < \int\limits_0^1 \frac{x^7}{\sqrt[3]{1+x^6}}\,\mathrm{d}x < \frac{1}{8}$

   b) $0 < \int\limits_0^{100} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x < 1$

c) $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x < 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

d) $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2\,\mathrm{e}} < \int\limits_0^1 x\mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x$

e) $\left| \int\limits_0^1 \dfrac{\cos(cx^3)}{x+1}\,\mathrm{d}x \right| \le \ln 2\,,$ $\quad c$ tetszőleges valós szám

6. $\int\limits_{-2}^{2} \operatorname{sgn} x \cdot x^2 \cdot \cos x \;\mathrm{d}x \;= ?$

7. $\int\limits_0^2 \sqrt{1-2x+x^2}\;\mathrm{d}x \;= ?$

8. $\int\limits_{-2}^{3} |x^3 - 2x^2|\;\mathrm{d}x \;= ?$

5.8. Integrálfüggvény

Pl.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [0,1] \\ 3x-2, & \text{ha } x \in (1,2] \end{cases}$$

$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \;= ?\,,\quad$ ha $\quad x \in [0,2]\,;\qquad\qquad F'(x) \;= ?$

Megoldás.

Ha $x \in [0,1]$:

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^x t\,\mathrm{d}t = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}$$

Ha $x \in (1,2]$:

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 t\,\mathrm{d}t + \int\limits_1^x (3t-2)\,\mathrm{d}t = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(3\,\frac{t^2}{2} - 2t\right)\right|_1^x = \frac{3}{2}\,x^2 - 2x + 1$$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & \text{ha } x \in [0,1] \\ \dfrac{3}{2}x^2 - 2x + 1, & \text{ha } x \in (1,2] \end{cases} \qquad F'(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \le x < 1 \\ 3x-2, & \text{ha } 1 < x \le 2 \\ 1, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

Tehát $F'(x) = f(x)$. Látni fogjuk, hogy ez nem véletlen.

Ⓓ $f \in R_{[a,b]}$. Az

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad x \in [a,b]$$

függvényt f integrálfüggvényének nevezzük.

Ⓣ ***Az integrálszámítás II. alaptétele***

$$f \in R_{[a,b]}; \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]$$

1. *Az integrálfüggvény folytonos $[a,b]$-ben.*
2. *Ha még f folytonos is $x_0 \in (a,b)$-ben, akkor F differenciálható x_0-ban és*
$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Ⓑ

1. $f \in R_{[a,b]} \implies \exists\, K:\ |f(x)| \le K$. Mi csak belső pontra bizonyítunk. Legyen $x_0 \in (a,b)$. Meg kell mutatnunk, hogy

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon\,, \text{ ha } |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| \le \left| \int_{x_0}^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \right| \le$$

$$\le \left| \int_{x_0}^x K\,\mathrm{d}t \right| = |K(x - x_0)| = K|x - x_0| < \varepsilon, \text{ ha } |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{K} = \delta(\varepsilon)$$

2. $F'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)\,$, ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0:$

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon\,, \qquad \text{ha } 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right| =$$

$$= \left|\frac{F(x)-F(x_0)-f(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}\right| = \left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t}{x-x_0}\right| =$$

$$= \left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x} (f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t}{x-x_0}\right| \le \frac{\left|\int\limits_{x_0}^{x} |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t\right|}{|x-x_0|} := \circledast$$

Mivel f folytonos x_0-ban, $\exists\,\delta(\varepsilon)>0:\ \ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, ha $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$.

(Legyen x ilyen!) Most $|t-x_0| \le |x-x_0| < \delta(\varepsilon)$, így ezzel a $\delta(\varepsilon)$-nal

$$\circledast < \frac{\left|\int\limits_{x_0}^{x} \varepsilon\,\mathrm{d}t\right|}{|x-x_0|} = \frac{|\varepsilon(x-x_0)|}{|x-x_0|} = \varepsilon$$

■

Következmény:

1. Ha $f \in C^0_{[a,b]}$, akkor $\forall\, x \in (a,b)$-re $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ differenciálható és

   $F'(x) = f(x)$.

2. Folytonos függvénynek mindig létezik primitív függvénye.

5.8.1. Példák

Pl. $\boxed{F(x) = \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t}$

A függvényt zárt alakban nem tudjuk előállítani, de a következőket tudjuk róla:

$F(0) = 0$
$F'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} > 0:\quad F$ szig. monoton nő
$F''(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}:\quad x<0:\ F$ alulról konvex, $\quad x>0:\ F$ alulról konkáv
A függvény páratlan: $F(-x) = \int\limits_0^{-x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{t:=-u}{=} \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-(-u)^2}(-1)\,\mathrm{d}u = -F(x)$

(Helyettesítés hátrébb!)

Pl. Keresse meg az alábbi függvények deriváltjait!

$$F(x) = \int_0^x \sin t^2 \,\mathrm{d}t, \quad x \neq 0$$

$$G(x) = \int_0^{\mathrm{e}^x} \sin t^2 \,\mathrm{d}t$$

$$H(x) = \int_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^x+1} \sin t^2 \,\mathrm{d}t$$

$f(t) = \sin t^2$ folytonossága miatt $\exists F'(x)$ és $F'(x) = \sin x^2$.

$G(x) = F(\mathrm{e}^x)$ deriválható, mert deriválható függvények összetétele. A láncszabállyal:

$$G'(x) = F'(\mathrm{e}^x) \cdot \mathrm{e}^x = (\sin \mathrm{e}^{2x}) \cdot \mathrm{e}^x$$

$H(x) = F(\mathrm{e}^x + 1) - F(\mathrm{e}^x)$ szintén a láncszabállyal deriválható:

$$H'(x) = F'(\mathrm{e}^x + 1) \cdot \mathrm{e}^x - F'(\mathrm{e}^x) \cdot \mathrm{e}^x = (\sin (\mathrm{e}^x + 1)^2) \cdot \mathrm{e}^x - (\sin \mathrm{e}^{2x}) \cdot \mathrm{e}^x$$

Pl. $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{arctg} t^2 \,\mathrm{d}t}{x^2} = ?}$

$\frac{0}{0}$ alakú és alkalmazható a L'Hospital-szabály:

(A számláló $\operatorname{arctg} t^2$ folytonossága miatt deriválható)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{arctg} t^2 \ \mathrm{d}t}{x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{2x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^4} \cdot 2x}{2} = 0$$

Pl. $f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & \text{ha } 0 \le t < 1 \\ t - 1, & \text{ha } 1 \le t \le 2 \end{cases}$ $\qquad F(x) = \int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t$

1. $F''(1) = ?$
2. A $(0, 2)$ intervallumon hol konvex, ill. konkáv az F függvény?

f folytonossága miatt $F'(x) = f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{ha } 0 < x < 1 \\ x - 1, & \text{ha } 1 \le x < 2 \end{cases}$

$$F''(x) = \begin{cases} -2x, & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{ha } 1 < x < 2 \end{cases}$$

F' folytonos 1-ben. $g(x) = 1 - x^2$, $h(x) = x - 1$ mindenütt deriválható. Így

$$F''_-(1) = F''(1-0) = -2 \neq 1 = F''_+(1) = F''(1+0)$$

Tehát $\nexists F''(1)$.

F függvény $(0, 1)$-ben konkáv $(F'' < 0$ itt$)$ és $(1, 2)$-ben konvex $(F'' > 0$ itt$)$.

5.8.2. Feladatok

1. a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int\limits_a^b \cos\left(x^3+1\right)\ \mathrm{d}x = ?$

   b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} \int\limits_a^b \cos\left(x^3+1\right)\ \mathrm{d}x = ?$

   c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} \int\limits_a^b \cos\left(x^3+1\right)\ \mathrm{d}x = ?$

2. $F(x) = \int\limits_0^x \mathrm{e}^{t^2+1}\ \mathrm{d}t; \qquad G(x) = \int\limits_0^{x^2} \mathrm{e}^{t^2+1}\ \mathrm{d}t \qquad H(x) = \int\limits_{2x}^{3x} \mathrm{e}^{t^2+1}\ \mathrm{d}t$

   Határozza meg a deriváltfüggvényeket, ahol azok léteznek!

3. $f(x) = \int\limits_0^x \mathrm{e}^{x^2}\left(x^2-4\right)\ \mathrm{d}x$

   a) Hol monoton f? Hol van lokális szélsőértéke?

   b) Hol konvex, hol konkáv? Hol van inflexiós pontja?

4. $f(x) = \int\limits_0^x x^2 \arcsin x\ \mathrm{d}x$

   a) Milyen pozitív x-ekre differenciálható f?

   b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int\limits_0^x x^2 \arcsin x\ \mathrm{d}x}{x}$

   c) Írja fel a függvény $x_0 = \dfrac{1}{2}$ pontbeli érintő egyenesének egyenletét!

5. $f(t) = \begin{cases} t+1, & \text{ha } -1 \le t \le 0 \\ -t+1, & \text{ha } 0 < t \le 1 \end{cases}$

   a) Írja fel a $G(x) = \int\limits_{-1}^x f(t)\ \mathrm{d}t$ függvényt! $(x \in [-1,1])$

   b) Differenciálható-e a felírt G függvény $(-1,1)$-ben?

6. $f(x) = \int\limits_0^x \dfrac{1}{8t^7+5t^3+2t+6}\ \mathrm{d}t, \quad x \in [0,3]$

   a) Van-e f-nek lokális szélsőértéke $(0,3)$-ban?

   b) Hol veszi fel a függvény $[0,3]$-ban a minimumát, illetve maximumát? (A minimum, ill. maximum értéke nem kell.)

   c) Van-e inflexiós pontja f-nek?

5.9. Integrálás helyettesítéssel

(T) *Legyen* $f \in C^0_{[a,b]}$, $\varphi \in C^1_{[\alpha,\beta]}$ *szigorúan monoton és* $\varphi(t) \in [a,b]$, *ha* $t \in [\alpha,\beta]$ $([\beta,\alpha])$.

1. *Ekkor*

   $\int f(x)\ \mathrm{d}x\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t \qquad t \in [\alpha,\beta]$

   (Vagyis $\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\ \varphi'(t)\ \mathrm{d}t\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$*)*

2. *Ha* $\varphi(\alpha) = a$ *és* $\varphi(\beta) = b$: $\qquad \int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\ \varphi'(t)\ \mathrm{d}t$

(B)

1. Az integranduszok folytonossága miatt mindkét határozatlan integrál létezik. Legyen

   $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \quad x \in [a,b].$$

   Azt kell belátnunk, hogy $f(\varphi(t))\ \varphi'(t)$ primitív függvénye $F(\varphi(t))$ $[\alpha,\beta]$-ban:

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\ \varphi'(t) = f(\varphi(t))\ \varphi'(t)$$

2.

   $$\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

   és

   $$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\ \varphi'(t)\ \mathrm{d}t = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

■

5.10. Integrálási módszerek

5.10.1. sin és cos szorzata

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Ezen azonosságok felhasználásával ($\alpha = a\,x$, $\beta = b\,x$):

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\,\left(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right)$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}\,\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right)$$

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\,\left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right)$$

Pl. $\boxed{\int \sin\pi x \cdot \cos 5x \;\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\int\left(\sin(\pi+5)x + \sin(\pi-5)x\right)\;\mathrm{d}x =$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(\pi+5)x}{\pi+5} - \frac{\cos(\pi-5)x}{\pi-5}\right) + C$$

Feladatok:

1. $\int \sin\sqrt{2}x \cdot \sin 3x \;\mathrm{d}x = ?$
2. $\int \cos 3x \cdot \cos 8x \;\mathrm{d}x = ?$

5.10.2. sin és cos páratlan kitevőjű hatványai

$$\sin^{2n+1} x = \sin x \cdot (\sin^2 x)^n = \sin x(1-\cos^2 x)^n = \dots$$

$$\cos^{2n+1} x = \cos x \cdot (\cos^2 x)^n = \cos x(1-\sin^2 x)^n = \dots$$

(Az átalakítás után a hatványozás elvégzése szükséges)

Pl. $\boxed{\int \sin^3 x \;\mathrm{d}x} = \int \sin x\;\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \sin x\;(1-\cos^2 x)\;\mathrm{d}x =$

$$= \int(\sin x - \sin x\;\cos^2 x)\,\mathrm{d}x = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

---

[4]lásd Thomas 05-ös bemutató 5. fejezet (49-53. oldal).

[5]lásd Thomas 08-as bemutató 1.-5. fejezet (3-24. oldal).

Feladatok:

1. $\int \cos^3 x \, \mathrm{d}x = ?$
2. $\int \cos^7 x \, \mathrm{d}x = ?$

5.10.3. sin és cos páros kitevőjű hatványai

$$\sin^{2n} x = (\sin^2 x)^n = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^n = \ldots$$

$$\cos^{2n} x = (\cos^2 x)^n = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^n = \ldots$$

(Azonos átalakítás a kitevőt csökkenti.)

Pl. $\boxed{\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x} = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$

Feladatok:

1. $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = ?$
2. $\int \cos^6 x \, \mathrm{d}x = ?$

5.10.4. sin és cos hatványainak szorzata

$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, \mathrm{d}x = ? \qquad n, m \in \mathbb{N}^+$

1. n és m közül legalább az egyik páratlan:

Pl. $\boxed{\int \sin^3 x \, \cos^4 x \, \mathrm{d}x} = \int \sin x \, \underbrace{\sin^2 x}_{=1-\cos^2 x} \cos^4 x \, \mathrm{d}x =$

$$= \int \sin x \, (\cos^4 x - \cos^6 x) \, \mathrm{d}x = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

Feladat:

$\int \cos^3 x \, \sin^5 x \, \mathrm{d}x = ?$

2. n és m is páros:

Pl. $\boxed{\int \underbrace{\sin^2 x}_{=1-\cos^2 x} \cos^4 x \, \mathrm{d}x} = \int (\cos^4 x - \cos^6 x) \, \mathrm{d}x = \ldots$

5.10.5. Parciális integrálás

A szorzatfüggvény

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \qquad (u,v\in C_I^1)$$

deriválási szabályából

$$u(x)\cdot v'(x) = (u(x)\cdot v(x))' - u'(x)\cdot v(x)$$

és ebből adódik a parciális integrálás módszere:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\ \mathrm{d}x \ = \ u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\ \mathrm{d}x, \qquad x\in I$$

Határozott integrálra:

$$\int\limits_a^b u(x)\cdot v'(x)\ \mathrm{d}x \ = \ u(x)\cdot v(x)\big|_a^b \ - \ \int\limits_a^b u'(x)\cdot v(x)\ \mathrm{d}x$$

Az alábbi három esetet kell felismerniük:

1.

$$\int \underset{u}{\text{polinom}}\cdot \underset{v'}{\left\{\begin{array}{c} \mathrm{e}^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \\ \operatorname{sh} ax \\ \operatorname{ch} ax \end{array}\right\}}\ \mathrm{d}x \ = ?$$

(n-edrendű polinomnál n-szer kell parciálisan integrálni.)

Pl. $$\boxed{\int \underset{\substack{u=x^2 \\ u'=2x}}{x^2}\ \underset{\substack{v'=\mathrm{e}^{5x} \\ v=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}}}{\mathrm{e}^{5x}}\ \mathrm{d}x} = x^2\,\frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{5x} - \frac{2}{5}\int \underset{\substack{u=x \\ u'=1}}{x}\ \underset{\substack{v'=\mathrm{e}^{5x} \\ v=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}}}{\mathrm{e}^{5x}}\ \mathrm{d}x =$$

$$= x^2\frac{\mathrm{e}^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left(\frac{x}{5}\mathrm{e}^{5x} - \frac{1}{5}\int \mathrm{e}^{5x}\ \mathrm{d}x\right) = \mathrm{e}^{5x}\left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{25}x + \frac{2}{125}\right) + C$$

Feladatok:

a) $\int (2x+1)\sin 6x \;\, \mathrm{d}x = ?$

b) $\int (x^2+1)\cos^2 x \;\, \mathrm{d}x = ?$

c) $\int x\cos x \sin x \;\, \mathrm{d}x = ?$

d) $\int x^2 \operatorname{sh} 2x \;\, \mathrm{d}x = ?$

2.

$$\boxed{\int \underbrace{\text{polinom}\cdot}_{v'} \underbrace{\left\{\begin{matrix} \ln ax \\ \arcsin ax \\ \arccos ax \\ \operatorname{arctg} ax \\ \operatorname{arcctg} ax \\ \operatorname{arsh} ax \\ \vdots \end{matrix}\right\}}_{u} \mathrm{d}x \quad = ?}$$

Pl. $\boxed{\int \ln x \,\mathrm{d}x} = \int \underset{\substack{v'=1\\ v=x}}{1} \quad \underset{\substack{u=\ln x\\ u'=\frac{1}{x}}}{\ln x} \quad \mathrm{d}x \;=\; x\ln x - \int 1 \;\, \mathrm{d}x = x\ln x - x + C$

Feladatok:

a) $\int \arcsin x \;\, \mathrm{d}x = ?$

b) $\int x \operatorname{arctg} x \;\, \mathrm{d}x = ?$

3.

$$\boxed{\int \left\{\begin{matrix} \mathrm{e}^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \\ \operatorname{sh} ax \\ \operatorname{ch} ax \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} \mathrm{e}^{bx} \\ \sin bx \\ \cos bx \\ \operatorname{sh} bx \\ \operatorname{ch} bx \end{matrix}\right\} \mathrm{d}x = ?}$$

(Két parciális integrálással oldható meg.)

Bizonyos párosításokat sokkal egyszerűbben is integrálhatunk. Melyek ezek?

De pl. az alábbi integrált csak így tudjuk kiszámolni:

Pl. $\boxed{\int \mathrm{e}^{3x} \;\; \sin 2x \;\, \mathrm{d}x \; = ?}$

$$\int \underset{\substack{u=\mathrm{e}^{3x}\\ u'=3\mathrm{e}^{3x}}}{\mathrm{e}^{3x}} \; \underset{\substack{v'=\sin 2x\\ v=-\frac{\cos 2x}{2}}}{\sin 2x} \; \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\int \underset{\substack{u=\mathrm{e}^{3x}\\ u'=3\mathrm{e}^{3x}}}{\mathrm{e}^{3x}} \; \underset{\substack{v'=\cos 2x\\ v=\frac{\sin 2x}{2}}}{\cos 2x} \; \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}\sin 2x - \frac{3}{2}\int \mathrm{e}^{3x}\sin 2x \; \mathrm{d}x\right)$$

Ezt az egyenletet kell megoldani a keresett integrálra:

$$\int \mathrm{e}^{3x} \; \sin 2x \; \mathrm{d}x = \frac{4}{13}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{3x}\sin 2x\right) + C$$

Másik lehetőség: parciálisan integrálunk két különböző kiosztással, majd a kapott egyenletrendszert megoldjuk az eredeti integrálra.

$$X = \int \underset{u=\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}} \; \underset{v'=\sin 2x}{\sin 2x} \; \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{3x}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \underbrace{\int 3\,\mathrm{e}^{3x}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\; \mathrm{d}x}_{\frac{3}{2}Y}$$

$$X = \int \underset{v'=\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}} \; \underset{u=\sin 2x}{\sin 2x} \; \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{3x}\,\frac{1}{3}\,\sin 2x - \underbrace{\int \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3x}\; 2\,\cos 2x \; \mathrm{d}x}_{-\frac{2}{3}Y}$$

Gy

$\rightarrow$ (Ezt az egyenletrendszert kell megoldani X-re.)

5.10.6. Racionális törtfüggvények integrálása

1. lépés: Valódi törtfüggvény-e? Ha nem, osztással átalakítjuk egy racionális egész függvény és egy valódi racionális törtfüggvény összegére.

2. lépés: A valódi törtfüggvény nevezőjében lévő polinomot felírjuk valós együtthatójú első- és másodfokú gyöktényezők szorzataként.

3. lépés: Résztörtekre bontunk.

Pl. $\boxed{\int \frac{2x^4+3x^3-18x^2+8x+1}{x^2+2x-8}\; \mathrm{d}x = ?} := X$

Áltört: $(2x^4+3x^3-18x^2+8x+1) \; : \; (x^2+2x-8) = 2x^2-x\,,$ maradék$=1$

$$X = \int\left(2x^2 - x + \frac{1}{x^2+2x-8}\right)\; \mathrm{d}x = \int\left(2x^2 - x + \frac{1}{6}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{6}\frac{1}{x+4}\right)\; \mathrm{d}x =$$

$$= 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{1}{6}\ln|x+4| + C$$

Ugyanis $\qquad \dfrac{1}{x^2+2x-8} = \dfrac{1}{(x-2)(x+4)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+4}$

Az együtthatók meghatározása:

1. Behelyettesítéssel (közös nevezőre hozás után a számlálókat egyeztetve):

$$1 = A(x+4) + B(x-2)$$

$$x=-4: \quad 1 = B(-6) \qquad B = -\frac{1}{6}$$

$$x=2: \quad 1 = A\cdot 6 \qquad A = \frac{1}{6}$$

2. Együttható összehasonlítással:

$$1 = (A+B)x + 4A - 2B$$

$$4A - 2B = 1 \text{ és } A + B = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{6},\ B = -\frac{1}{6}$$

Pl. $\boxed{\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x = ?} := X$

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + A \quad \Longrightarrow \quad A=1,\ B=-1,\ C=1$$

$$X = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \operatorname{arctg} x + C$$

Feladatok: $\xrightarrow{\text{Gy}}$

$$\int \frac{2x^2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int \frac{2x^2+1}{x^2(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x = ? \quad \left(= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}{x^2+2x+2}\right)\,\mathrm{d}x = \cdots \right)$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,\mathrm{d}x = ? \quad \left(= \int \left(1 + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \cdots \right)$$

5.10.7. Integrálás helyettesítéssel

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x\bigg|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

1. $\boxed{\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x\,, \qquad a\neq 0}$

Teljes négyzetté kiegészítéssel az alábbi alakok valamelyikére hozzuk:

$\sqrt{1-A^2} \qquad A := \sin t, \quad t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ (vagy $A := \cos t, \quad t\in[0,\pi]$

$\sqrt{B^2+1} \qquad B := \operatorname{sh} t$

$\sqrt{C^2-1} \qquad C := \operatorname{ch} t$

A $\cos^2 t+\sin^2 t = 1; \quad \operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t = 1$ azonosságok felhasználásával elvégezhető a gyökvonás.

Pl. $\boxed{\int\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = ?} := X$

$x=\sin t\ (=\varphi(t)) \quad\Longrightarrow\quad t=\arcsin x$

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos t\ (=\varphi'(t)) \qquad (\mathrm{d}x = \cos t\ \mathrm{d}t)$

$$\int\sqrt{1-\sin^2 t}\ \cos t\,\mathrm{d}t = \int|\cos t|\ \cos t\ \mathrm{d}t = \int\cos^2 t\ \mathrm{d}t =$$

$$= \int\frac{1+\cos 2t}{2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t + C \qquad t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$X = \left(\frac{1}{2}t+\frac{2}{4}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}+C\right)\bigg|_{t=\arcsin x} = \frac{\arcsin x}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$$

Határozott integrál esetén:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\ \mathrm{d}t \qquad a=\varphi(\alpha),\ b=\varphi(\beta)$$

Pl.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\ \cos t\ \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\,t + \frac{1}{4}\ \sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Feladatok:

a) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x+2}\ \mathrm{d}x\ = ?$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-2x^2}}\ \mathrm{d}x\ = ?$

c) $\displaystyle\int x^3\sqrt{16-x^2}\ \mathrm{d}x\ = ?$

d) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+2}}\ \mathrm{d}x\ = ?$
(Ez elemi úton is integrálható, mert $\int f' f^\alpha \,\mathrm{d}x$ alakú. Oldjuk meg mindkét módon!)

Racionális törtfüggvény integráljára vezető helyettesítések

2. $\boxed{\displaystyle\int R(\mathrm{e}^x)\ \mathrm{d}x}$

$$\mathrm{e}^x := t\ \longrightarrow\ x = \ln t\ \longrightarrow\ \mathrm{d}x = \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$$

Pl. $\boxed{\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\ \mathrm{d}x\ = ?} := X$

$$\int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \int\left(\frac{-1}{1+t}+\frac{1}{t}\right)\ \mathrm{d}t = -\ln|1+t| + \ln|t| + C$$

Ugyanis $\displaystyle\qquad \frac{1}{(1+t)\,t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t}$

$$1 = At + B(1+t)\ \longrightarrow\ t=0:\ B=1,\ \ t=-1:\ A=-1$$

Ennek megfelelően a megoldás:

$$X = -\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) + x + C$$

Feladatok:

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = ?$

b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x} = ?$

3. $\boxed{\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \sqrt[n]{ax+b} := t}$

Pl. $\boxed{\displaystyle\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x = ?} := X$

$$\sqrt{x-2} := t \quad \longrightarrow \quad x = t^2 + 2 \quad \longrightarrow \quad \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{t^2-1}{(t^2+3)\,t}\,2t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2+3-4}{t^2+3}\,\mathrm{d}t = 2\int \left(1 - \frac{4}{3}\,\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= 2t - \frac{8}{3}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C$$

$$X = 2\sqrt{x-2} - \frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{3}} + C$$

Feladatok:

a) $\displaystyle\int x\sqrt{5x+3}\,\mathrm{d}x = ?$

b) $\displaystyle\int (2x+1)\sqrt{(5x-3)^3}\,\mathrm{d}x = ?$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x = ?$

d) $\displaystyle\int \frac{3x^2+4}{\sqrt[3]{6x-4}}\,\mathrm{d}x = ?$

4. $\boxed{\displaystyle\int R\left(x^{\frac{p_i}{q_i}}\ (i=1,2,\ldots,n)\right)\mathrm{d}x \qquad t := x^{\frac{1}{q}}, \quad q:\ q_1,\ldots,q_n \text{ legkisebb közös többszöröse}}$

Pl. $\boxed{\displaystyle\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}\,\mathrm{d}x = ?} := X \qquad q_1 = 2,\ q_2 = 4,\ q = 4$

$$t = x^{\frac{1}{4}} \quad\longrightarrow\quad x = t^4 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}x = 4t^3\,\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{t^2}{t^3+1} 4t^3\,\mathrm{d}t = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}\,\mathrm{d}t = 4\int \left(t^2 - \frac{1}{3}\,\frac{3t^2}{t^3+1}\right)\mathrm{d}t = 4\,\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}\ln|t^3+1| + C$$

$$X = \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|\right) + C$$

Feladatok:

a) $\displaystyle\int \frac{1+x^{\frac{3}{2}}}{3-x^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}x = ?$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = ?$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^{\frac{5}{8}} - x^{\frac{1}{8}}}\,\mathrm{d}x = ?$

5. $\boxed{\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x}$

$$t := \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad\longrightarrow\quad x = 2\operatorname{arctg} t \quad\longrightarrow\quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \left(\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}\right)$$

Pl. $\boxed{\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\,(1+\cos x)} = ?} := X$

$$\int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\,\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+t^2}{2t}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{2t} + \frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{t^2}{4} + C$$

$$X = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{4} + C$$

Pl. $\boxed{\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}\, \mathrm{d}x = ?} := X$

$$\int \frac{1+t^2}{2t}\,\frac{1+t^2}{1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2+1}{t\,(1-t)\,(1+t)}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \dots$$

Feladatok:

a) $\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = ?$

b) $\int \frac{1}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x = ?$

c) $\int \frac{1}{2-\cos x}\,\mathrm{d}x = ?$

5.11. Improprius integrál

5.11.1. Definíciók

Ha az intervallum nem korlátos

D Ha $\forall\,\omega \in (a,\infty)$-re $f \in R_{[a,\omega]}$:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty} \int_a^{\omega} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ha létezik a határérték, akkor az improprius integrál konvergens. Ha a határérték végtelen, vagy nem létezik, akkor az improprius integrál divergens.

Pl. $\boxed{\int_2^{\infty} \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = ?} := X$

[6]lásd Thomas 08-as bemutató 8. fejezet (49-50. oldal).

Megoldás. Részlettörtekre bontással kell dolgoznunk.

$$\frac{6}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \longrightarrow 6 = A(x+2) + B(x-1)$$

$$x=-2: \quad B=-2, \qquad x=1: \quad A=2$$

$$X = \lim_{\omega\to\infty} \int_2^{\omega} \frac{6}{x^2+x-2}\, dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_2^{\omega} \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+2}\right) dx =$$

$$= 2 \lim_{\omega\to\infty} \left(\ln(x-1) - \ln(x+2)\right)\Big|_2^{\omega} = 2 \lim_{\omega\to\infty} (\underbrace{\ln(\omega-1) - \ln(\omega+2)}_{\infty-\infty \text{ alakú}} - (\ln 1 - \ln 4)) =$$

$$= 2 \lim_{\omega\to\infty} \left(\underbrace{\ln\frac{\omega-1}{\omega+2}}_{\ln\frac{1-\frac{1}{\omega}}{1+\frac{2}{\omega}}\to 0} + \ln 4\right) = 2 \ln 4$$

Ⓓ Ha $\forall\,\omega \in (-\infty, b)$-re $f \in R_{[\omega,b]}$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{\omega\to-\infty} \int_{\omega}^{b} f(x)\, dx$$

Ha létezik a határérték, akkor az improprius integrál konvergens. Ha a határérték végtelen, vagy nem létezik, akkor az improprius integrál divergens.

Pl. $\boxed{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln(2-x)}}\, dx = ?} := X$

Megoldás.

$$X = \lim_{\omega\to-\infty} \int_{\omega}^{-1} \underbrace{\frac{-1}{2-x} \left(\ln(2-x)\right)^{-\frac{1}{2}}}_{f'\,f^{\alpha} \text{ alakú}} dx = \lim_{\omega\to-\infty} \left.\frac{(\ln(2-x))^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_{\omega}^{-1} =$$

$$= 2 \lim_{\omega\to-\infty} \left(\sqrt{\ln 3} - \sqrt{\ln(2-\omega)}\,\right) = -\infty \quad \text{(divergens)}$$

Egy fontos megjegyzés

Ⓓ Az $\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ improprius integrált konvergensnek mondjuk, ha tetszőleges $c \in (a,b)$ mellett

$$\int\limits_a^c f(x)\ \mathrm{d}x \qquad \text{és} \qquad \int\limits_c^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

mindketten konvergens integrálok, és a fenti integrál divergens, ha az utóbbi két integrál közül akár csak az egyik divergens.

Ⓓ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \lim\limits_{\substack{\omega_2\to\infty \\ \omega_1\to-\infty}} \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\ \mathrm{d}x$

Ⓜ Az előző definíció miatt $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x \neq \lim\limits_{\omega\to\infty} \int\limits_{-\omega}^{\omega} f(x)\ \mathrm{d}x$.

Ui. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\ \mathrm{d}x \neq \lim\limits_{\omega\to\infty} \int\limits_{-\omega}^{\omega} x\ \mathrm{d}x = \lim\limits_{\omega\to\infty} \left[\frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega^2}{2}\right] = 0$, mert pl. $\int\limits_0^{\infty} x\ \mathrm{d}x$ divergenciája miatt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\ \mathrm{d}x \text{ is divergens.}$$

Ha a függvény nem korlátos

Ⓓ Ha a-ban nem korlátos, de $f \in R_{[a+\delta,b]}$ $(a < a+\delta < b)$

$$\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{a+\delta}^b f(x)\ \mathrm{d}x \qquad \text{vagy} \qquad = \lim_{\alpha\to a+0} \int\limits_{\alpha}^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Ⓓ Ha b-ben nem korlátos, de $f \in R_{[a,b-\delta]}$

$$\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_a^{b-\delta} f(x)\ \mathrm{d}x \qquad \text{vagy} \qquad = \lim_{\beta\to b-0} \int\limits_a^{\beta} f(x)\ \mathrm{d}x$$

D Ha $c \in (a,b)$-ben nem korlátos:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{\delta_1 \to +0} \int_a^{c-\delta_1} f(x)\ \mathrm{d}x + \lim_{\delta_2 \to +0} \int_{c+\delta_2}^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Pl. $\boxed{\int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = ?} := X$

$$X = \lim_{\delta \to +0} \int_0^{1-\delta} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (\arcsin x)^{\frac{1}{2}}}_{f'\,f^\alpha \text{ alakú}}\ \mathrm{d}x = \lim_{\delta \to +0} \left. \frac{(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^{1-\delta} =$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{\delta \to +0} \left((\arcsin(1-\delta))^{\frac{3}{2}} - 0 \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Pl. $\boxed{\int_5^7 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-5)^2}}\ \mathrm{d}x = ?} := X$

$$X = \lim_{\delta \to +0} \int_{5+\delta}^7 (x-5)^{-\frac{2}{3}}\ \mathrm{d}x = \lim_{\delta \to +0} \left. \frac{(x-5)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right|_{5+\delta}^7 = 3 \lim_{\delta \to +0} \left(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{\delta} \right) = 3\sqrt[3]{2}$$

5.11.2. $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ improprius integráljai

Pl. Milyen α-ra konvergens $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\ \mathrm{d}x$?

Megoldás.
Ha $\alpha = 1$:

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_1^\omega \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \lim_{\omega \to \infty} \ln x \Big|_1^\omega = \lim_{\omega \to \infty} (\ln \omega - \ln 1) = \infty, \qquad \text{tehát divergens}$$

Ha $\alpha \neq 1$:

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_1^\omega x^{-\alpha}\ \mathrm{d}x = \lim_{\omega \to \infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^\omega = \lim_{\omega \to \infty} \left[\frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right]$$

Konvergens, ha $\quad 1-\alpha<0\,,\;$ tehát $\quad \alpha>1.$
Divergens, ha $\quad 1-\alpha>0\,,\;$ tehát $\quad \alpha<1.$

Összefoglalva:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \text{konvergens,} & \text{ha } \alpha>1 \\ \text{divergens,} & \text{ha } \alpha\le 1 \end{cases}$$

Pl. Milyen α-ra konvergens $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$?

Megoldás.
Hasonlóan megmutatható, hogy

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \text{konvergens,} & \text{ha } \alpha<1 \\ \text{divergens,} & \text{ha } \alpha\ge 1 \end{cases}$$

Ui.: $\alpha=1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to+0}\int_\delta^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to+0} \ln x\Big|_\delta^1 = \lim_{\delta\to+0}(\ln 1-\ln\delta)=\infty\,, \qquad \text{divergens}$$

$\alpha\neq 1$:

$$\lim_{\delta\to+0}\int_\delta^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to+0}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_\delta^1 = \lim_{\delta\to+0}\left[\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]$$

Konvergens, ha $\quad 1-\alpha>0\,,\;$ tehát $\quad \alpha<1.$
Divergens, ha $\quad 1-\alpha<0\,,\;$ tehát $\quad \alpha>1.$

Pl. Milyen α-ra konvergens $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$?

Megoldás.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x}_{\text{konv., ha } \alpha<1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x}_{\text{konv., ha } \alpha>1} \qquad \text{így divergens } \forall\,\alpha\text{-ra}$$

5.11.3. Az improprius integrálok néhány tulajdonsága

T₁ ***Cauchy-kritérium***

Az $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *(ill.* $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$*) improprius integrál akkor és csak akkor konvergens, ha* $\forall\,\varepsilon > 0$*-hoz* $\exists\,\Omega(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ *szám úgy, hogy* $\forall\,\omega_1 > \Omega,\ \omega_2 > \Omega$ *(ill.* $\omega_1 < \Omega,\ \omega_2 < \Omega$*) esetén:*

$$\left|\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

B (¬B) ■

D Ha $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konvergens, akkor az improprius integrált abszolút konvergensnek mondjuk.

D Ha $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergens, de $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ nem konvergens, akkor az improprius integrált feltételesen konvergensnek mondjuk.

T₂ *Ha* $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ *konvergens, akkor* $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *is konvergens, és*

$$\left|\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int\limits_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

B

$$\left|\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \left|\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} |f(x)|\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \qquad \omega_1, \omega_2 > \Omega(\varepsilon)$$

Az első egyenlőtlenség a határozott integrálnál tanultak miatt, a második pedig az abszolút konvergencia és T_1 miatt áll fenn. Tehát $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ is konvergens.

Másrészt:

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \qquad \text{miatt}$$

$$-\int_a^\omega |f(x)|\ dx \le \int_a^\omega f(x)\ dx \le \int_a^\omega |f(x)|\ dx \qquad \forall\,\omega\text{-ra} \qquad (\omega > 0)$$

Ekkor a limeszekre is igaz:

$$-\lim_{\omega\to\infty}\int_a^\omega |f(x)|\ dx \le \lim_{\omega\to\infty}\int_a^\omega f(x)\ dx \le \lim_{\omega\to\infty}\int_a^\omega |f(x)|\ dx$$

tehát

$$-\int_a^\infty |f(x)|\ dx \le \int_a^\infty f(x)\ dx \le \int_a^\infty |f(x)|\ dx$$

$$\Longrightarrow \qquad \left|\int_a^\infty f(x)\ dx\right| \le \int_a^\infty |f(x)|\ dx$$

■

Majoráns kritérium

T$_3$ *$f \in R_{[a,\omega]}$ $\forall\,\omega \in (a,\infty)$-re és $|f(x)| \le g(x)$ $x \in [a,\infty)$-re.*

Ha $\int_a^\infty g(x)\ dx$ konvergens, akkor $\int_a^\infty |f(x)|\ dx$ is az (az előző tétel miatt $\int_a^\infty f(x)\ dx$ is konvergens) és

$$\left(\left|\int_a^\infty f(x)\ dx\right| \le\right) \int_a^\infty |f(x)|\ dx \le \int_a^\infty g(x)\ dx$$

B g-re igaz a Cauchy-kritérium:

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} g(x)\ dx\right| < \varepsilon$$

De $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$ miatt:

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} |f(x)|\ \mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} g(x)\ \mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

tehát $|f|$-re is teljesül a Cauchy-kritérium.
Másrészt:

$$\int_a^{\omega} |f(x)|\ \mathrm{d}x \leq \int_a^{\omega} g(x)\ \mathrm{d}x$$

$\forall\,\omega$-ra és ezért a limeszekre is teljesül. ■

Minoráns kritérium

T4 *Ha* $0 \leq h(x) \leq f(x)$ $x \in [a, \infty)$*-re és* $\displaystyle\int_a^{\infty} h(x)\ \mathrm{d}x = \infty \quad\Longrightarrow\quad \int_a^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \infty$

B Ha $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ konvergens lenne, akkor az előző tétel miatt $\displaystyle\int_a^{\infty} h(x)\ \mathrm{d}x$ is konvergens lenne. $\lightning$

M Hasonló tételek mondhatók ki a $(-\infty, b]$, ill. $[a, b]$ intervallumon definiált improprius integrálokra is.

5.11.4. Feladatok

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ \mathrm{d}x = ?$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = ?$

3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2x}\ \mathrm{d}x = ?$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = ?$ $\qquad\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = ?$

5. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(x+1)(x+4)}\ \mathrm{d}x = ?$

6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\ \mathrm{d}x = ?$

7. $\displaystyle\int_{3}^{\infty} \frac{8}{(x-2)(x^2+4)}\ \mathrm{d}x = ?$

8. $\displaystyle\int_{3}^{7} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-3}} = ?$

9. $\displaystyle\int_{3}^{7} \frac{x}{\sqrt{x-3}}\ \mathrm{d}x = ? \qquad (t := \sqrt{x-3})$

10. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1}\ \mathrm{d}x = ? \qquad (t := \mathrm{e}^x)$

11. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\ \mathrm{d}x = ? \qquad (t := \mathrm{e}^x)$

12. Konvergens-e az alábbi integrál?

    a) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{x}{x^4+2x^3+1}\ \mathrm{d}x$

    b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^4+2x^3+1}\ \mathrm{d}x$

13. Konvergens-e az

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2\cos x}{x^4+2x^2+2}\ \mathrm{d}x$$

improprius integrál? Ha igen, adjunk becslést az integrál értékére!

5.12. Az integrálszámítás alkalmazása

5.12.1. Terület

A határozott integrál definíciója azonnal adja a következőt.

Ha egy $f(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallumon nem negatív, és integrálható, akkor a grafikonja, az x tengely, illetve az $x=a$ és $x=b$ egyenesek által határolt általánosított trapéz területét a következő képlet adja.

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Pl. Számoljuk ki az egységsugarú félkör területét!

Legyen $a=-1$, $b=1$ és $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

Ekkor a terület:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\mathrm{d}t=$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos 2t+1}{2}\mathrm{d}t=\left.\frac{\sin 2t}{4}+\frac{t}{2}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}$$

A helyettesítéses integrál, illetve az inverzfüggvény deriválási szabálya adja a következőt. Ha az $[\alpha,\beta]$ intervallumon adott $(x(t),y(t))$ paraméteres görbével dolgozunk, ahol $y\in C^0_{[\alpha,\beta]}$ nem negatív, $x\in C^1_{[\alpha,\beta]}$ pedig szigorúan monoton nő, akkor a terület képlete

$$\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Pl. Számoljuk ki újra az egységsugarú félkör területét!

Legyen $x(t)=-\cos t\,,\ y(t)=\sin t$ és $\alpha=0\,,\ \beta=\pi\,.$

Ekkor a terület:

$$\int_0^\pi \sin t\cdot\sin t\ \mathrm{d}t=\int_0^\pi\sin^2 t\ \mathrm{d}t=\int_0^\pi\frac{1-\cos 2t}{2}\ \mathrm{d}t=\left.\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right|_0^\pi=\frac{\pi}{2}$$

[7] lásd Thomas 06-os bemutató.

5.12.2. Szektorterület

Ha $r \in C^0_{[\alpha,\beta]}$ nem negatív, akkor az $r(\varphi)$ polárkoordinátákkal adott görbe, illetve az α és a β iránytangensű sugarak által közrezárt szektor területét a következő képlettel számolhatjuk ki.

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi$$

Pl. Számoljuk ki újra az egységsugarú félkör területét!

Ehhez legyen $\alpha = 0\,,\ \beta = \pi$ és $r(\varphi) = 1\,.$

Ekkor a terület:

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} 1^2\ \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Pl. Számoljuk ki az egységnégyzet területét!

Ehhez legyen $\alpha = 0\,,\ \beta = \frac{\pi}{2}$ és $r(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos\varphi}, & \text{ha } \varphi \in [0,\pi/4] \\ \dfrac{1}{\sin\varphi}, & \text{ha } \varphi \in [\pi/4,\pi/2] \end{cases}.$

A terület:

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} r^2(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\pi/4} r^2(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} r^2(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2\varphi}\ \mathrm{d}\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2\varphi}\ \mathrm{d}\varphi\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\varphi|_0^{\pi/4} + -\operatorname{ctg}\varphi|_{\pi/4}^{\pi/2}\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

5.12.3. Forgástest térfogata

Ha $f \in C^0_{[a,b]}$, akkor az x tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogatát a következő képlet adja.

$$\pi\int_{a}^{b} f^2(x)\ \mathrm{d}x$$

Pl. Számoljuk ki az egységsugarú gömb térfogatát!

Legyen $a = -1$, $b = 1$ és $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
Ekkor a térfogat:

$$\pi \int_{-1}^{1} 1 - x^2 \ \mathrm{d}x = \pi \left(x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} \right) = \pi \left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) \right) = \frac{4}{3}\pi$$

Ha az $[\alpha, \beta]$ intervallumon adott $(x(t), y(t))$ paraméteres görbével dolgozunk, ahol $y \in C^0_{[\alpha,\beta]}$, és $x \in C^1_{[\alpha,\beta]}$ pedig szigorúan monoton nő, akkor a térfogat képlete

$$\pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) x'(t) \ \mathrm{d}t$$

Pl. Számoljuk ki újra az egységsugarú gömb térfogatát!

Legyen $x(t) = -\cos t$, $y(t) = \sin t$ és $\alpha = 0$, $\beta = \pi$.
Ekkor a térfogat:

$$\pi \int_0^{\pi} \sin^2 t \cdot \sin t \mathrm{d}t = \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t) \cdot \sin t \mathrm{d}t = \pi \left(-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{4}{3}\pi$$

5.12.4. Forgástest felszíne

Ha $f \in C^1_{[a,b]}$ nem negatív, akkor az x tengely körüli megforgatásával kapott forgástest palástjának felszínét a következő képlet adja.

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \ \mathrm{d}x$$

Pl. Számoljuk ki az egységsugarú gömb felszínét!

Legyen $a = -1$, $b = 1$ és $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
Ekkor a felszín:

$$2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} \ \mathrm{d}x = 2\pi \int_{-1}^{1} 1 \ \mathrm{d}x = 4\pi$$

Ha az $[\alpha, \beta]$ intervallumon adott $(x(t), y(t))$ paraméteres görbével dolgozunk, ahol $x, y \in C^1_{[\alpha,\beta]}$, y nem negatív, akkor a felszín képlete

$$2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ \mathrm{d}t$$

Pl. Számoljuk ki újra az egységsugarú gömb felszínét!

Legyen $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ és $\alpha = 0$, $\beta = \pi$.

Ekkor a felszín:

$$2\pi \int_0^{\pi} \sin t\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\mathrm{d}t = 2\pi \int_0^{\pi} \sin t\mathrm{d}t = 2\pi\left(-\cos t|_0^{\pi}\right) = 4\pi$$

5.12.5. Ívhosszúság

Ha $f \in C^1_{[a,b]}$, akkor hossza

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\ \mathrm{d}x$$

Pl. Számoljuk ki az egységsugarú félkör kerületét!

Legyen $a = -1$, $b = 1$ és $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Ekkor a kerület:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}}\ \mathrm{d}x = \arcsin x|_{-1}^{1} = \pi$$

Ha az $[\alpha, \beta]$ intervallumon adott $(x(t), y(t))$ paraméteres görbével dolgozunk, ahol x, $y \in C^1_{[\alpha,\beta]}$, akkor az ívhossz képlete

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ \mathrm{d}t$$

Pl. Számoljuk ki újra az egységsugarú félkör kerületét!

Legyen most $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ és $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$.

Ekkor

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} 1\mathrm{d}t = \pi$$

Tárgymutató